KEPLER, ENTRE SAVOIR ET SCIENCE
QUELQUES ÉLÉMENTS ÉPISTEMOLOGIQUES AUTOUR D'UNE SITUATION DE RECHERCHE

Mathias FRONT*

Résumé – Johannes Kepler fit preuve au long de sa carrière scientifique d'une exigence intellectuelle qui s'est traduite par des écrits laissant place aux doutes et aux hésitations et qui montrent le processus mental en cours lors d'élaborations théoriques. Nous avons cherché à saisir dans des extraits de cette « pensée en actes » les modalités de construction d'un savoir en l'observant du point de vue d'un processus à caractère exploratoire et expérimental. Nous proposons alors quelques éléments épistémologiques puis didactiques résultant de cette étude en montrant en quoi une telle approche permet d'envisager l'élaboration de situations didactiques spécifiques en classe.

Mots-clefs : Pavages archimédiens, problème, Kepler, action sur les objets, dimension expérimentale

Abstract – Johannes Kepler showed throughout his scientific career, an intellectual requirement that has produced papers which leave a hand room for some doubt and hesitations, showing us the mental processes during the theoretical elaborations. We tried to seize in extracts of this « thought in acts » the modalities of construction of a learn, by observing it from the point of view of a process with exploratory and experimental character. We then propose some epistemological and didactic elements resulting from this study by showing how such an approach allows to consider the development of specific teaching situations in the classroom.

Keywords: Archimedean tilings, problem, Kepler, action on objects, experimental dimension

I. INTRODUCTION

Il existe dans la culture mathématique quelques résultats simples et pourtant peu connus de la communauté des enseignants. La recherche des pavages archimédiens du plan fait partie de ces situations qui explorées, oubliées puis remises à jour, ont des parcours chaotiques et finalement obscurs. L'étude historique de cette émergence difficile porte en elle la richesse de toute quête qui questionne les diverses voies explorées, les pistes sans issues, les approches variées, qui sont tout d'abord reçues sans a priori. Nous retrouvons ainsi dans un premier temps l'idée de faire de l'histoire « à mains nues »[1], et nous en tirons l'intrigue de l'apparition d'un savoir simple mais résistant.

Nous verrons alors que l'enquête met naturellement en évidence des conditions d'émergence variées et complexes. Nous faisons alors le lien avec le cœur de cet article qui développe un point de vue essentiellement heuristique, que nous abordons aussi bien par l'étude historique que par une interprétation épistémologique qui met en avant la dimension expérimentale et le travail sur les objets. Nous expliciterons cet aspect par l'étude d'extraits de l'*Harmonices Mundi* et par un essai d'interprétation de la démarche de Kepler.

Pour terminer, nous verrons comment ces diverses approches peuvent enrichir l'élaboration de situations de recherche pour la classe, situations qui là aussi mettent en avant

* IUFM de LYON et S2HEP, Université Claude Bernard Lyon1– France – mathias.front@univ-lyon1.fr

[1] En référence à l'article d'Evelyne Barbin (1997), qui oppose une recherche historique sans a priori à une lecture de l'histoire au travers de grilles et par exemple avec des visées didactiques.

© Front M. (2012) Kepler, entre savoir et science. Quelques éléments épistémologiques autour d'une situation de recherche. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT4, pp. 612–621). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

la survenue de va et vient entre des phases d'actions sur les objets et des phases d'élaborations théoriques.

II. APERCU DE L'INTRIGUE HISTORIQUE

Figure 1 *– Rosace du temple de Diane à Nîmes*

L'enquête débute avec les textes écrits à notre disposition. C'est dans le préambule du livre V de « La Collection Mathématique » (Pappus ~340), que Pappus[2] prouve qu' « il y a trois figures au moyen desquelles on peut remplir l'espace qui règne autour d'un point : le triangle, le carré et l'hexagone ». La démonstration proposée s'intègre dans un éloge à l'habileté des abeilles qui parées, par « la divinité » d'une « certaine intuition géométrique », parviennent à réaliser un pavage du plan pour contenir leur miel. Pappus indique également que c'est parce que « les figures dissemblables répugnaient aux abeilles » qu'il suffit de considérer des figures régulières lorsqu'on s'intéresse à cette question.

