

DES MATHÉMATIQUES AUX SCIENCES PHYSIQUES : EXEMPLES D'EFFETS TRANSPOSITIFS

Corine CASTELA*

Résumé – Cette communication s'intéresse aux effets de transposition subis par des praxéologies mathématiques à l'occasion de leur utilisation en Sciences Physiques et de leur enseignement sous la responsabilité de professeurs de cette discipline. A cette occasion, on présentera plusieurs développements du modèle praxéologique proposé par la Théorie Anthropologique du Didactique.

Mots-clefs : Praxéologie, technologie d'une technique, validation, automatique, approximation

Abstract – This proposition is focused on the topic of transposition effects operated on mathematical praxeologies either when used by Physical Sciences or when taught under Physical Sciences teachers' responsibility. Several developments of the Anthropological Theory of Didactics praxeological model will be presented as interesting tools for the transposition analysis.

Keywords: Praxeology, technology of a technique, validation, automatics, approximation

L'objectif de cette proposition est de présenter des développements récents apportés à la notion d'organisation praxéologique ou praxéologie, introduite par Chevallard (1999) au sein de la Théorie Anthropologique du Didactique. Le modèle praxéologique $[T, \tau, \theta, \Theta]$ fournit une grille d'analyse des ressources produites par un groupe humain ou un individu dans le traitement des situations problématiques qu'il affronte. La notion de type de tâches T rend compte d'un processus de repérage d'une genericité qui est une condition nécessaire à l'émergence d'au moins une technique τ permettant de surmonter une certaine proportion de tâches du même type. Une technique est un ensemble de gestes, utilisant certains outils, dans certains dispositifs. $[T, \tau]$ représentant le savoir-faire (la *praxis*), le bloc $[\theta, \Theta]$ prend en charge le discours rationnel (le *logos*) associé à cette pratique. Selon les définitions introduites par Chevallard (voir Ibid., p.226), la technologie θ de la technique τ est constituée de l'ensemble des savoirs qui permettent de *justifier* τ (prouver que, lorsqu'elle fonctionne, ses productions sont bien celles qui sont requises par la tâche traitée), de la *rendre intelligible* et de la *produire*. La théorie Θ est enfin définie comme la technologie de la technologie, l'ensemble des savoirs qui justifient θ . Si l'on peut postuler que toute technique socialement construite donne nécessairement lieu au développement d'une technologie, il n'en est pas de même de la théorie qui est très souvent embryonnaire. De nombreux travaux de didactique ont utilisé ce modèle praxéologique dans le cas de types de tâches mathématiques (l'usage est alors de parler d'Organisation Mathématique ou *OM*). Le lecteur pourra ainsi trouver différents exemples dans les actes de la 11^e école de didactique des mathématiques (2002). Selon la démarche usuelle d'étude de la transposition didactique, on détermine d'abord l'*OM* de référence produite par les mathématiciens. Les descriptions proposées sont en général calquées sur ce qui est présenté dans les traités savants : la technologie est constituée des théorèmes qui permettent de produire la technique et en établissent la validité, de certaines démonstrations considérées notamment comme sources d'intelligibilité ; le triplet $[T, \tau, \theta]$ apparaît en tant que conséquence d'une théorie Θ . Même si le modèle praxéologique correspond à la volonté de reconnaître que l'origine du savoir mathématique théorique est située dans la résolution de tâches problématiques, les *OM* de référence sont dépouillées de tous les avatars liés à leur invention. Elles sont le résultat d'une ascèse qui ne retient que le savoir minimal nécessaire à assurer la validité des techniques pour l'institution mathématique savante (désignée dans la suite par l'expression *la Recherche en Mathématiques*, les

* LDAR, Université Paris Diderot, Université de Rouen – France – corine.castela@univ-rouen.fr

majuscules marquant la dimension institutionnelle). Mais ces *épure praxéologiques*, dont la technologie est centrée sur une fonction de validation éclairée (on sait que la technique produit bien ce qu'on attend d'elle et on comprend comment il se fait qu'elle le fait), satisfont-elles au projet de prendre en compte toutes les ressources cognitives produites dans l'affrontement aux tâches pour lesquelles sont inventées des techniques ? Certains des travaux réalisés autour de la résolution de problèmes en mathématiques produisent une première raison de répondre négativement à cette question. Selon les analyses développées notamment par Schoenfeld (1985) et en France par le courant « méta » (Robert et Robinet 1996), les savoirs nécessaires à l'usage efficace du savoir théorique ne sont pas entièrement pris en charge par ce dernier. L'utilisation par la Recherche en Mathématiques des épures praxéologiques s'accompagne du développement d'éléments technologiques pratiques, construits et validés dans l'empirie de l'activité des mathématiciens. Se situant, comme les travaux précédemment évoqués, dans la perspective d'un accompagnement didactique de la construction par les élèves de tels savoirs et postulant donc la nécessité de leur identification explicite, Castela 2008 (p. 143) propose de les intégrer au modèle praxéologique en distinguant une *composante pratique* θ^p de la technologie.

