JULES HOUËL : UN MATHEMATICIEN PEDAGOGUE DU XIX^{e} SIECLE POUR LEQUEL UNE APPROCHE HISTORIQUE EST INDISSOCIABLE D'UN FONDEMENT RIGOUREUX DES MATHEMATIQUES. EXEMPLE DES « QUANTITES COMPLEXES »

François PLANTADE*

Résumé – Jules Houël (1823-86) enseigna l'analyse réelle et complexe à la faculté des sciences de Bordeaux de 1859 à 1884. Houël était un professeur très soucieux de ses enseignements, reconnu en tant que pédagogue en France comme en Europe, qui, avant d'enseigner un sujet, l'étudiait le plus profondément possible. Il rédigeait en détails ses cours et les publia chez Gauthier-Villars. La *Théorie élémentaire des quantités complexes* (1867) débute par des considérations générales sur l'algèbre et par un historique assez précis de la représentation géométrique des « quantités complexes ». Nous nous référons à la question 1 du GT4, Houël étant un exemple vivant de la maxime d'Auguste Comte, affirmant qu'on ne peut connaître une discipline sans en connaître son histoire.

Mots-clefs : Enseignement des mathématiques, Analyse complexe, Historique, Représentation géométrique, Jules Houël

Abstract – Jules Houël (1823-86) taught real and complex analysis at the Bordeaux Sciences Faculty from 1859 to 1884. Houël was a really zealous teacher and well-know in France and Europe: before teaching a subject, he studied it in details. He wrote down his courses, which he published at Gauthiers-Villars. The *Théorie élémentaire des quantités complexes* (1867-73) begins with general considerations about algebra and a historical presentation of the geometric represensation of the « complex quantities ». We are refering to the question 1 of the GT4: Houël was a being example of the Auguste Comte's motto, which claimed that one can't know a disciplin without knowing its history.

Keywords: Mathematics teaching, Complex analysis, Historic, Geometric representation, Jules Houël

I. INTRODUCTION

Jules Houël (1823-1886) a fait l'objet d'études dans (Gispert 1987) et (Neuenschwander 1984) à travers notamment les lettres de Gaston Darboux et dans (Boi, Giacardi et Tazzioli 1998) à travers celles d'Eugenio Beltrami. Dans sa correspondance avec Darboux, Houël est présenté comme co-éditeur du *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, polyglotte et connaissant bien les mathématiques européennes. Dans sa correspondance avec Beltrami, Houël est présenté notamment comme diffuseur des géométries non-euclidiennes en France et en Europe.

Nous proposons de nous intéresser à une autre facette de Houël : celle de l'enseignant. Cette facette est fondamentale car c'est en vue de préparer ses cours que Houël étudia en détails la géométrie euclidienne (Houël 1867) et qu'il fut convaincu de l'existence (Houël 1871) puis de l'intérêt des géométries non-euclidiennes ; de même, c'est en vue de rédiger ses cours sur les « quantités complexes », qu'il en réécrivit les fondements ainsi que l'historique : comme il l'écrivit à son lointain cousin Charles Berger – mathématicien lui aussi, le 12 janvier 1867[1] :

> Je m'occupe en ce moment des imaginaires, dont je tâche d'asseoir la théorie élémentaire sur des bases simples, claires et solides. Je rédige quelques considérations sur l'historique de la question.

Nous nous référons à la première question du groupe de travail 4, à savoir :

---

* IREM de Basse-Normandie, Université de Nantes – France – fplantade@wanadoo.fr

[1] Lettre du fonds Houël, de la bibliothèque de Caen-la-mer situé à Caen, avenue Albert Sorel.

© Plantade F. (2012) Jules Houël : un mathématicien pédagogue du XIX^{e} siècle pour lequel une approche historique est indissociable d'un fondement rigoureux des mathématiques. Exemple des « quantités complexes ». In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21^{e} siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT4, pp. 653–662). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Quels sont les fondements épistémologiques et didactiques qui sous-tendent l'introduction des dimensions historique et culturelle dans l'enseignement des mathématiques ?

En effet, Houël constitue, à notre sens, un exemple « vivant » de la pensée d'Auguste Comte, pour lequel « on ne connaît pas une science complètement tant qu'on n'en connaît pas l'histoire » (Comte 2001). Nous souhaitons montrer que Houël ne pouvait enseigner des sujets non approfondies ou des choses peu claires : pour lui, l'historique des notions et leur « fondement » étaient indissociables de l'enseignement des mathématiques « techniques ». Pour ce faire, nous présenterons Jules Houël et le traité *Théorie élémentaire des quantités complexes* et analyserons l'introduction de l'*Algèbre des quantités complexes*, qui forme le premier volume de ce traité.

