L'EXPERIENCE MATHEMATIQUE

Maryvonne MENEZ *

Résumé – Le but de cet article est de fédérer les différentes pratiques et recherches qui font de l'enseignement des mathématiques un lieu où rigueur et passion vont de pair, où « faire le programme » va de pair avec un enrichissement de chacun. Pour cela , il me paraît nécessaire de croiser les travaux de la Commission inter-IREM (Institut de recherche de l'enseignement des mathématiques) « Épistémologie et histoire des mathématiques », de la Commission inter-IREM « Premier cycle » (élèves de 10-15 ans), des travaux de didactique des IREM, des réflexions philosophiques sur les apprentissages, comme des recherches en psychanalyse dans les départements de sciences de l'éducation.

Mots-clefs : histoire, épistémologie, philosophie, narration de recherche, débat scientifique

Abstract – The aim of this article is to combine the different practices and researches which made the teaching of mathematics a place where rigor and passion walk together, where « follow the program » walk together with the enrichment of every one. For that, it seems to me necessary to mutually refer to the works of the Commission inter-IREM (Institute of research for the teaching of mathematics) « Epistemology and history of mathematics », the Commission inter-IREM « First cycle » (pupils 10-15years old), the works of didactic in the irem, the philosophic ideas on learning, as well as psychoanalytic research conducted in the departments of sciences of education.

Keywords: history, epistemology,philosophy, research tale, scientific debate

> On devient stupide dès qu'on cesse d'être passionné. (Helvetius 1758, p. 315)
>
> L'homme naît ignorant mais il ne naît point sot, et ce n'est pas sans peine qu'il le devient. Pour être tel et parvenir à éteindre en soi jusqu'aux lumières naturelles il faut de l'art et de la méthode ; il faut que l'instruction ait entassé en nous erreur sur erreur. (Helvetius 1773, p. 6)

Le titre « l'expérience mathématique » fait référence à Jean Cavaillès qui s'est longuement interrogé sur le sens que peut prendre cette expression et qui pour cela s'est réclamé « du patronage de Spinoza » dans une lettre à son père du 24 juillet 1938 (Ferrières 1950 p. 126) ; il entend par expérience « un système de gestes, gouverné par une règle et soumis à des conditions indépendantes de ces gestes » (Cavaillès 1994, p. 601). Sa phrase « comprendre une théorie, c'est en attraper le geste et pouvoir continuer » (Cavaillès 1981, p. 178) fut souvent reprise dans son contexte et en dehors de lui et c'est bien de ce « attraper » et de ce « continuer » que se réclame Gilles Châtelet en approfondissant la notion de geste :

> ce concept de geste est crucial pour approcher le mouvement d'abstraction amplifiante des mathématiques… ce geste réveille en nous d'autres gestes… il décide, libère et propose une autre modalité du « se mouvoir »…on se pénètre du geste avant de le savoir. (Châtelet 1993, p .27)

Le geste concerne le corps, l'être en son entier, le sensible et l'intelligible, et est donc indissolublement lié au désir, désir de comprendre, désir d'apprendre, désir de grandir.

S'il n'y a pas eu gestes de numérisation, par exemple, l'individu calcule comme un automate, ou est dyscalculique ; si cette phase a lieu, il reste une mémoire du corps et une mémoire procédurale des habiletés motrices. Et ces gestes, nés dans l'apprendre, ayant leur origine dans la personne lui permettent d'inventer d'autres gestes de calcul.

Dans un livre récent, Julie Roux, pseudonyme des auteurs, reprend cette idée « on ne transmet pas des savoirs mais des gestes qui peuvent ou non être prolongés», et elle ajoute « il n'y a pas de différence de nature entre une équation de thermodynamique et un problème de l'école primaire » (Roux 2007, p .43). Même si l'on peut discuter la formulation (tout dépend de la manière dont se posent les problèmes), cette similitude de nature s'inscrit bien dans le

* IREM de Lorraine – France – philodonon@wanadoo.fr

postulat de l'importance d'une entrée en mathématiques réfléchie dés l'école primaire et de la nécessité d'une dynastie de gestes agis à la première personne.