$$\begin{bmatrix} T, \tau & \theta^{th}, \Theta \\ & \theta^p \end{bmatrix}$$

Figure 1 – premier développement du modèle praxéologique

La *composante théorique* θ^{th} est formée de résultats validés par une théorie, $[T, \tau, \theta^{th}, \Theta]$ est donc l'épure praxéologique à laquelle peut être identifiée l'OM relative à T . θ^p est validée empiriquement et non selon le paradigme mathématique. Si cette composante dépasse la construction individuelle, ce qui apparaît nécessaire dès lors qu'il est par exemple envisagé de la constituer en enjeu identifié de la formation des professeurs, ces savoirs sont légitimés socialement et institutionnalisés grâce à des processus collectifs qui impliquent des praticiens confrontés à la résolution de tâches de type T .

Le feuilletage de la technologie ainsi proposé a donc été motivé par les besoins de modélisation du savoir produit dans et pour l'utilisation des OM par la recherche mathématique et l'enseignement. Il s'est ensuite révélé particulièrement adapté à l'étude des effets transpositifs subis par les OM lors de leur intégration en tant qu'outils pour des domaines de recherches non mathématiques et leurs applications professionnelles. Nous le montrerons dans la première partie de cette présentation. Puis, l'introduction des savoirs empiriques ayant attiré l'attention sur la question de la validation des composants de la praxéologie, nous l'examinerons comme susceptible d'effets transpositifs dans le cas de l'utilisation par les Sciences Physiques de praxéologies mathématiques. Ceci nous conduira à proposer en conclusion un deuxième développement du modèle.

I. LES FONCTIONS DE LA TECHNOLOGIE

Nous faisons référence dans cette partie à un travail réalisé dans le cadre de la thèse de didactique des mathématiques de Romo Vázquez (2009) consacrée à la formation mathématique des ingénieurs. Le contexte étudié est celui d'un Institut Universitaire Professionnalisé. La formation est caractérisée par une liaison étroite avec le monde de l'entreprise, qui se traduit notamment par le dispositif dit des projets d'ingénierie. Le cœur de la thèse porte sur l'étude de la place des mathématiques dans la réalisation de tels projets. L'un d'entre eux confronte les étudiants à un problème d'asservissement d'un système continu. Le

traitement proposé s'appuie sur le logiciel Matlab, de nombreux savoirs mathématiques sont en jeu mais ils n'apparaissent pas explicitement. Dans le but de les mettre à jour, ont été examinés plusieurs cours consacrés à la transformation de Laplace et à son utilisation dans la résolution des équations différentielles linéaires : un cours de mathématiques proposé dans un groupe d'écoles d'ingénieurs et deux cours d'automatique relevant de cursus universitaires de formation technologique. Des différences notables sont apparues entre ces textes ; l'effort d'élucidation qu'il a fallu réaliser pour les analyser a conduit à préciser les fonctions attribuées aux savoirs technologiques, de façon à prendre en compte certains savoirs pratiques relatifs à l'utilisation des mathématiques en automatique (Castela et Romo Vázquez 2011).

Les savoirs technologiques d'un bloc $[T, \tau]$ peuvent remplir l'une ou l'autre des fonctions suivantes : *décrire, faciliter, motiver, valider, expliquer, évaluer*.

- *Décrire la technique*

La production d'un descriptif des gestes qui composent une technique est prise en compte comme un fait de savoir non identifiable à la maîtrise de la technique elle-même. L'élaboration d'un système de représentations, verbales et plus largement symboliques, des actions est en jeu.

- *Valider la technique*

La fonction considérée correspond à ce qui est en général entendu sous le terme *justifier* dans les textes qui définissent la notion de praxéologie. Les savoirs considérés établissent que la technique et les gestes qui la composent permettent bien d'atteindre les buts qui leur sont assignés.

- *Expliquer la technique*

L'enjeu est ici d'analyser comment il se fait que la technique permet bien d'atteindre les buts visés. Il existe des validations qui n'expliquent pas (par exemple des démonstrations analytiques en géométrie). Il existe aussi des explications qui ne valident pas, parce qu'elles ne respectent pas complètement les normes de la validation dans l'institution qui examine cette question de la validité. Elles insèrent la technique et ce qui en est su dans le tout d'une culture partagée, contribuant à la compréhension des causes par les sujets.

- *Faciliter la mise en œuvre de la technique*

Les savoirs considérés ici permettent d'utiliser avec efficacité mais aussi dans un certain confort la technique. Ils sont porteurs d'améliorations mais aussi d'avertissements permettant d'éviter erreurs et maladresses connues comme fréquentes. Ce domaine de savoirs est le terrain privilégié des élaborations technologiques d'utilisateurs. Il produit des reprises du descriptif, qui l'adaptent aux spécificités du contexte institutionnel d'utilisation et l'enrichissent de la mémoire des expériences accumulées.