II. A PROPOS DE JULES HOUËL

Figure 1 *– Jules Houël vers 1880*

Jules Houël (1823-86), issu d'une ancienne famille normande protestante, étudia les mathématiques à l'Ecole normale supérieure de 1843 à 1846 ; ayant échoué à l'agrégation en 1846 – qu'il obtint l'année suivante –, Houël commença à enseigner en lycée. Il exerça notamment dans les lycées de Bourges (1847), de Pau (1848 et 1849), de Bordeaux (1850) et Alençon (1851 et 52). En 1852, il prit un congé sans solde pour poursuivre ses recherches mathématiques et astronomiques, qui aboutirent en 1855, à la soutenance en Sorbonne de deux thèses, l'une en mécanique et l'autre en astronomie (Houël 1855). Cauchy, qui faisait partie du jury des thèses de Houël, montra un réel enthousiasme à leur sujet. Houël ambitionnait de travailler en astronomie mais ne put entrer[2] à l'Observatoire de Paris. Finalement Houël prit la succession de V. A. Le Besgue à la chaire de mathématiques pures

[2] D'après la famille de Houël, U. Le Verrier alors directeur de l'Observatoire de Paris et normand d'origine, l'aurait empêché d'y entrer. L'information reste encore à vérifier.

de la faculté des sciences de Bordeaux en 1859 où il enseigna jusqu'en 1884, année à laquelle il prit sa retraite en raison de problèmes de santé.

Houël anima activement la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Il en fit la promotion, de sorte qu'en 1867[3], « presque tous les mathématiciens de Bordeaux y étaient inscrits ». Il publia de nombreux articles mathématiques, historiques ou traductions dans les *Mémoires* de ladite Société, notamment à propos de géométries non euclidiennes[4]. De 1864 à 1872, Houël fut archiviste de la Société et en développa considérablement l'activité et les contacts. En 1872, la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux comptait plus d'une centaine de contacts parmi des sociétés savantes du monde entier.

Houël était un polyglotte : d'après le mathématicien P. Barbarin (1927), il connaissait à la fin de sa vie « toutes les langues de l'Europe », bien qu'il n'eût pas voyagé en dehors de la France. Il traduisit, par exemple : de l'allemand, des articles de Lejeune-Dirichlet, de Riemann, de Balzer, de Lobatchevski[5], de Lipschitz ; du suédois, des articles de Mittag-Leffler sur les fonctions elliptiques ; du hongrois, l'opuscule de J. Boliay sur la géométrie non-euclidienne ; du russe, certains articles de Lobatchevski, d'Imschenetski, de Bougaïev ; du norvégien, *La vie d'Abel* de C. A. Bjerknes, de l'italien la *Théorie des équipollences* de Bellavitis.

Houël fut en contact épistolaire avec de nombreux mathématiciens européens ; en voici quelques exemples. En France, il correspondit avec Ch. Berger, Bourget, Darboux, Hermite, Laisant, Lefoy ; en Italie, Bellavitis, Beltrami, Cremona, Forti ; en Allemagne, Balzer, Borchard, Günther, Klein, Lipschitz, Ohrtmann ; en Scandinavie, Bjerknes, Dillner, Lie, Lindelöf, Mittag-Leffler, Zeuthen ; en Belgique, De Tilly, Mansion ; en Bohême, Durège, les frères Emil et Eduard Weyr ; en Russie, Imschenetski.

Houël fut de 1870 à 1882 environ co-éditeur avec Darboux du *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, journal fondé sous la direction de la Commission des hautes études – présidée par Chasles – avec le soutien du Ministère de l'instruction publique dans le but de diffuser[6] les nouvelles idées mathématiques venues d'Allemagne notamment, en France (Gispert 1987). Le polyglottisme et l'ouverture d'esprit mathématique de Houël furent les principales motivations de ce choix. Le *Bulletin* perdura jusqu' environ la deuxième guerre mondiale.