Vivre et faire vivre l'expérience mathématique à l'école comme au collège et au lycée nécessite que nous nous interrogions sur le sens de la connaissance et sur les différents genres de connaissance, ce que nous faisons dans la commission inter-irem histoire et épistémologie en ne cessant pas de nous poser les questions du pourquoi et du comment enseigner, apprendre les mathématiques. Devenue enseignante-chercheuse-formatrice, mes deux maîtres-mots sont passion et rigueur et ces deux questions du pourquoi et du comment ont fait évoluer ma praxis, dans le sens d'une pratique toujours en dialogue avec la théorie. Cela nécessite une remise en question permanente du rapport au savoir, du rôle de l'enseignant car il est facile de retomber dans des habitudes mortifères.

I. PHILOSOPHIE D'UN APPRENTISSAGE

1. Définition de l'apprendre

Ce geste de l'apprendre qui parcourt, lui aussi, les réflexions sur l'enseignement et, dont les textes d'Heidegger et Châtelet ne sont que des occurrences, est prolongé par celui dit de « de l'école moderne » :

> L'inversion la plus troublante est celle de la posture du maître, qui renonce à s'imposer et à déverser pour échanger. […] il faut accepter d'apprendre de l'enfant. (Agnès 2005)

Ce geste réactive celui d'éducateurs, de penseurs comme Jean-Jacques Rousseau, Anton Semionovitch Makarenko, Francisco Ferrer. La philosophie sous-jacente à cette pédagogie nouvelle inclut le principe suivant :

> Si je veux réussir à accompagner un être vers un but précis, je dois le chercher là où il est, et, commencer là, justement là. Celui qui ne sait faire cela, se trompe lui-même quand il pense pouvoir aider les autres. (Kierkegaard cité dans Agnès 2005)

Tout repose alors sur la confiance, confiance dans les potentialités des enfants à prendre en charge la joie et la complexité de notre monde à venir ;

> la transmission ne se réduit pas à l'objet qui passe, mais se joue **dans ce qui se passe ;** à l'opposé d'un savoir académique, ce qui se transmet n'est pas de l'ordre des seules connaissances. Ce qui dure, c'est ce savoir particulier qui passe par les aléas eux-mêmes, qui « se produit » selon les termes de l'événement, toujours inédit. La transmission s'opère là à notre insu : c'est le risque de la coexpérience. (Agnès 2005)

2. Egalité des intelligences

Cette philosophie de l'apprendre repose sur deux postulats que l'on peut attribuer respectivement à Aristote et à Jacques Rancière. Le premier consiste en la croyance au sens de poser comme axiome, comme première pierre, en l'aptitude à la pensée de chaque être humain. « Tous les hommes désirent naturellement savoir » (Aristote 1962), l'importance du désir est d'ailleurs renforcé par le même Aristote « notre fonction désirante est notre premier moteur » (Aristote, 1993) ; on peut retrouver une idée proche dans l'énoncé de Platon « chacun possède la puissance du savoir, ainsi que l'organe au moyen duquel chacun acquiert l'instruction ». (Platon 1950, p. 1107)

Le deuxième, celui de l'égalité des intelligences, fut pour nombre de personnes une découverte à la sortie du livre de Jacques Rancière, *Le maître ignorant* (2004). Une petite anecdote : une élève de sixième était cataloguée par l'équipe pédagogique de « limitée » ; lors d'une narration de recherche (voir plus loin) sur la somme des n premiers nombres entiers, elle a inventé le procédé de sommation du petit Gauss, ce qui a permis de changer le regard des membres de l'équipe.

Toutes ces réflexions ont orienté mon regard sur les élèves et m'ont donné la force et la possibilité de convaincre les élèves de leurs capacités alors qu'ils affirmaient d'emblée « nous, on est pas des intellectuels ».