- *Motiver la technique et les gestes qui la composent*

Les savoirs de motivation participent d'une intelligence des fins : pour faire quoi accomplit-on tel geste à tel moment ? Ce sont aussi des savoirs sur le type de tâches puisqu'ils en analysent les buts : ceux-ci justifient rationnellement les gestes en montrant leurs raisons d'être. Ils permettent d'anticiper les étapes à atteindre et jouent un rôle heuristique important lorsque la mise en œuvre de la technique nécessite des adaptations.

- *Évaluer la technique*

Les savoirs envisagés ici portent sur les conditions et les limites d'une technique relativement aux tâches du type T , par comparaison avec d'autres techniques possibles s'il en existe. Ils peuvent également concerner l'ergonomie de la technique du point de vue de ses utilisateurs.

Les fonctions évaluer, faciliter et motiver sont parfois intimement associées : la mise en évidence de certaines difficultés (*évaluer*) peut entraîner au bout d'un certain temps la production d'améliorations (*faciliter*) dont la motivation est donc fournie par l'évaluation.

Nous illustrerons ces définitions par quelques extraits du cours d'automatique mis en ligne sur le site national des IUT¹ (Institut Universitaire de Technologie, formant en deux ans des Techniciens supérieurs). Plus précisément, nous examinons les effets d'une double transposition sur l'OM de résolution des équations différentielles linéaires impliquant la transformation de Laplace. En effet, la Recherche en Automatique, domaine scientifique orienté vers les applications, utilise des praxéologies mathématiques, qui subissent donc un premier effet transpositif. Cette institution produit elle-même des praxéologies qui à leur tour sont utilisées dans des domaines de recherche plus spécialisés et dans les mondes industriels. Les praxéologies mathématiques poursuivent donc leur parcours transpositif. Celui-ci se prolonge à des fins didactiques dans les institutions de formation de techniciens et d'ingénieurs. Sauf précision contraire, les extraits examinés se situent dans le chapitre 1 « Transformation de Laplace. Relation Equation Différentielle-Fonction de transfert ».

Pour comprendre ce qui suit, quelques éléments concernant les types de tâches traités par l'automatique sont nécessaires. L'auteur du cours analysé précise :

Notre problème est donc d'asservir une grandeur physique $y(t)$ [ce qui] consiste à essayer d'obtenir $y(t) = y_c(t)$ où $y_c(t)$ représente la loi de consigne qu'on s'est fixée. [...] Avant de pouvoir asservir $y(t)$, il faut pouvoir agir sur $y(t)$ par modification d'une grandeur de commande $x(t)$. [...] Quand une perturbation [de $y(t)$] se manifeste, il faudra réagir sur la commande pour rétablir $y(t)$ à sa valeur consigne. Ceci ne peut être obtenu que par une boucle fermée. (pp. 2-3)

La commande en boucle fermée suppose qu'un capteur transforme $y(t)$ en une nouvelle grandeur dont les variations doivent enclencher le processus de correction. Le capteur doit être fiable et véloce, c'est-à-dire rendre compte de l'évolution de y en minimisant distorsion et retard. Les éléments suivants (chapitre 2 « Réponse temporelle des Systèmes Linéaires ») sont précisément liés à l'évaluation des qualités d'un capteur, à travers l'estimation du temps qu'il lui faut pour réagir à une variation brutale. Les systèmes considérés sont tels qu'une relation différentielle lie les grandeurs $x(t)$ et $y(t)$. Lorsqu'il s'agit d'une équation linéaire du premier ordre à coefficients constants, celle-ci est présentée sous la forme $t \times \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = A \times x(t)$ et τ est appelée constante de temps. L'extrait de cours suivant (§2.3.3) traite du cas où $x(t) = a \times u(t)$ ($u(t) = 0$ pour $t < 0$ et 1 pour $t \geq 0$).

La fonction de sortie est notée $y_{ind}(t)$: $y_{ind}(t) = aA(1 - e^{-t/\tau}) \times u(t)$. C'est une courbe exponentielle qui, à partir de la valeur initiale, varie de $Dy = a \times A$ où a représente l'amplitude de l'échelon, A le gain position (gain statique) du système. [...] nous savons que le régime permanent est atteint au bout d'un temps $t_p = 7\tau$.

Donc si une fonction d'entrée passe d'une valeur constante à une autre, il faut un temps estimé à 7τ pour que la fonction de sortie soit elle-même stabilisée. Si le système en question est le capteur contrôlant la grandeur asservie $y(t)$ envisagée plus haut, 7τ est le temps nécessaire à une prise en compte fidèle d'une variation de y . Cette affirmation est *validée* dans ce cours par la résolution de l'équation $e^{-t/\tau} = a/100$, en tenant compte de l'usage en vigueur dans le domaine qui admet l'égalité pour une erreur relative inférieure à 1 %. D'autres cas possibles pour la fonction $x(t)$ sont ensuite examinés, l'étude montre alors l'importance de la constante

¹ Verbeken M., *Asservissements continus*. iutenligne.net/ressources/automatique

de temps dans la fiabilité des capteurs. Ceci a des conséquences importantes sur la praxéologie dont nous étudions ici l'évolution, comme nous allons le voir maintenant.