Pappus ne présentera pas d'autres résultats concernant les pavages du plan. On peut alors se poser la question de savoir ce qui l'arrête quand il s'agit de généraliser cette étude ? Doit-on plutôt chercher dans la direction de considérations philosophiques de longue tradition, ou étudier un éventuel manque de familiarité avec les objets manipulés aussi bien pour le plan que pour l'espace ? Pour ce dernier point il est à noter que dans le même livre V (seconde partie, chapitre XIX en particulier) Pappus décrit en détail les treize solides d'Archimède[3] et en montre ainsi sa très bonne connaissance, même s'il se borne à les décrire. Mais, par ailleurs, Cuomo (2000) nous indique qu'il est nécessaire pour comprendre « La Collection mathématique » de tenir compte des intentions spécifiques éditoriales de Pappus. Il semble vraisemblable d'envisager que certains thèmes mathématiques ont été choisi aussi pour leur appartenance à une culture commune et permettent alors de défendre certaines thèses comme, par exemple, de montrer que « mathématicians are better qualified than philosophers to talk about isoperimetry and the fives platonic bodies » (Cuomo 2000, p.58). Certains des objectifs de Pappus ne sont donc pas strictement mathématiques, pour autant, on ne peut pas ne pas relever les enjeux mathématiques forts portés par la question de la comparaison des figures qui occupe tout le livre V. Bien qu'il ait choisi de ne pas le citer, Pappus est ici sur les traces, en particulier, de Zénodore[4] et de ses travaux *Sur les figures isopérimétriques.* Ceux-ci mettent en avant l'intérêt de la régularité des figures pour maximiser une aire, et finalement

[2] Paul Ver Eecke propose d'admettre que Pappus vécut entre la fin du III[e] siècle et première moitié du IV[e] siècle après J.-C.
[3] Archimède est né vers 287 av. J.-C. et mort en 212 av. J.-C.
[4] Zénodore vécut entre le II[e] siècle avant J.-C. et le I[er] siècle après J.-C.

en déduire « que parmi les figures planes ayant un périmètre donné, celle qui contient la surface la plus grande est le cercle » puis que « parmi les figures solides ayant une surface donnée, celle qui contient le volume le plus grand est la sphère ». Et alors « [...] il convient qu'elle soit la forme du cosmos qui contient toutes choses »[5]. Pappus, par sa reprise de l'étude, « fonde » alors pour une part les propos des philosophes qui affirment que « c'est à juste titre que le premier des dieux a revêtu le monde de la figure sphérique ». On peut donc concevoir que Pappus avait bien d'autres objectifs que la généralisation de l'étude des pavages mais aussi se convaincre qu'en poursuivant ce projet, lui et d'autres ont privilégié l'étude des figures régulières qui sont restées pendant longtemps des attracteurs puissants et peut-être une source d'obstacles pour l'étude de configurations moins « harmonieuses ».

C'est Kepler qui parviendra à franchir l'obstacle, aussi bien pour le plan que pour l'espace. Il est lui aussi assuré de la perfection (divine) du cercle et construit une grande partie de ses travaux sur les relations qu'entretiennent les polygones avec ce cercle parfait. Mais dans cette relation tout aussi philosophique et métaphysique à la connaissance, ambitionnant de décrire, pas moins, que l'*Harmonie du Monde*, il saura inventer des nouveaux degrés de congruence pour les polygones et trouver de nouvelles harmonies.

En 1619, Kepler produit un ouvrage magistral, l'*Harmonices Mundi* (Kepler 1619), dont la renommée fut faite par les trois lois qu'il contient[6]. De cette œuvre majeure, on connaît peu des résultats tels que ceux illustrés sur des planches comme celle de la figure 2. Pourtant ces dessins, particulièrement soignés, montrent le progrès majeur que Kepler a réalisé dans l'étude des pavages archimédiens du plan, c'est-à-dire des pavages stricts, dont tous les pavés sont des polygones réguliers et où les sommets ont des voisinages identiques à une symétrie près[7].