3. Ancrage social de la connaissance

D'un tout autre point de vue, nous devons considérer que l'enseignement n'est pas un secteur séparé de l'activité sociale et s'inscrit dans la recherche toujours à inventer et à réinventer

> d'une articulation éthico-politique entre les trois registres écologiques, celui de l'environnement, celui des rapports sociaux et celui de la subjectivité humaine. (Guattari 1989, p .12)

Ce point de vue se situe dans la vision plus large d'une éducation permanente où adultes, adolescents, enfants et quiconque a des connaissances et une expérience à faire partager se rencontrent multipliant les zones de savoir et les points de coordination entre apprentissage social, familial et scolaire. Nous avons tous des aptitudes à transmettre car, tous, nous sommes en proie à cette passion universelle et si souvent corrompue en inquisition : la curiosité. Car zapping et passivité sont souvent les fruits amers du caractère dirigiste de l'enseignement. Il y manque le temps nécessaire aux méthodes, aux outils pour s'initier, pour s'orienter vers une question, un problème, pour se mettre tel les chercheuses, chercheurs en situation d'hésiter, de commettre des erreurs, de résoudre des problèmes annexes au problème initial, de se poser, et de répondre à des questions qui ne semblent pas directement liées à la question de départ. La co-formation horizontale et verticale sous forme de discussions fréquentes peut seule construire esprit critique et inventif, et confiance en soi tout en étant toujours ouverte au doute. Tout ceci nécessite des projets de longue durée, autant que des mises au point ponctuelles et fortes. L'enseignant comme garde-fou conseiller, éveilleur. Ceci est valable pour tout apprentissage qu'il soit du nombre ou ce qu'on appelle manuel (métier du bois, de la forge, de la pierre…).

Ce qui nous conduit à un autre postulat de Julie Roux : « des gestes qui ne peuvent pas être détachés sans perte des contextes d'existence dans lesquels ils sont inscrits » (Roux 2007) ; c'est une référence explicite à Ludwig Fleck qui écrit en 1935 « l'acte cognitif est l'activité humaine la plus conditionnée qui soit par le social et la connaissance est tout simplement une création sociale ». Il ne fait que rejoindre tout ce courant de pensée qui montre et analyse la non-linéarité de l'histoire des sciences, sa non-continuité, sa pluridirectionalité, sa complexité et qui replace le travail scientifique dans une dimension collective. Il ne s'agit pas d'identifier des objets dans une nature immuable ; l'objectivité de la connaissance ne vient pas d'une propriété substantielle une fois pour toute acquise ; elle se projette au-devant d'elle-même au cours du mouvement incessant que constitue la vie des concepts. Ce dont Fleck parle à propos du concept de syphilis s'applique aussi bien au concept de nombre. Chaque étape laisse des traces et c'est collectivement dans une même époque et dans une reprise des traces historiques que le savoir se construit. La conclusion est l'apport indispensable de la pluridisciplinarité. Ce travail de contextualisation est entrepris depuis 1982 dans les IREM.

II. COMMENT ENSEIGNER LES MATHEMATIQUES

Pour répondre à cette philosophie, deux outils didactiques, narration de recherche et débat scientifique, ainsi qu'un concept toujours en évolution la pluridisciplinarité ont révolutionné mon enseignement.

1. La narration de recherche

Une narration est l'occasion d'une véritable expérience mathématique : d'abord une entrée dans la langue mathématique. Une question est posée. La consigne est donnée dans une des formulations des IREM : vous allez chercher en écrivant au brouillon tout ce que vous faites, vos idées, les idées du groupe. Vous pouvez discuter entre vous, vous disputer, utiliser les idées des autres, essayer des méthodes qui finalement ne marchent pas, utiliser la calculatrice : tout est permis. Ce qui est important, c'est d'**écrire tout ce** qui se passe dans le groupe et dans votre tête. Les brouillons et l'énoncé du problème seront relevés.

- racontez avec précision tous vos essais, même s'ils n'ont pas donné de solution ;
- écrivez toutes les questions que vous vous posez, avec ou sans réponse ;
- signalez quand vous changez de piste (par exemple, par un changement de couleur du stylo) ;
- reproduisez les dessins que vous avez fait au brouillon ;
- et, bien sûr, faîtes un effort pour être compris par celui qui lit.

Une question : **Construire un carré d'aire double de celle d'un carré donné**.