III. LA *THEORIE ELEMENTAIRE DES QUANTITES COMPLEXES*

Houël enseigna l'analyse réelle et complexe à Bordeaux. Le nombre d'étudiants en licence de mathématiques était faible, mais à peu près constant : probablement environ deux ou trois chaque année[7], d'après (Zerner 2001, p. 22). Pour Houël, le nombre d'étudiants n'avait rien à voir avec la qualité de son cours : il se devait être le plus complet possible. De plus, au lieu de faire deux leçons par semaine comme c'était la règle, il en faisait cinq, comme il l'expliqua à Mittag-Leffler, dans sa lettre du 13 septembre 1874. Houël, avant de professer un cours, en étudiait toutes les facettes afin d'en choisir la manière la plus adaptée à ses étudiants et cependant rigoureuse. C'est ainsi que lorsque Houël dut enseigner les fonctions elliptiques –

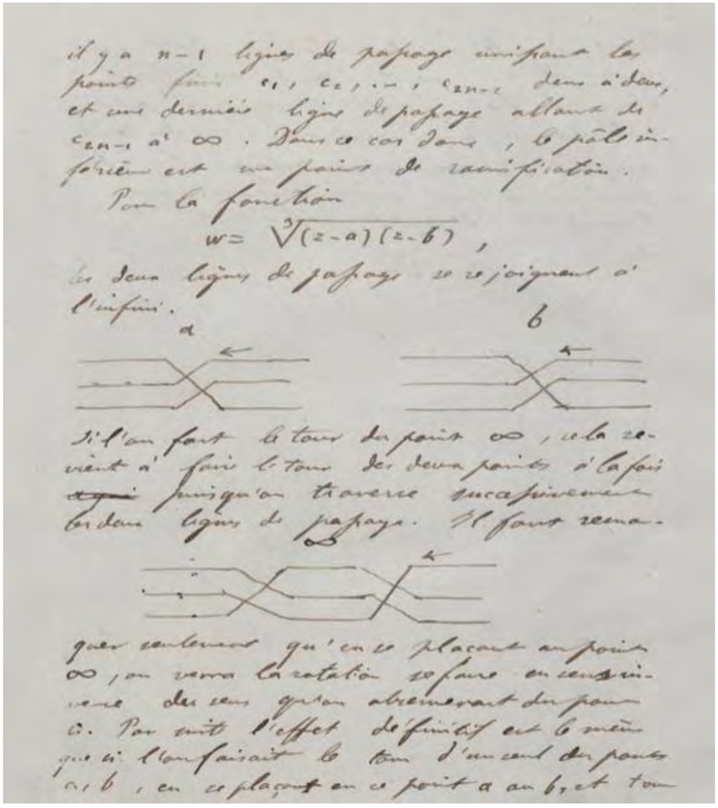
[3] Il l'expliqua à Charles Berger dans la lettre du 12 janvier 1867 déjà citée dans l'introduction.
[4] Sur la vie et les œuvres de N. Lobatchevski, par exemple.
[5] La plupart des mémoires de Lobatchevski étaient en allemand.
[6] Après la guerre franco-prussienne de 1870 et les succès de l'école analytique française du début du XIXe siècle, les mathématiciens français avaient tendance à dédaigner les sciences allemandes pourtant florissantes dans la deuxième moitié du XIXe siècle.
[7] En moyenne. Ces résultats sont à préciser cependant.

suite au changement de programme de 1877 –, il demanda de l'aide à Mittag-Leffler qui en était un spécialiste. Ils échangèrent durant plusieurs mois sur la manière la plus élémentaire de les présenter (Mittag-Leffler 1872-83, lettres de janvier 1877 à 1878).

La *Théorie élémentaire des quantités complexes* est un traité en quatre volumes :

1. *Algèbre des quantités complexes* (1867) ;
2. *Théorie des* fonctions *uniformes* (1868) ;
3. *Théorie des* fonctions *multiformes* (1869) ;
4. *Théorie des* quaternions (1873).

Dans la première partie, sont définies les « quantités complexes » de manière géométrique, puis toutes les propriétés classiques à notre époque ainsi que les fonctions exponentielles et logarithmes y sont présentées avec une démonstration. Dans la deuxième partie, figurent les définitions de continuité, dérivabilité, de points singuliers et la théorie des résidus de Cauchy avec des exemples détaillés. Dans la troisième partie, la théorie de Riemann est exposée – des « surfaces de Riemann » avec de nombreux croquis. Dans la quatrième partie, les quaternions sont introduits *via* les équipollences de Bellavitis et traités de manière géométrique exclusivement.


il y a $n-1$ lignes de passage unissant les points finis $c_1, c_2, \ldots, c_{2n-2}$ deux à deux, et une dernière ligne de passage allant de c_{2n-1} à ∞. Dans ce cas donc, le pôle inférieur est un point de ramification.