Quelques éléments devraient suffire pour comprendre ce qui est en jeu. La transformation de Laplace est une application linéaire injective définie sur un ensemble de fonctions d'une variable réelle ; sa propriété fondamentale est que si $F(p)$ est la transformée d'une fonction f , $p \times F(p) - f(0)$ est celle de la dérivée f' . Ceci a pour conséquence que par application de la transformation de Laplace, une équation différentielle à coefficients constants $b_n y^{(n)} + b_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + b_1 y' + b_0 y = a_m x^{(m)} + a_{m-1} x^{(m-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x$ est transformée, si toutes les conditions initiales sont nulles, en l'équation algébrique $b_n p^n Y + b_{n-1} p^{n-1} Y + \dots + b_1 p Y + b_0 Y = b_m p^m X + b_{m-1} p^{m-1} X + \dots + b_1 p X + b_0 X$, où Y et X désignent les transformées des fonctions x et y . Y est donnée par la formule $Y = T(p) \times X$ où $T(p)$ qu'on appelle Fonction de Transfert est un rapport de deux polynômes en p . La résolution de l'équation différentielle suppose de déterminer la fonction dont $T(p) \times X$ est la transformée de Laplace. Ce type de tâches est traité dans la partie 1.8 « Transformation inverse » du cours :

3 méthodes s'offrent à nous, mais seulement la dernière sera exploitée.

[...] 1.8.3. Table de Transformées de Laplace

C'est grâce à cette table que nous pourrions exprimer les fonctions du temps sans trop de calculs. Elle est parfaitement adaptée à nos besoins en Automatique. Evitez d'utiliser une autre table qui renfermera des éléments inutiles et qui ne donnera pas les fonctions sous leur forme canonique (*évaluer, faciliter*).

Pour les fonctions $F(p)$ [la fonction dont on cherche l'inverse] compliquées il faudra faire une décomposition de cette fonction en une somme d'éléments simples puis prendre l'originale de chaque élément afin d'en faire à nouveau la somme (*décrire*).

Il est préférable d'exprimer une exponentielle en faisant apparaître la valeur de la constante de temps τ plutôt que son inverse a (*évaluer, faciliter*). En effet nous montrerons au chapitre suivant que la durée de vie de cette exponentielle est égale à 7 fois τ (*motiver*). Ceci nous oblige à mettre $F(p)$ sous une forme canonique en mettant toutes les constantes en facteur (*décrire, faciliter*). Par exemple, on transformera $(3p+2)$ en $2(1+1,5p)$, la valeur 1,5 représente alors la constante de temps (1,5s) de l'exponentielle qui interviendra dans la fonction $f(t)$. Ainsi on sait qu'au bout de 7 fois 1,5 soit à peu près 10 secondes, l'exponentielle sera nulle (*motiver*).

L'influence de l'institution d'utilisation sur la praxéologie mathématique apparaît clairement dans cet exemple. La technique mathématique et sa description sont modifiées par rapport à la technique initiale, telle qu'on la trouve exposée dans un cours de mathématiques pour ingénieurs où, dans la décomposition en éléments simples, les dénominateurs sont de la forme $(p - \rho)^k$. Les adaptations proposées augmentent l'ergonomie de la technique compte tenu des besoins spécifiques du contexte d'utilisation, ces motivations sont explicitées dans le texte du cours en ligne, dont une caractéristique est le souci constant de motiver les praxéologies présentées et d'en faciliter l'utilisation, ce qui le conduit à développer la composante θ^p , celle-ci prenant particulièrement en charge les fonctions *Motiver*, *Faciliter* et *Evaluer*. Notons l'intérêt méthodologique de l'étude d'un cours à distance dont le contexte favorise l'explicitation écrite de savoirs qui seraient tus dans des manuels et apparaîtraient au mieux à l'oral dans une formation présentielle.

Nous nous intéresserons dans la suite de cette communication à la question de la validation de la technique et de sa technologie, peu abordée ici. Signalons pour conclure cette première partie que les fonctions de la technologie, définies dans le cas où l'institution utilisatrice de la technique ne relève pas du monde mathématique, se révèlent également pertinentes pour l'analyse des savoirs pratiques produits dans et pour la résolution de problèmes (voir Castela 2011, Chapitre 1).

II. VALIDATION DES COMPOSANTES D'UNE PRAXEOLOGIE

L'introduction des savoirs pratiques, en tant que production des utilisateurs, qu'ils soient mathématiciens ou automaticiens, professeurs ou étudiants, crée une perturbation dans l'épure praxéologique mathématique. En effet, construits dans l'empirie, ces savoirs ne vivent pas au régime des assertions mathématiques, ils ne sont le plus souvent ni universels, ni nécessaires et ne se valident pas par démonstration. Ils ne relèvent pas de la fécondité des théories développées par la science mathématique. Le modèle présenté en figure 1 laisse vide l'instance de la théorie en regard de la composante θ^p . Par son caractère radical, cette représentation veut mettre en exergue un fait nouveau relativement aux *OM* : le modèle praxéologique laisse échapper une partie décisive des bases de la validation et par suite de l'institutionnalisation de certaines ressources cognitives liées à la pratique. Même si l'on avance, comme Chevallard, que toute technologie est dotée d'un embryon de discours de justification, on doit soupçonner *a priori* qu'une telle théorie évanescence ne contribue que modérément aux processus qui fonderont une conviction partagée dans des mondes scientifiques ou professionnels de la validité de certains savoirs pratiques. Ce point ne sera pas développé ici, faute de recherche permettant de l'explorer.