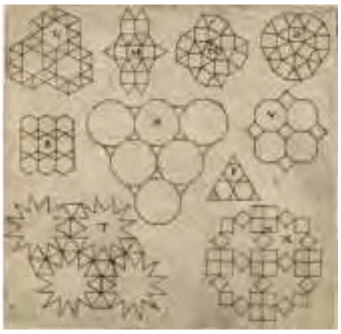

Figure 2 *– Planche de l'*Harmonices Mundi

L'étude de ces planches montre en effet que Kepler a identifié les 11 pavages archimédiens du plan. Mais il a fait mieux en donnant une preuve de ce résultat[8] qui repose sur les trois propositions suivantes du livre II de l'*Harmonices Mundi*, « De congruentia Figurarum Harmonicarum » :

[5] Extraits repris de *Les géomètres de la Grèce antique*, Bernard Vitrac, dossier en ligne, http://www.math.ens.fr/culturemath/histoire des maths/htm/Vitrac/grecs-index.htm

[6] Il s'agit des lois, dites de Kepler, qui décrivent les propriétés principales du mouvement des planètes autour du Soleil.

[7] Nous présentons ici une analyse des résultats sur les pavages archimédiens établis et présentés par Kepler dans l'Harmonices Mundi. L'« invention » proprement dite de ces pavages par Kepler est, à vrai dire, nettement antérieure, mais ce point fera l'objet d'une publication ultérieure.

[8] On trouvera une démonstration récente de ce résultat dans (Front et Legrand 2010).

> XIX : Un lieu plan est empli six fois à partir des surfaces planes de deux figures ; deux fois à partir de cinq, une fois à partir de quatre, trois fois à partir de trois angles.
>
> XX : Un lieu plan est empli congruement quatre fois à partir d'angles plans de trois espèces.
>
> XXI : les figures planes de quatre ou de plus d'espèces ne congruent pas avec les angles un à un, pour emplir le lieu entier.

Pour la proposition XXI, par exemple, il s'agit de comprendre qu'il n'est pas possible de paver le plan si l'on souhaite assembler des polygones d'au moins quatre espèces différentes. En effet, la somme des angles serait supérieure ou égale à un angle du triangle, plus un angle du carré, plus un angle du pentagone, plus un angle de l'hexagone ce qui dépasse déjà l'angle plein. Dans les propositions XIX et XX, Kepler traite respectivement les cas où l'on assemble des figures de deux espèces différentes et trois espèces différentes.

Pour l'élaboration de ces propositions, Kepler mène une étude exhaustive de tous les cas envisageables en fonction du nombre d'espèces différentes de polygones à associer autour d'un nœud. Il s'appuie sur des énoncés quantitatifs et mathématiquement démontrables mais également, nous le verrons plus loin, sur une relation singulière aux objets de l'étude, et en ayant recours à une intuition plongeant ses racines dans une imagination créatrice, non réductible aux normes mathématiques actuelles. Il est à noter de plus que Kepler se donne peu de limites. Ces dessins et ces textes montrent qu'il s'engage dans les pistes variées qui s'ouvrent à lui, en mélangeant par exemple polygones convexes et polygones étoilés quand il en ressent la nécessité. Nous avons bien sous les yeux la trace d'une démarche qui explore et développe différents possibles autant qu'elle structure et formalise[9].

Et c'est ainsi que Kepler prouve ses résultats inédits sur les pavages archimédiens ... résultats qui seront aussitôt oubliés[10].