J'ai posé ce sujet chaque année de la sixième à la terminale et continue à le poser en formation continue ; il correspond à la qualité demandée de mettre tous les apprenants en réelle activité mathématique même si cette entrée se fait par des détours : « c'est un carré plein de vent » ! répond Paulo en première réponse dans uns classe non francophone. Cette réponse a suggéré tout une réflexion sur les homonymies et a permis de travailler sur le mot « aire ». Il n'est pas arrivé une seule fois que des apprenants laissés en libre recherche, ne se soient emparés de ce problème pour en faire des questions et des réponses, n'aient pas produit des écrits et dessins intéressants et n'aient ainsi acquis une expérience du mathématique. On rencontre, comme dans l'histoire des mathématiques depuis l'antiquité, deux grands types de recherche : numérique et géométrique. Dans toutes les classes de collège et souvent au-delà, l'hypothèse de proportionnalité entre le côté du carré et son aire est proposée dans un premier temps pour être invalidée ensuite (Ménez 2000). Du côté géométrique, des réponses « exactes » et des réponses approchées sont proposées par les élèves découpages, puzzles, collages… Du côté numérique découpage et propositions en nombres fractionnaires, calculs, propositions décimales et inventions de nouveaux nombres. Leurs productions correspondent souvent à des textes historiques dont on peut leur proposer l'étude comme le dialogue du *Ménon* de Platon, des extraits de la *Géométrie* d'Arnaud (17^{e} siècle), des extraits des *Eléments* de Clairaut (18^{e} siècle) des extraits des *Sulbasutras* (environ 3^{e} siècle av. J.-C.) des extraits d'Euler (18^{e} siècle), de Stevin (16^{e} siècle). Car chercher un carré d'aire double d'un carré donné autrement dit le fameux problème de la duplication du carré se retrouve dans toutes les mathématiques antiques qu'elles soient occidentales, indiennes, chinoises aussi bien que dans l'histoire des mathématiques jusqu'à nos jours. On peut y voir quelque chose d'une structure sous-jacente sans acquiescer à la théorie platonicienne de la réminiscence. La découverte de l'irrationalité de la diagonale du carré par rapport à son côté, c'est à dire l'impossibilité de trouver un rapport d'entiers égal au rapport entre ces deux grandeurs a été une révolution cognitive chez les grecs ; elle suscite toujours l'étonnement d'élèves contemporains. Que de lignes d'erre dans les domaines numérique et géométrique et dans les allers et venues entre les deux ! Ce geste de la duplication du carré que l'on peut appeler quadrature de deux carrés identiques est le premier de la lignée des quadratures celle du rectangle, celle de deux carrés différents (« notre » fameux théorème de Pythagore). Ce problème a des suites « culturelles » et mathématiques. Qu'est-ce qui fait que cet antique problème suscite de nos jours un intérêt que je peux qualifier d'universel et qui ouvre aux autres gestes de quadratures ? Question ouverte mais l'intérêt pour ledit problème est indéniable. Une autre narration de recherche apparemment anodine « construire le plus petit carré contenant un cercle donné » va induire d'autres quadratures et des rectifications et déboucher sur les deux visages de la tangente à une courbe : tangente de direction donnée, tangente passant par un point de la courbe (Guitart 2000, p. 98). Nombre de narrations de recherche sont racontées dans les brochures IREM. Toute question peut faire l'objet d'une narration de recherche.

2. Le débat scientifique

Le débat scientifique lancé par Marc Legrand est maintenant fort courant mais reste quand même sous-utilisé :

> Le **mariage permanent entre théorie et pratique c'est ce que le chercheur passe son temps à faire dans son labo, c'est ce qu'il a vocation à transmettre par voie d'enseignement… Cela suppose bien entendu une véritable révolution dans notre conception de l'enseignement :** au lieu de continuer à gaver nos élèves/étudiants de résultats dont ils ne font rien par la suite tant qu'ils n'en ont pas compris la philosophie, nous « construisons » avec eux ces théories en engageant dans tous nos enseignements (cours, TP, TD) **de véritables débats dans lesquels nos interlocuteurs assument une réelle responsabilité scientifique :** « je pense que… je soutiens que… je ne suis pas d'accord avec cette idée, ce calcul, cette méthode, et voici mes raisons… » Au cours du débat chacun doit donc défendre ses idées avec ténacité tant qu'elles lui semblent plus raisonnables que les explications concurrentes ou contradictoires, et (contrairement au débat polémique) les abandonner, en disant pour quelles raisons, quand il a été persuadé du contraire. (IREM de Grenoble 2006)

Des remarques d'étudiants explicitent le renouvellement de leur intérêt pour les mathématiques produit par leurs réflexions engendrées par le débat mathématique :

> J'arrive à m'étonner moi-même ! Cette nouvelle façon de voir les mathématiques m'a tout simplement émerveillé. (Ibid.)