Mais la nécessité de réexaminer la nature des formes de la validation ne concerne pas les seuls savoirs pratiques. Nous nous intéressons dans cette partie aux effets transpositifs subis par une *OM* lors de son utilisation par une autre science et lors de la reconstruction didactique opérée dans le cadre d'un Enseignement de cette même science. Les différents exemples examinés ici relèvent des sciences physiques. On doit envisager que la praxéologie enseignée soit marquée, jusque dans les modalités de validation par la Recherche en Sciences Physiques qui est l'institution de référence de l'institution d'enseignement considérée. Ceci est d'autant plus plausible que dans son histoire, la Recherche en Sciences Physiques a, régulièrement, développé et reconnu des techniques de résolution de certains types de tâches mathématiques, non formellement validées par la Recherche en Mathématiques, faute d'un cadre théorique adéquat qui ne serait produit qu'ultérieurement. Ainsi, à la fin du XIX^e siècle, Oliver Heaviside (1850-1925), chercheur en physique, développe, dans le cadre de ce qu'il appelle calcul symbolique, une technique formellement identique à celle que fonde de nos jours la transformée de Laplace. Celle-ci lui permettra de répondre aux besoins mathématiques soulevés par l'étude des régimes transitoires dans les phénomènes électriques. Heaviside ne se soucie pas de questions de validité mathématique, le calcul symbolique fonctionne comme un outil heuristique permettant de trouver l'expression de solutions dont l'existence est établie du fait que les équations à résoudre modélisent des phénomènes physiques effectifs, et que le physicien peut valider en dernier ressort par retour à ces mêmes phénomènes. Heaviside valide par induction les techniques de résolution proposées en comparant les solutions symboliques avec les solutions explicites connues. Les travaux scientifiques de Heaviside furent reconnus par ses pairs, bien avant que, vers la fin des années 1930, l'emploi du calcul symbolique ne soit justifié à partir des intégrales de Carson et de Laplace. L'histoire des sciences est jalonnée de telles validations *a posteriori* par les mathématiciens. Celles-ci sont connues de la Recherche en Sciences Physiques mais la question de leur transposition didactique est ouverte, notamment si elle est placée sous la responsabilité d'une institution d'enseignement de sciences physiques. L'étude relative à la transformée de Laplace a ainsi mis en évidence, au sein des deux cours d'automatique, diverses modalités de validation des énoncés mathématiques, interprétées en terme de références à la Recherche en Mathématiques (Castela et Romo Vázquez 2011, pp. 104-113) : celle-ci peut être *convoquée* (une démonstration plus ou moins conforme aux normes mathématiques est proposée), *invocée* (l'existence d'une garantie mathématique est mentionnée), *ignorée* (le caractère problématique de l'énoncé n'est pas explicité –par exemple, l'injectivité de la transformée de Laplace-, et

donc non plus l'existence d'une preuve). Ainsi la transposition didactique peut dépouiller l'OM de la théorie qui valide la technique et sa technologie θ^{th} . Mais ceci n'a pas pour conséquence irrémédiable la présentation d'une praxéologie incomplète puisque l'enseignement peut s'appuyer sur la praxéologie première développée par la Recherche en Sciences Physiques en respectant sa propre épistémologie. On trouvera dans l'article cité (pp. 114-116) un cas relatif à l'impulsion de Dirac $\delta(t)$. Après avoir invoqué la théorie des distributions, le cours étudié développe le cadre mathématiquement approximatif des fonctions généralisées, antérieure à la formalisation théorique proposée par Schwartz (1950) ; il peut ainsi justifier le fait que l'intégrale de la fonction $\delta(t)$ vaut 1, essentiel pour le calcul de la transformée de Laplace. Ce premier niveau de validation est ensuite complété en référence aux phénomènes physiques modélisés. La forme transposée de l'OM se trouve dotée d'un discours de validation enrichi de plusieurs points de vue dont on peut penser qu'il bénéficie aux yeux du physicien d'une force de validation plus convaincante et d'un pouvoir explicatif bienvenu.