Pour la fonction

$$w = \sqrt[3]{(z-a)(z-b)},$$

les deux lignes de passage se rejoignant à l'infini.

a b

S'il l'on fait le tour du point ∞, cela revient à faire le tour des deux points à la fois ~~et qui~~ puisqu'on traverse successivement les deux lignes de passage. Il faut remarquer seulement qu'en se plaçant au point ∞, on verra la rotation se faire en sens inverse du sens qu'on observerait du point a. Par suite l'effet définitif est le même que si l'on faisait le tour d'un seul des points a, b, en se plaçant en ce point a ou b, et tou

Figure 2 *– Exemple de note de cours sur les fonctions multiformes rédigée par Houël*[8]

Les cours de Houël furent, à l'origine, publiés à Bordeaux sous forme autographiée ; rapidement épuisés, il fut décidé de les publier sous forme typographié chez Gauthier-Villars à Paris. Houël reprit[9] le contenu de la *Théorie élémentaire des quantités complexes*– hormis la partie sur les quaternions – dans son *Cours de calcul infinitésimal* auquel il adjoignit une

[8] Bibliothèque de Caen-la-mer.
[9] Il y a toute la partie analyse réelle en plus, bien entendu.

partie sur les fonctions elliptiques. Ces deux traités eurent un très bon écho en France et en Europe.

Ainsi dans sa première lettre, datée du 15 juin 1872, adressée à Houël, Mittag-Leffler écrivit :

> Tout d'abord, je vous prie de me permettre de vous présenter mes humbles et respectueux remerciements pour la connaissance des quantités complexes que j'ai pu acquérir à la lecture de votre œuvre exhaustive et géniale *Théorie Élémentaire des Quantités Complexes*.

Darboux fit également l'éloge des traités de Houël à plusieurs occasions dans le *Bulletin* ; le mathématicien Rubini fut également enthousiaste (Zerner 2001, p. 22). Les qualités de ces traités sont, selon ces derniers : la rigueur, l'exhaustivité, la clarté et la concision[10]. En effet, la *Théorie élémentaire des quantités complexes* traite des fondements des « quantités complexes », de toutes les propriétés nécessaires pour travailler sur les fonctions d'une variable complexe ; les fonctions d'une variable complexe sont également étudiées en définissant les propriétés les plus élémentaires – continuité, dérivabilité, points singuliers, intégrales curvilignes – pour en arriver aux résidus et aux « surfaces de Riemann » ; la partie sur les quaternions généralise la notion de « quantités complexes » dans l'espace, dont les applications sont multiples. Tous les résultats énoncés sont démontrés ; des exemples fondamentaux et pédagogiques sont régulièrement donnés. Cependant, les différentes parties ne sont pas très longues : 64 petites pages pour la première par exemple, les suivantes étant un peu plus longues. Remarquons que la numérotation en petits paragraphes, indépendante des chapitres rend le référencement très simple. Nous analysons plus en détails le début de l'*Algèbre des quantités complexes* – premier volume du traité – pour étayer notre propos.

IV. PRESENTATION DE L'INTRODUCTION DE L'*ALGEBRE DES QUANTITES COMPLEXES*

Le premier chapitre de l'*Algèbre des quantités complexes*, qui en constitue l'introduction, est formé de deux parties : une première partie intitulée *Considérations générales* qui comprend 6 paragraphes – sur 4 pages – et une deuxième partie intitulée *Sur l'histoire de la théorie géométrique des imaginaires* qui comprend 11 paragraphes – sur 6 pages.

Au début de l'introduction, Houël explique que l'algèbre est très abstraite et qu'en fait, on peut la fonder géométriquement – à condition d'en faire une interprétation adéquate : en suivant les traces de Descartes :

> Une des plus grandes difficultés qu'éprouvent les commençants, en abordant l'étude de l'algèbre, c'est l'usage que l'on y fait de notions mystérieuses en apparence, comme celles des quantités négatives et des quantités imaginaires. Les géomètres qui ont assis sur des bases inébranlables les règles du calcul de ces symboles ont rendu un immense service à la philosophie mathématique. On peut cependant ne pas se trouver encore pleinement satisfait de leurs démonstrations, qui sont d'une rigueur inattaquable, sans doute, mais qui laissent subsister dans les mathématiques des symboles de quantités et des signes d'opérations qui semblent correspondre à rien de réel. (paragraphe 1) [...]
>
> On aura donc obtenu un avantage important, si l'on parvient à démontrer les mêmes règles avec la même rigueur, sans introduire dans les raisonnements autre chose que des quantités réelles et mesurables, sur lesquelles on exécutera des opérations nettement définies, mais plus générales que les opérations simples de l'arithmétique. De cette manière, au lieu d'arriver au résultat par une route certaine, mais obscure, dans laquelle un esprit timide peut craindre à chaque instant de s'égarer, on passera par une suite de déductions claires, et l'on pourra suivre des yeux toutes les phases du calcul. (paragraphe 2)