Ces idées nées dans l'université où elles paraissent le plus convaincantes sont tout aussi importantes à l'école, au collège et au lycée.

Un petit exemple en classe de sixième : a-t-on 2/5 = 1/3 + 1/2 ? Il est arrivé qu'un élève de sixième arrive un temps à convaincre tout le groupe de la véracité de cette égalité : avec une représentation géométrique, cela consistait à dire 2/5 de 5 = 1/3 de 3 + ½ de 2. La notion de fraction avec ses deux visages opérateur et nombre peut vraiment prendre corps pour les élèves dans ce genre de débat.

3. Pluridisciplinarité

Quand à mon arrivée à Paris en 1983, une élève de sixième posa la question « d'où vient pi ? », je n'avais pas la moindre idée de l'origine de ce nombre. C'est cette année-là que j'ai rencontré les IREM ; à l'instigation d'un enseignant-chercheur de l'université d'une rare générosité, Jean-Luc Verley, un groupe se forma pour travailler à la lecture de textes historiques de mathématiques entre adultes comme avec les élèves. C'est ainsi qu'un va-et-vient de recherches se fit entre l'IREM de Paris 7 et le collège-lycée Paul Bert. Le travail sur « pi » nous occupa, les élèves de la classe et moi, non seulement toute l'année mais encore l'année suivante (je demandais à garder la classe, ce qui fut accepté sans difficulté), et nous réalisâmes, entre autres, une bande dessinée sur Archimède en pluridisciplinarité. Je n'ai cessé d'ouvrir la dimension historique des mathématiques et de pratiquer la pluridisciplinarité aussi bien avec les élèves de collèges et de lycées qu'avec les adultes en formation continue et initiale. Chaque année, en collège, il m'a suffi de suivre le programme d'histoire de la classe et de mettre en relation les deux programmes d'histoire et de mathématiques en lien avec le maximum d'autres disciplines dont chaque année les arts plastiques.

En classe de sixième, les mathématiques grecques, babyloniennes, égyptiennes avec les outils spécifiques ; la vidéo de 18 minutes de l'IREM de Toulouse *Les comptes de Bastet,* le livre de Nicolas Rouche *Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?*(1998)

En cinquième, l'histoire des mathématiques arabes avec les années fastes une conférence d'Ahmed Djebbar et sinon ses publications, l'invention de la perspective avec les écrits et dessins de Piero della Francesca, de Léonard de Vinci, d'Alberti, de Luca Pacioli…

En quatrième, l'étude du dix-septième siècle est l'occasion de nombreux projets pluridisciplinaires qui peuvent concerner toutes les disciplines. Un projet sur les préoccupations du public éclairé dans ce siècle avec des lectures de Descartes, de Pascal, de Leibniz et les recherches sur le théâtre, la musique, les sociétés savantes.

A partir de cette base, même si les programmes d'histoire favorisent moins ces projets en lycée, les questionnements des élèves sur le nombre, sur le calcul infinitésimal, sur les transformations, sur les dimensions ont toujours pu déboucher sur un travail pluridisciplinaire. Des projets comme « Galilée », « Evariste Galois », « Jean Cavaillès », « Limites, frontières », « Le nombre », la mesure du cercle, le baroque… pour en citer quelques-uns suscitent bien la curiosité de chacun. Les aventures du « un » (je recommande entre autres le film qui peut passionner petits et grands dès l'âge de 7 ans au moins : l'extraordinaire histoire du chiffre un http://www.france5.fr/.../histoire/519-l-extraordinaire-aventure-du-chiffre1), et du « zéro » (Châtelet 1993, pp. 115-153) sont bien à même de passionner tout élève. Le zéro de l'ouverture du plan qui se produisit au début du 19e siècle dans cette aventure passionnante que fut la représentation géométrique conjointe des nombres négatifs et des nombres « imaginaires ».