En 1881, quand Albert Badoureau présente ses avancées, dans son « mémoire sur les figures isoscèles » (Badoureau 1881), il cite Lidonne, Gergonne et Catalan pour leurs travaux sur les polyèdres, mais à aucun moment Kepler dont il semble ignorer les résultats en ce domaine. Il établit lui, ses résultats, après l'étude des travaux de Bravais sur la symétrie et la cristallographie et d'Elie de Beaumont sur le réseau pentagonal[11]. Son approche est nouvelle, algébrique et ainsi totalement différente de celle de Kepler. Pour R_i un polygone régulier à n_i côtés et d'angle a_i on doit avoir pour assembler k polygones autour d'un nœud : $\sum_{i=1}^{k} a_i = 2\pi$ avec $a_i = \frac{n_i-2}{n_i}\pi$ ce qui implique $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{n_i} = \frac{k}{2} - 1$. On retrouve dans le mémoire de Badoureau une expression similaire sous la forme $\sum \frac{1}{n} = \frac{K}{2} - 1$. Ce dernier, en usant alors de quelques conditions nécessaires complémentaires, retrouve l'essentiel des résultats de Kepler pour les polygones convexes. Il commet toutefois un oubli qui semble de détail mais qui fut relevé plus tard par H .S. M. Coxeter et sur lequel nous reviendrons plus avant dans le texte :

---

9 Nous nous intéressons ici à une « présentation » d'un résultat assez ponctuel. Pour une analyse plus globale de l'*Harmonices Mundi*, il peut être utile de consulter des travaux récents (Voelkel 2001), qui ont mis en évidence un aspect rhétorique à la facture de l'*Astronomia Nova*.

10 C'est plus généralement une grande partie de l'œuvre de Kepler qui fut laissée dans l'ombre comme l'énonçait Chasles (1837, p. 482) : « La théorie des polygones, qui a guidé Kepler dans ses longues et pénibles spéculations, a été encore moins favorisée ; la simple curiosité ne s'en est pas mêlée ; rien n'a pu la sauver d'un oubli complet ». Coxeter (1974), a fait plus récemment le même constat pour les pavages.

11 Kepler est ici doublement négligé, autant pour son étude des solides que pour « La Strena » (Kepler 1609) qui peut être vue comme une des pièces de la protohistoire de la cristallographie.

> One of them[12], is exceptional, because it is chiral like his snub dodecahedron: it cannot be continuously moved into the position of its reflected image. In 1881 the French geometer A. Badoureau made a fresh attempt to enumerate the uniform tessellations. Although he rediscovered all the rest, he missed the chiral one…(Coxeter 1974, p. 668)

En 1891, L. Lévy, reprend et complète, les résultats de Badoureau, dans un article qu'il fait paraître dans la revue de la Société philomathique (Lévy, 1891). Mais il ne répare pas l'oubli signalé et même si certaines pistes ont un rapport avec les travaux de Kepler, ceux-ci ne sont toujours pas cités.

Plusieurs auteurs se sont ensuite appuyés sur le texte de L. Lévy, mais le lien avec les travaux de Kepler ne sera réalisé que vers 1905 par Sommerville (1905), et leur richesse ne sera intégrée que postérieurement, dans les années 1970. Ainsi, il aura fallu, de façon surprenante, près de 300 ans pour que ces travaux, fondamentaux dans ce domaine, voient à nouveau le jour. Cette synthèse tardive, peut expliquer la quasi-absence des pavages archimédiens dans la culture scolaire française actuelle alors même qu'ils s'intègrent parfaitement aux travaux de recherche sur le thème.

III. ÉLÉMENTS ÉPISTEMOLOGIQUES

Tout le monde ne reconnaît pas encore Kepler comme un des précurseurs de la science moderne. Mais ceci peut se comprendre, tant Kepler, sa personnalité, ses écrits, ont brouillé les pistes pour qui lit l'histoire comme une accumulation de résultats, qui s'intègrent dans une construction a posteriori de la science. En effet, Kepler n'a fait aucun effort, au contraire, pour produire des textes expurgés de toutes références à des savoirs qui sont aujourd'hui sortis du champ des sciences. C'est d'ailleurs pour cela que Gérard Simon en a fait l'objet de son étude ce qui lui permet de montrer, dans *Kepler astronome astrologue* (Simon 1979), que c'est une histoire des savoirs et non pas une histoire des sciences qui permet de prendre en considération des apports incontournables comme ceux de Kepler. Dans le même esprit, Simone Mazauric revient sur la notion d'obstacle épistémologique :

> Contrairement à ce que l'on a appris chez Bachelard de la notion d'obstacle épistémologique, il s'avère que des savoirs jugés aujourd'hui non scientifiques ont joué un rôle positif dans le mouvement de restructuration intellectuelle opéré par Kepler comme dans la constitution de savoirs annexés désormais au domaine de la science. (Mazauric 2007, p. 99)

Donnons ici, et pour ce qui nous intéresse, un exemple de la présence de ces savoirs « non scientifiques » dans la pensée de Kepler.