La Recherche en Mathématiques était au plan théorique avec retard certaines des inventions mathématiques de la Recherche en Sciences Physiques. Néanmoins, dans l'ensemble des affirmations mathématiques produites par les physiciens, une certaine proportion demeure non établie mathématiquement. Hypothèses intervenant dans la modélisation d'un phénomène physique, elles sont validées en tant que telles dans le mouvement même de validation du modèle par confrontation aux phénomènes expérimentaux. Illustrons cette affirmation dans le domaine des approximations. Rogalski (2006) s'intéresse aux modélisations par équations différentielles, il illustre la procédure utilisée en physique par la situation d'un écoulement dans une canalisation poreuse :

On étudie les pertes d'eau le long d'une canalisation poreuse cylindrique, de rayon R , on suppose que sur un petit segment, la fuite est à peu près proportionnelle à la surface du segment et au débit. Si $\delta(x)$ désigne le débit à l'abscisse x de la canalisation, la variation $\Delta\delta$ correspondant à un accroissement Δx de l'abscisse est donnée par l'approximation : $\Delta\delta \approx -2\pi Rk \cdot \delta(x) \cdot \Delta(x)$. Par passage à la limite, on obtient

lorsque Δx tend vers 0 l'équation différentielle
$$\frac{d\delta}{dx} = -2\pi Rk \cdot \delta$$

L'approximation présentée en premier lieu constitue un écart avec la réalité physique puisque le débit n'est pas constant. Pour que le passage à la limite soit valide, il faut que l'erreur sur $\frac{\Delta\delta}{\Delta x}$ tende vers 0 en même temps que Δx . Donc le modèle proposé postule une certaine qualité de l'approximation différentielle adoptée. La validation d'une telle hypothèse peut être fondée mathématiquement dans certaines situations, Rogalski (Ibid.) en propose plusieurs exemples. Mais un tel contrôle par les mathématiques peut être complexe ou impossible, il n'est pas nécessairement privilégié par les physiciens. S'appuyant sur un sens physique de l'approximation valide, construit dans l'expérience, ceux-ci proposent des modèles qui peuvent toujours être évalués *a posteriori* par confrontation aux phénomènes expérimentaux. Si leur intuition du négligeable a été mise en défaut, le modèle sera rejeté. Ce processus de contrôle relève de l'essence même des sciences physiques qui s'émancipent ainsi des manques mathématiques. Mais son existence peut induire une prise de distance avec les développements de nature mathématique qui, dans certains cas, permettent d'évaluer *a priori* les erreurs provoquées par les approximations appliquées par les physiciens à des objets mathématisables. Nous allons voir un exemple d'une telle option, issu d'un manuel de Physique de première année du supérieur².

² Sanz M.-N., Badel A.-E., Clausset F. (2002) *Physique Tout-en-un 1^{ère} année*. Collection *J'intègre*. Paris : Dunod (pp. 94-95)

Le chapitre considéré est consacré à la cinématique du point matériel, nous examinons un extrait (Figure 2) consacré à l'expression du déplacement élémentaire en coordonnées polaires.

d) Déplacements élémentaires

Le déplacement élémentaire d'un point M de coordonnées (r, θ) correspond à son déplacement jusqu'au point M' de coordonnées $(r + dr, \theta + d\theta)$. On a donc

$$d\vec{OM} = \vec{OM}' - \vec{OM} = \vec{MM}'$$

Les variables r, θ sont indépendantes : l'expression du déplacement élémentaire est donc la somme des déplacements élémentaires correspondant à la variation d'une seule variable.

- une variation dr de r correspond à un mouvement le long de la droite (OM) soit $dr\vec{u}_r$,
- une variation $d\theta$ de θ correspond à un déplacement circulaire de centre O , de rayon r et d'angle $d\theta$ de longueur $rd\theta$ suivant \vec{u}_θ soit $rd\theta\vec{u}_\theta$,

Au final, le déplacement élémentaire s'écrit :

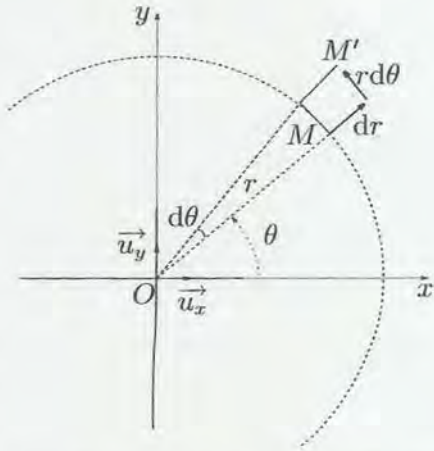
$$d\vec{OM} = dr\vec{u}_r + rd\theta\vec{u}_\theta$$


Figure 4.5 Déplacements élémentaires en coordonnées polaires.

Figure 2 – Extrait de manuel, p. 94

La base locale polaire est formée des vecteurs unitaires \vec{u}_r et \vec{u}_θ . On a dans cette base $\vec{OM} = r\vec{u}_r$. Le vecteur \vec{OM} est donc une fonction vectorielle de 2 variables r et θ , que nous notons \vec{F} . L'objet de l'étude est de déterminer $\vec{F}(r+dr, \theta+d\theta) - \vec{F}(r, \theta)$. Un théorème relevant de la théorie des fonctions de plusieurs variables (différentielle) établit que :

Si la fonction \vec{F} possède des dérivées partielles premières continues sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 , alors on a : $\vec{F}(r+dr, \theta+d\theta) - \vec{F}(r, \theta) = \frac{\partial \vec{F}}{\partial r} dr + \frac{\partial \vec{F}}{\partial \theta} d\theta + \vec{D}(dr, d\theta)$, \vec{D} étant un $\alpha(\sup(|dr|, |d\theta|))$.