---

[10] Mittag-Leffler fit l'éloge de la concision de Houël en comparaison avec l'ouvrage de (Neumann 1867), qui comprend plus de six cents pages et n'est pas plus riche que celui de Houël.

Ensuite, Houël explique la notion d'opération algébrique – un peu à la manière de H. G. Grassmann dans sa *Théorie des formes* précédant l'*Ausdehnungslehre* de 1844, quoique briévement.

> L'algèbre s'occupe uniquement de la combinaison des opérations, sans s'inquiéter de leur signification ni de leur nature. Elle donne les moyens de remplacer une combinaison d'opérations par une autre combinaison équivalente ; mais elle ne traite nullement de la manière d'effectuer ces opération. […] Par exemple, rien n'empêchera d'appeler *addition* la composition des forces, et de dire que la résultante est égale à la *somme* des composantes ; car la somme, ainsi définie, jouit de la propriété de ne pas changer lorsqu'on intervertit l'ordre de ses parties. (paragraphe 4)

Puis, Houël introduit les nombres complexes comme permettant la résolution de nouveaux problèmes :

> Il faut distinguer, en outre, entre l'impossibilité absolue d'un problème, et l'impossibilité de tel ou de tel cas de ce problème, lorsqu'il en peut présenter plusieurs. C'est dans ce dernier cas seulement que l'on peut faire disparaître l'impossibilité par la généralisation des opérations. (paragraphe 5) [...]

> Cette généralisation s'obtient en remplaçant les définitions arithmétiques des quantités et des opérations par des définitions géométriques. C'est ce que l'on a fait, depuis Descartes, pour les quantités négatives. Mais c'est plus tard seulement que l'on a cherché à représenter géométriquement les quantités imaginaires par des grandeurs réelles. Leur théorie purement algébrique n'a guère été fixée que depuis un siècle, après les travaux de d'Alembert et d'Euler, et c'est plus récemment encore que Cauchy y a mis la dernière main. (paragraphe 6)

Dans la deuxième partie, Houël donne dans l'ordre chronologique, les mathématiciens qui ont travaillé sur la question de la « représentation géométrique des imaginaires ».

Le premier est le prussien H. Kühn au XVIII^{e} siècle même s'il n'a pas abouti à la représentation actuelle des complexes :

> Le premier essai de représentation géométrique des quantités imaginaires est dû au géomètre prussien Heinrich Kühn, né à Königsberg en 1690, mort à Dantzig en 1789. Kühn a publié, en 1750 dans le tome III des *Novi Comentarii* de l'Académie de Saint-Pétersbourg, dont il était membre, un Mémoire de 54 pages in-4°, intitulé : *Meditationes de quantibus imaginariis construendis et radicibus imaginariis exhibendis*. Ce travail, que Montucla traite peut-être avec trop de dédain, ne contient pas, il est vrai, la solution de la difficulté, que l'auteur avait aperçue ; mais il a, du moins, le mérite d'avoir mis sur la voie, et il restait bien peu de chose à ajouter pour obtenir la représentation des imaginaires telle qu'on la conçoit aujourd'hui. (paragraphe 7)

Dans le paragraphe 8, Houël précise les idées de Kühn : sur deux axes orthonormés, il place les points A (a ; a), B (-a ; a), C (a ; -a) et D (-a ; -a) et trace les quatre carrés dont un sommet est l'origine et les trois autres parmi A, B, C, D. Il calcule les quatre aires orientées α, β, γ, δ comme sur la figure 3 ci-dessous :

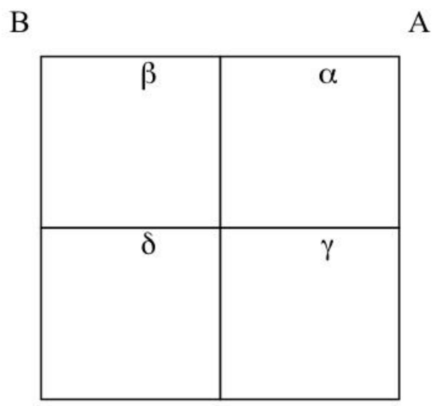


***Figure 3** – Représentation géométrique des quantités complexes par H. Kühn*

Il arrive ainsi à représenter d'une certaine manière la « racine carrée de $-a^2$ » :