La liste de ces projets est infinie. Le projet « infini » suscite toujours autant de passion. Les publications de la Commission inter-IREM « Épistémologie et histoire des mathématiques » en sont une pépinière.

III. POURQUOI ENSEIGNER LES MATHEMATIQUES

L'utilité des mathématiques a fait l'objet de nombreuses conférences. Je ne parlerai ici que des raisons philosophiques. L'hypothèse sous-jacente peut se dire : il y a un lien entre ontologie et praxis. Toutes ces réflexions ont un point de fuite à savoir les deux questions ontologiques indissolublement liées : qu'est-ce qu'une chose ? qu'est-ce que l'homme ? dont l'antériorité est aussi non décidable que le toujours actuel dilemme de l'œuf et la poule. Homme et chose se construisent dans des incessants renvois symboliques.

J'émets l'hypothèse que c'est de socle ontologique (socle étant impropre puisque toujours mouvant) donc on pourrait dire de ces sables mouvants de l'ontologie que s'origine, que se fonde notre praxis « une action concertée par l'homme, quelle qu'elle soit, qui le met en mesure de traiter le réel par le symbolique » (Lacan 2001, p .57) c'est-à-dire schématiquement trouver une formulation langagière à « qui nous arrive ». Tout en n'étant pas du tout platonicienne c'est à dire ne croyant pas à un monde des idées, j'ai acquis petit à petit la croyance de Platon en l'intérêt propédeutique des mathématiques et ai ainsi changé mon regard sur celles-ci. Le lien indécidable entre les questions Qui suis-je ? Qu'est-ce qu'une chose ? Qu'est-ce que le temps ? Se renforce à chaque tentative de répondre à la question « qu'est-ce que… ».

Prenons par exemple la question « qu'est-ce qu'un cercle ? » ; elle suscite toujours, selon mon expérience, des réponses variées. Une fois que les échanges ont été travaillées dans le groupe d'apprenants ou d'amis, je propose la lecture d'un extrait de la lettre VII de Platon (Ménez 2010) qui structure cinq différents cercles de la connaissance de cet objet « cercle », réflexion philosophique qui nous entraîne vers la connaissance « vraie », vers la connaissance du troisième genre de Spinoza, celle qui a réuni corps et pensée dans une entité unique. Nous pourrons suivre ces cinq cercles proposés par Platon en lisant Euclide, Archimède…, en passant par la définition génétique de Spinoza… en lisant des extraits de Deleuze, et plus contemporainement de Guitart ; ces deux derniers sont des compagnons qui nous mettent en garde contre l'image des mathématiques communément répandue comme d'une science exacte dont le principal fonctionnement est le raisonnement axiomatico-déductif aux dépens de toute la composante heuristique de cette même mathématique.

> le paradoxal et l'ambiguïté sont au cœur des mathématiques, tant dans son agir quotidien non écrit que dans son souci théorique, contrairement à l'idée que le grand public en a. (Guitart 2000, p. 68)

Une autre question est très souvent débattue : Qu'est-ce qu'un nombre ? Dans les *Confessions*, Saint-Augustin (1964) opère une distinction fondamentale dans les nombres qu'il verbalise « nombre nombré » et « nombre nombrant ». C'est ce geste que réactive Stella Baruk (2003) avec les catégories qu'elle propose : « nombre de » et « nombre ». La proposition de Saint-Augustin a été peu opérante, celle de Stella est fondatrice d'une réflexion pédagogique pour tout instituteur et enseignant de mathématiques ; elle a ses répercussions dans le langage ; la multiplication de « nombre de » n'est pas commutative, celle des « nombres » l'est ; 5 fois 7 n'est pas la même chose, n'est pas la même opération concrète que 7 fois 5, par contre la commutativité de la multiplication et son égalité $5 \times 7 = 7 \times 5$ est un énoncé fondamental. Et ceci, qui peut paraître un coupage de cheveux en quatre pour un non-mathématicien est une distinction nécessaire si l'on veut accompagner des enfants vers la pensée mathématique. Le radicalement nouveau auquel ce geste ouvre ne se fait voir, comme presque toujours, que dans l'énergie joyeuse qui s'empare de la personne qui l'agit que ce soit un enfant ou un adulte. La non-distinction de ces catégories de nombres que l'on peut aussi qualifier de concret et d'abstrait est bien une des nombreuses occurrences de l'abêtissement généralisé qu'induit pour la plupart l'enseignement des mathématiques à l'école. La faiblesse de pensée est en effet la chose du monde la mieux partagée.