Ce résultat est un exemple de résultat mathématique qui détermine l'ordre de l'approximation (ici linéaire) qui sera retenue. Mais ce manuel ne fait pas référence à ce résultat.

Le raisonnement est mené par égalités (aucun signe \approx), ce qui interdit toute interrogation quant à l'ordre de l'erreur commise. Or plusieurs approximations se succèdent. Si $N = M(r, \theta+d\theta)$ et $N' = M(r+dr, \theta)$, le quadrilatère $MNM'N'$ est identifié à un parallélogramme puis \vec{MN} est égal à $rd\theta\vec{u}_\theta$, alors qu'il ne lui est pas véritablement colinéaire et qu'il est plus court. Il était possible de calculer dans le repère fixe

(\vec{u}_x, \vec{u}_y) les composantes du vecteur $\overrightarrow{MM'} - d\overrightarrow{OM}$, on aurait vérifié alors en utilisant les DL des fonctions cosinus et sinus que l'erreur commise est bien d'ordre 1 par rapport aux accroissements élémentaires de r et θ .

A la page suivante du manuel (figure 3), sont déterminées les dérivées des vecteurs unitaires de la base polaire par rapport à θ . On notera cette fois une certaine reconnaissance du processus d'approximation et de l'ordre de l'erreur (« premier ordre en $d\theta$ »), énoncé qui reste sans justification. On peut supposer qu'intervient ici un savoir relatif à la qualité de l'approximation obtenue en identifiant une courbe à sa tangente mais celui-ci n'est pas explicité.

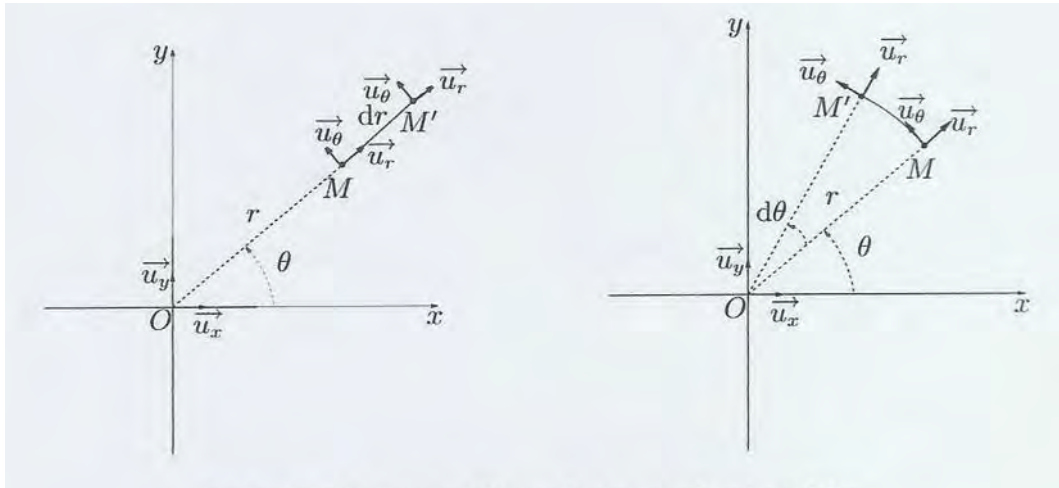


Figure 4.6 Déplacements élémentaires en coordonnées polaires.

Sur la figure de droite, l'angle $d\theta$ a été fortement exagéré pour la clarté du schéma, l'arc de cercle MM' est en réalité assimilable à un segment de droite et la base polaire en M' est la même qu'en M (au premier ordre en $d\theta$).

En dérivant par rapport à θ les expressions précédentes, on déduit :

$$\begin{cases} \frac{d\vec{u}_r}{d\theta} = -\sin\theta\vec{u}_x + \cos\theta\vec{u}_y = \vec{u}_\theta \\ \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\cos\theta\vec{u}_x - \sin\theta\vec{u}_y = -\vec{u}_r \end{cases}$$

Figure 3 – Extrait de manuel, p. 95

Remarquons enfin que la nécessité d'avoir une approximation d'ordre 1 n'est pas motivée. Pourtant la notion même de vitesse fournit dans ce contexte une raison d'être facilement accessible : le vecteur vitesse étant la limite du vecteur $\frac{\overrightarrow{MM'}}{dt}$ lorsque $dt \rightarrow 0$, il faut que le vecteur par lequel on approche $\overrightarrow{MM'}$ lui soit équivalent au sens mathématique (quotient tendant vers 1).