> L'imaginaire plus ou moins racine de $-a^2$, qui exprime l'une ou l'autre des racines de l'équation $x^2 + a^2 = 0$, est définie par Kühn comme le côté de l'un des carrés négatifs β ou δ. Mais l'auteur n'indique pas lequel des côtés du carré il faut prendre pour représenter l'imaginaire, et faute d'avoir fait entrer dans cette représentation la notion de direction, il lui devient impossible de définir ce qu'il faut entendre par somme d'une quantité réelle et d'une quantité imaginaire.[...] il a posé le problème sans le résoudre et la lecture de son Mémoire aurait pu mettre ses successeurs sur la voie de la solution. (paragraphe 9)

Ensuite, Houël reprend son historique par une remarque sur H.-D. Truel et A. Normand, cités par Cauchy :

> Pendant le demi-siècle qui suivit la publication du travail de Kühn, la question fut à peu près abandonnée. Nous lisons seulement dans une Note de Cauchy[11], la mention suivante, à propos des travaux dont nous parlerons tout à l'heure :
>
> « Une grande partie des résultats de ces recherches avait été, à ce qu'il paraît, obtenue, même avant le siècle présent, et dès l'année 1786, par un savant modeste, M. Henri-Dominique Truel, qui, après les avoir consignés dans divers manuscrits, les a communiqués, vers l'année 1810, à M. Augustin Normand, constructeur de vaisseaux au Havre ». (paragraphe 10)

et également l'abbé Buée :

> Le premier Mémoire publié sur ce sujet, depuis la tentative de Kühn, est celui de l'abbé Buée, inséré dans les Philosophical Transactions pour l'année 1806, et intitulé : *Mémoire sur les quantités imaginaires* (56 pages). Dans ce travail, Buée formule nettement, pour la première fois, la représentation des lignes imaginaires par des longueurs perpendiculaires à la direction des lignes réelles.[...] Si juste cependant que soit la solution donnée par Buée, on ne peut nier qu'elle ne repose sur des arguments plus métaphysiques que mathématiques, et sur une extension mal justifiée des règles du calcul algébrique. Aussi son travail n'a-t-il pas attiré l'attention qu'il aurait méritée, malgré quelques erreurs qui le séparent. (paragraphe 11)

Houël arrive au début du XIXe siècle de son historique et à Argand (1806), dont le nom est couramment associé à la représentation géométrique des complexes actuellement :

> Dans la même année 1806, Robert Argand, de Genève, fit imprimer à Paris un opuscule intitulé : *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. Cet ouvrage, sans nom d'auteur, n'a pas été mis dans le commerce. Nous le connaissons par un extrait qu'en a donné l'auteur dans les *Annales de Gergonne* (t. IV, 1813), et par une note de Cauchy[12]. Argand établit d'abord, en suivant la méthode de Buée, la représentation de racine de -1 par une longueur portée dans une direction perpendiculaire à celle des lignes réelles. Il généralise cette conception, en introduisant la représentation, par un symbole unique, d'une ligne considérée à la fois en grandeur et en direction. Il définit comme nous le ferons plus tard, les opérations de multiplication et d'addition effectuées sur les lignes dirigées […] Il établit ainsi la formule $1_p.1q = 1_{p+q}$ qui n'est autre chose que la formule de Moivre, et il en déduit toutes les formules de trigonométrie. Argand termine son Mémoire en exposant géométriquement la démonstration par Legendre de la proposition fondamentale de la théorie des équations algébriques : Toute équation algébrique, à coefficients réels ou imaginaires, a au moins une racine représentée sur une ligne dirigée, c'est-à-dire une racine réductible à la forme a + b racine de (-1). (paragraphe 12)

et à Français, qui eut une influence non négligeable :

> Les communications d'Argand avaient eu lieu à l'occasion d'un article publié dans le même recueil scientifique par J.-F. Français, professeur à l'Ecole d'Artillerie de Metz. Celui-ci, d'après quelques indications qui lui étaient parvenues sur les idées d' Argand, sans qu'il en connût l'auteur, avait réussi à en retrouver les principaux résultats, et en avait fait l'objet d'une Note[13], à la suite de laquelle Argand réclama la priorité. On remarque dans la Note de Français, le premier emploi de la notation r_p, pour désigner une ligne de longueur r et faisant avec un axe fixe l'angle p, notation très simple, que Cauchy a fini par adopter. (paragraphe 13)