Comme il est facile de tuer dans l'œuf une joie naissante chez un jeune être jusqu'à ce qu'il devienne le propre assassin de ses enthousiasmes!

Cette distinction est une entrée dans l'expérience mathématique ou dans le langage mathématique , langage conçu comme un « faire », un « dire », une réflexion sur le « faire » et le « dire ». Le langage n'est pas une forme de communication, mais une manière de construire quelque chose. Pour le « dire » dans ce langage, on utilise la langue, fait social qui s'impose au locuteur ; la langue se laisse utiliser. Nous avons à produire notre parole, à revenir sans cesse sur les mots pour les armer et les désarmer.

Prenons un exemple simple mais toujours aussi percutant pour un profane : à quoi vous fait penser ce fait de langue « trois au carré » ? Une fois la mise en confiance établie, une fois dépassée la peur engendrée par des années de refus des mathématiques en général, commencer à habiter ces trois mots est une entrée dans le langage mathématique ; produire une écriture symbolique, un calcul numérique ne se suit pas d'emblée par un dessin géométrique. Que ce « trois au carré » soit à la fois $3 \times 3 = 9$ et l'aire d'un carré de côté trois et que « faire » des mathématiques c'est apprendre à jongler avec ces deux visages est une révélation pour beaucoup. L'importance du changement de cadres est une des réflexions didactiques incontournable.

A ce propos la lecture de l'extrait de Stendhal de la *Vie de Henry Brulard* sur la difficulté de faire d'un énoncé « moins par moins donne plus », un véritable énoncé mathématique rejoint l'exemple particulièrement éclairant proposé par René Guitart dans son livre, qui nous donne plein de pistes pour cette habitation du langage mathématique tel que défini plus haut :

> Or le mathématicien au travail, l'amour au sens hégélien du terme, il le fait à tout bout de champ. Je crois que c'est Poincaré qui écrivait à peu près ceci : on ne peut pas faire de mathématiques sans tantôt désigner d'une même lettre des objets distincts, et tantôt désigner de plusieurs lettres un même objet. Pensez à la difficulté majeure qu'il y a pour accéder à l'algèbre : comment est-il possible de penser que x est finalement 2, puisque dès le début x est x, 2 est 2, et ce sont deux choses distinctes ? Je me souviens de l'extraordinaire mystère de cette énigme pour moi lorsque vers mes onze ans on commença à m'enseigner l'algèbre. Je fus deux ou trois semaines dans cette énorme chose et n'en pouvait sortir. Mon professeur ne m'en sortait pas, qui me disait de continuer, de voir qu'en jouant (!) avec, ça marchait. Ne faîtes pas ça avec vos élèves, répondez à leur question. Un mathématicien peut bien dire cela (« joues avec, tu verras ») à un autre mathématicien et encore ; du moins cet autre a-t-il le sens du « jeu » en général.
>
> De fait, je m'en sortis, à l'automne 1959, que parce que j'allai, en dernier recours, demander de l'aide à mon ancien instituteur Jean Batguzère qui immédiatement m'expliqua qu'une chose peut avoir plusieurs noms, que 2 et x sont deux noms d'une même chose, ou mieux que x est le nom d'une place dans le calcul où je finirai par déposer l'objet 2 pour que l'équilibre tienne, et que les différents « est » dans mon énigme étaient à entendre en des sens différents (est absolument identique à, vaut pour, désigne, etc.). Il faut initier à l'enjeu du jeu, pointer l'insu autour de quoi il pivote. (Guitart 2000, p. 46)

D'une manière très elliptique sur ces quelques exemples, le cercle, le carré, le négatif et l'entrée dans l'algèbre, je n'ai fait que suggérer, en réponse aux trois questions du GT4, que les concepts travaillés dans leurs dimensions historique et culturelle permettent à l'élève comme au futur enseignant de s'inscrire dans histoire des mathématiques et dans histoire des idées et ainsi de relier leurs propres interrogations à celles de leurs prédécesseurs. L'intérêt et le plaisir de penser et de lire suscités dans ces démarches sont le garant de la fonction de cette dimension culturelle qui est de tisser des liens dans lequel les constructions disciplinaires se solidifient les unes les autres non pas comme un entour folklorique mais comme ce qui articule les connaissances entre elles et construisent le sujet lui-même.