Comme nous en avons envisagé la possibilité, cet extrait montre une option didactique qui réduit le discours mathématique de validation de la technique d'approximation utilisée. Mais, ce qui est étonnant pour un mathématicien, est l'absence d'expansion d'un discours du physicien qui exprimerait certaines exigences relativement à la qualité de l'approximation, les motiverait et établirait qu'elles sont satisfaites, dans le cadre de l'épistémologie de la

discipline. Tout se passe comme si, ce discours, peut-être justement parce que ne relevant pas des épures praxéologiques des Sciences Physiques, n'accédait pas aux manuels de la discipline. La mise en texte du savoir, notamment à des fins didactiques, se traduisant par l'effacement des processus non théoriques de validation, la question de leur remplacement doit être posée, en tant que dimension de toute étude transpositive. Ceci conduit à proposer de nouveaux développements du modèle praxéologique (Castela 2011, Chapitre3).

III. CONCLUSION

Ce modèle se présente de la façon suivante :

$$I \rightarrow \left[\begin{array}{c} T, \tau \\ \theta^r, \Theta \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow I_r \\ \leftarrow I_u \end{array}$$

Figure 4 – second développement du modèle praxéologique

La partie gauche du schéma explicite le fait que le développement praxéologique est initié par l'existence d'un besoin institutionnel, la droite fait apparaître les institutions qui ont à faire avec la praxéologie Π considérée et, figurés par les flèches situées à droite, les processus de validation et plus largement d'institutionnalisation de Π réalisés dans et par ces institutions. I_r , généralisation des institutions Recherche en Mathématiques et Recherche en Sciences Physiques, désigne des *institutions de recherche*, c'est-à-dire dont le rôle social est de créer des praxéologies : la fonction institutionnelle des chercheurs n'est pas limitée au traitement de tâches de T , elle est de développer et valider une praxéologie relative à T . Ce détour par rapport à la pratique et ses contraintes, ce délai par rapport à ses rythmes, n'est pas l'apanage de la science. Ainsi la recherche technique, pourtant prioritairement intéressée par la pratique et le développement des techniques (alors que la science a d'abord des visées épistémiques), se donne le temps d'une validation organisée et systématique de ses inventions. Ce faisant, elle développe une technologie, laquelle peut être exclusivement expérimentale : en résistance des matériaux par exemple, de très nombreuses formules en jeu dans le bâtiment résultent de processus de modélisation-vérification expérimentale en laboratoire. $[T, \tau, \theta^r, \Theta]$ est une généralisation de la notion d'épure praxéologique considérée précédemment, θ^r étant composée de savoirs validés selon les normes en vigueur dans I_r . D'autres institutions I_u reconnaissent la validation réalisée par les institutions de recherche et s'approprient les praxéologies produites pour les utiliser. Elles développent des savoirs technologiques pratiques θ^p qu'elles valident pour elles-mêmes. Remarquons que le travail praxéologique de I_r peut dans certains cas s'appuyer sur des praxéologies $[T, \tau, \theta^p, -]$ développées dans des institutions ayant affaire à T .

Les exemples présentés ont montré que l'utilisation d'une épure praxéologique dans une institution I_u pouvait avoir des effets transpositifs sur les quatre composantes de cette épure, bloc $[\theta^r, \Theta]$ compris, les évolutions étant soumises à de nouveaux processus de validation impliquant transactions entre les institutions concernées, confrontation/conciliation entre des normes différentes, au sein d'une institution spécifique notée I_r^* , qu'il paraît raisonnable de qualifier de noosphérienne. Ceci aboutit à un dernier modèle, où le symbole * exprime l'existence d'une transposition de la praxéologie initiale :

$$I \rightarrow \left[\begin{array}{c} T^*, \tau^* \\ \theta^r, \Theta^* \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow I_r^* \square I_r \\ \leftarrow I_u \end{array}$$

Figure 5 – un modèle pour guider l'étude des effets transpositifs de la circulation praxéologique

REFERENCES

- Castela C. (2011) *Des mathématiques à leurs utilisations, contribution à l'étude de la productivité praxéologique des institutions et de leurs sujets. Le travail personnel au cœur du développement praxéologique des élèves en tant qu'utilisateurs de mathématiques*. Note de synthèse présentée en vue de l'Habilitation à Diriger des Recherches. Paris : Université Paris Diderot.
- Castela C. (2008) Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 28(2), 135-182.
- Castela C., Romo Vázquez A. (2011) Des mathématiques à l'automatique : étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 31(1), 79-130.
- Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(2), 221-266.
- Dorier J.-L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Floris R. (Eds) (2001) *Actes de la 11ème école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.
- Robert A., Robinet J. (1996) Prise en compte du méta en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 16(2), 145-176.
- Rogalski M. (2006) Mise en équation différentielle et mesure des grandeurs. Un point de vue mathématique sur la collaboration avec la physique. *Repères IREM* 64, 27-48.
- Romo Vázquez A. (2009) *La formation mathématique des ingénieurs*. Thèse de doctorat. Université Paris Diderot.
- Schoenfeld A. H. (1985) *Mathematical Problem Solving*. Orlando, FL : Academic Press.
- Schwartz L. (1950) *Théorie des distributions Tome 1*. Paris : Hermann.