[11] (Cauchy 1840)
[12] Ibid.
[13] (Français 1816)

Enfin, Houël cite Mourey et Warren qui reprirent les idées d'Argand, de manière un peu compliquée :

> Parmi les auteurs qui, depuis Argand jusqu'à Cauchy, ont traité le même sujet, nous citerons seulement Mourey et Warren, dont les travaux ont paru dans la même année 1828. Mourey, dans une brochure qui a pour titre : La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires dédié aux amis de l'évidence, et qui a été réimprimée en 1861, développe complètement les règles de calcul des lignes dirigées, et donne une nouvelle démonstration de la proposition fondamentale de la théorie des équations. Malheureusement, la lecture de ce travail remarquable est rendue difficile par une profusion de termes nouveaux et de notations bizarres, le plus souvent inutiles. (paragraphe 14) [...]
>
> John Warren, fellow à l'Université de Cambridge, puis passeur à Huntingdon, a fait imprimer une brochure intitulée : A Treatise on the geometrical representation of the square roots of negative quantities. Cambridge, 1828 (154 pages grand in-8°). […] Le travail de Warren est plus complet et plus étendu que l'opuscule de Mourey. La discussion des racines de l'unité y est faite avec soin. L'auteur termine par une démonstration des principales formules de la trigonométrie, et par diverses applications au calcul intégral et à la mécanique. (paragraphe 15)

Pour conclure son approche historique, précise que Cauchy s'est inspiré de Warren et Mourey pour parfaire la théorie des « quantités complexes » :

> Les deux ouvrages que nous venons de citer renferment complètement la théorie élémentaire de la représentation géométrique des imaginaires, ou, si l'on veut, de la représentation par un symbole imaginaire d'une droite quelconque tracée dans un plan. Cette théorie a été reprise et coordonnée par Cauchy, dans le tome IV de ses *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique* (pp. 157-355), et l'on peut dire maintenant qu'elle a reçu sa forme définitive. (paragraphe 16)

Houël cite également d'autres travaux sur ces thèmes sans les préciser :

> Il n'entre pas dans notre plan de traiter des applications à la géométrie pure et à la mécanique qu'a reçues la théorie dont nous nous occupons. Nous nous contenterons de mentionner les travaux de Scheffler[14] sur l'usage des imaginaires en géométrie analytique, et le mémoire de Siebeck[15] sur les transformations géométriques déduites de la théorie des imaginaires. Nous ne pouvons non plus nous occuper du travail considérable publié par M. Maximilien Marie sur les fonctions de variables imaginaires[16], ce travail étant fondé sur un système de représentations des imaginaires essentiellement différent de celui qu'ont adopté Cauchy et Riemann. (paragraphe 17)

V. CONCLUSION

L'introduction de l'*Algèbre des quantités complexes* est très intéressante d'un point de vue pédagogique – de nos jours -, quoique parfois trop rapide dans les explications – certaines phrases sur l'algèbre auraient sans doute mérité quelques précisions. Houël y explique d'une part que les « quantités complexes » ont été, au XVIIIe siècle, présentées par d'Alembert et Euler notamment, comme permettant de lever « l'impossibilité de certains problèmes » : dans la résolution d'équations algébriques. D'autre part, Houël comprend la difficulté des commençants en algèbre du fait de « l'usage que l'on y fait de notions mystérieuses en apparence, comme celles des quantités négatives et des quantités imaginaires ». Pour rendre tangibles ces notions, à la suite de Descartes, il en donne une interprétation géométrique, ce qui permet aux commençants d'avoir un support visuel et géométrique. Enfin, Houël en donne un aperçu historique assez détaillé, comme un petit article d'histoire des mathématiques : il y détaille les idées de Kühn, d'Argand et Français, cite d'autres personnages ayant une importance mais peu connus comme Truel, Normand, Buée puis d'autres mathématiciens plus récents comme Warren et Mourey, Cauchy. Il cite également ses sources historiques : Cauchy, Montucla, Minizka (1850). Ce ne sont donc pas juste quelques phrases sur

[14] (Scheffler 1851).
[15] (Siebeck 1858).
[16] (Maximilien 1858-1862).

l'historique de la question mais bel et bien les méandres et dédales de la notion,qui n'est donc pas si évidente que cela. Dans la fin de cet aperçu, Houël cite d'autres travaux sur les fonctions à variable complexe et même un travail original de M. Marie qui en a fait une théorie sans le formalisme de Cauchy-Riemann. On voit à quel point, Houël a fait « le tour » du sujet avant de l'enseigner. Houël aspire à l'exhaustivité car cela fait partie du sujet : l'historique ainsi que la tangibilité et la rigueur sont indissociables du sujet lui-même.