IV. CONCLUSION

Ce colloque me paraît une occasion très importante pour échanger nos pratiques et nos réflexions et j'attends beaucoup de ces rencontres. Lors de EMF 2000, nous avions envisagé une banque de textes, de films ; j'espère que nous pourrons concrétiser ces échanges aussi bien pour nos pratiques dans nos classes que pour la formation initiale et continue de professeurs d'école comme des professeurs de collèges, de lycées, d'universités.

Nous avons avec toutes les pratiques existantes (me revient le théâtre et l'algèbre, outil de Michèle Muniglia de l'IREM de Lorraine, facilement adopté par les élèves de quatrième qui deviennent eux-mêmes metteurs en scène de l'activité) et toutes les recherches universitaires et autres (Marie Millis, Jacques Levine, André de Peretti, Mireille Cifali,…)

Toute cette richesse est occultée par les différentes peurs qui envahissent les sociétés humaines, dont celle de l'inspecteur et du programme. Or le programme s'il doit rester un référent ne doit pas contrecarrer l'évolution des recherches des élèves.

Croiser les recherches qu'elles soient philosophiques, épistémologiques, historiques, didactiques me paraît essentiel pour transmettre, pour faire d'une classe, d'un atelier de formation une communauté de recherche. Les travaux des IREM nous permettent cet enrichissement mutuel.

REFERENCES

Agnès J. (2005) Transmission et pédagogie. *Cahiers pédagogiques* 395. http://www.cahiers-pedagogiques.com/spip.php?article983

Aristote (1962) *Métaphysique.* Paris : Vrin.

Aristote (1993) *De l'âme.* Paris : Flammarion.

Baruk S. (2003) *Comptes pour petits et grands.* Paris : Magnard.

Cavailles J. (1981) *Méthode axiomatique et formalisme.* Paris : Hermann.

Cavailles J. (1994) *Œuvres complètes de philosophie des sciences*. Paris : Hermann.

Châtelet G. (1993) *Les enjeux du mobile.* Paris : Seuil.

Ferrières (1950) *Jean Cavaillès philosophe et combattant.* Paris : PUF.

Guattari F. (1989) *Les trois écologies.* Paris : Galilée.

Guitart R. (2000) *Evidence et étrangeté.* Paris : PUF.

Heidegger M. (2006) *Qu'est-ce qu'une chose ?* Paris : Gallimard.

Helvetius C. A. (1758) *De l'esprit.* Paris : Durand

Helvetius C. A. (1773) *De l'homme.* http://wikisource.org:wiki/Réfutation_d'Helvétius. Texte_entier IREM de Grenoble (2006), http://www-irem.ujfgrenoble.)fr/new2006/Debat_scientifique/De_vraies_raisons.pdf

Lacan J. (2001) *Les 4 concepts de la psychanalyse.* Paris : Seuil.

Ménez M. (2006) L'invention d'un zéro. http://www.apmep.asso.fr/L-invention-d-un-zero,3596

Ménez M. (2000) Un enseignement de la proportionnalité de la 6ème à la terminale. http://www-leibniz.image.fr/EMF2000/Actes/Ateliers/HALLEZ.pdf

Ménez M. (2010) La question du mathématique. In *Circulation transmission héritage. Actes du 18^e^ colloque inter-IREM d'épistémologie et d'histoire des mathématiques* (pp. 545-554). Caen : Université de Caen-Basse Normandie.

Platon (1950) *La République.* Paris : La Pléiade.

Rancière J. (2004) *Le maître ignorant.* Paris : 10/18.

Rouche N. (1998) *Pourquoi ont-ils inventé les fractions ?* Paris : Ellipses.

Roux J. (2007) *Inévitablement (après l'école)*. Paris : La fabrique.

Saint-Augustin (1964) *Confessions*. Paris : Garnier-Flammarion.