REFERENCES

Argand R. (1806) *Essai sur une manière de représenter les Quantités Imaginaires dans les Constructions Géométriques*. Réed (1874, 1971) Préface par J. Hoüel ; introduction de J. Itard. Paris : Blanchard.

Barbarin P. (1926) La correspondance entre Houël et De Tilly. *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* 50(2), 50-62 et 74-88.

Beltrami E. (1998) *La découverte de la géométrie non euclidienne sur la pseudosphère*. *Les lettres d'Eugenio Beltrami à Jules Houël (1868-81)*. Introduction, notes et commentaires critiques par L. Boi, L. Giacardi, R. Tazzioli. Préface de C. Houzel et E. Knobloch. Paris : Albert Blanchard.

Cauchy A.-L. (1840) *Exercices d'analyse et de physique mathématique*. Tome IV. Paris : Mallet-Bachelier.

Comte A. (2001) *Cours de philosophie positive*. Charleston : BookSurge.

Français J.-F. (1816) Nouveaux principes de géométrie de position, et interprétation géométrique des symboles imaginaires. *Annales de mathématiques pures et appliquées* 4, 61-71.

Gispert H. (1987) La correspondance de G. Darboux avec J. Houël. Chronique d'un rédacteur (déc. 1869 - nov. 1871). *Cahiers du séminaire d'histoire des mathématiques* 8, 67-202.

Grassmann H. G. (1994) *La Science de la Grandeur extensive*. Flament D. (Trad.) Paris : Blanchard.

Houël J. (1855) *Sur l'intégration des équations différentielles dans les problèmes de mécanique.* Paris : Mallet- Bachelier.

Houël J. (1855) *Sur le développement en fonctions périodiques de la fonction perturbatrice de Jupiter.* Paris : Mallet-Bachelier.

Houël J. (1867) *Essai critique sur les principes fondamentaux de la géométrie élémentaire ou commentaire sur les XXXII premières propositions d'Euclide.* Paris : Gauthier-Villars.

Houël J. (1869) *Sur le calcul des équipollences (Méthode d'analyse géométrique de M. Bellavitis).* Paris : Gauthier-Villars.

Houël J. (1871) *Sur l'impossibilité de démontrer, par une construction plane, le principe de la théorie des parallèles du postulatum d'Euclide.* Paris : Gauthier-Villars.

Houël J. (1878-1881) *Cours de calcul infinitésimal*. Paris : Gauthier-Villars.

Houël J. (1867-1873) *Théorie élémentaire des quantités complexes* (quatre tomes). Paris : Gauthier-Villars.

Lespiault G. (1887) *Notice sur Guillaume-Jules Houël* (Extrait du *Mémorial de l'Association des anciens élèves de l'Ecole Normale*). Versailles : Cerf.

Maximilien M. (1858-1862) Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires. *Journal de mathématiques pures et appliquées (Journal de Liouville).*

Matzka W. (1850) *Versuch einer richtigen Lehre von der Realität der vorgeblich imaginären Grössen der Algebra u. s. w.* Prague.

Neuenschwander E. (1984) *Die Edition Mathematischer Zeitschriften im 19. Jahrhundert und ihr Beitrag zum Wissenschaflichen Austausch zwischen Frankreich und Deutschland*. Göttingen: Mathematisches Institut der Universität Göttingen.

Neumann C. (1865) *Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale*. Leipzig: B. G. Teubner.

Scheffler H. (1851) *Der Situationskalkul*. Braunschweig: F. Vieweg und Sohn.

Siebeck P.(1858) Über die graphische Darstellung imaginärer Funktionen. *Journal de Crelle* 4, 221-253.

Stubhaug A. (2006) *Gösta Mittag-Leffler: a man of conviction.* Nunnaly T. (Trad.) Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag.

Zerner M. (2008) *La transformation des traités d'analyse (1870-1914)*. http://hal-unice.archives-ouvertes.fr/hal-00347740/fr/