Kepler possède une grande maîtrise des polygones réguliers. Il les étudie longuement dans le livre I de l'*Harmonices Mundi*, mais la description de certains polygones lui résiste et le lien entre le côté de l'heptagone et le diamètre du cercle circonscrit, l'amène à des considérations complexes et des commentaires qui s'écartent du paradigme scientifique comme nous le concevons aujourd'hui. Lors de la rédaction de la proposition 45 il écrit ainsi :

> En effet nous nous occupons certes ici des êtres scientifiques, et nous prononçons justement que le côté de l'Heptagone est issu des Non Etant [...] et il n'est pas connu par la pensée entière, sache par un acte simple éternel, parce qu'il est inconnaissable par sa nature.

Ainsi, alors même que Kepler fait preuve d'une démarche mathématique complexe et qui se veut exhaustive pour l'étude des polygones, il reste, dans les objets qu'il va être amené à

---

[12] Figure L sur la planche de la figure 2, et figure 3.

manipuler des « non êtres ». Nous allons voir l'incidence de cette présence dans ses travaux mais notons toutefois que ceci ne l'empêchera pas d'aboutir à des résultats nouveaux et particulièrement innovants. Chasles formulera ainsi son appréciation favorable des travaux de Kepler :

> Au milieu de ces considérations mathématiques si justes et si profondes, on trouve quelques réflexions qui annoncent l'usage bizarre et chimérique que veut faire, de ses savantes spéculations sur les polygones, le génie de Kepler, dominé par les idées pythagoriciennes et platoniciennes sur les propriétés cosmographiques des nombres : tel est ce passage qui termine la Proposition 45 : « Il est donc prouvé que les côtés de ces figures doivent rester inconnus et sont de leur nature introuvables. Et il n'y a rien d'étonnant en ceci, que ce qui ne peut se rencontrer dans l'Archétype du monde ne puisse être exprimé dans la conformation de ses parties ». Ce sont de pareilles idées qui ont conduit Kepler à l'une des plus grandes découvertes qu'on ait jamais faite. (Chasles 1837, p. 484)

Et c'est bien la pertinence et la fécondité de telles approches, que nous questionnons et qui sont au cœur de nombreux travaux de recherche actuels. C'est en effet dans des moments comme ceux-ci qu'apparaissent les savoirs nouveaux et ce sont ces moments qui nous intéressent du point de vue épistémologique et didactique dans la mesure où nous pourrons, en lien avec ces observations historiques, envisager des dispositifs didactiques favorables aux apprentissages.

Mais revenons aux travaux de Kepler sur les pavages archimédiens du plan[13]. Nous observons donc qu'ils constituent une avancée mathématique notable. Dans ce domaine aussi Kepler travaille essentiellement sur des énoncés quantitatifs et mathématiquement démontrables. Nous avons toutefois pu identifier, dans la démonstration de la proposition XX, où Kepler traite d'assemblages de figures de trois espèces, une erreur[14], qui amène Kepler à écarter prématurément les trois candidats-pavages pour lesquels les nœuds seraient respectivement construits à partir des polygones à 3,7 et 42 côtés, 3,8 et 24 côtés, 3,9 et 18 côtés. Nous constatons ainsi, qu'à cet instant, le contrôle du raisonnement par le retour aux objets[15] présente une difficulté. Il est alors nécessaire de questionner le milieu de recherche[16] de Kepler. Les validations des candidats-pavages se font-elles dans le cadre mathématique ou encore dans celui de l'action sur les objets ? Quels sont les objets qui sont réellement disponibles et les « non êtres » y figurent-ils ?

Kepler propose des figures particulièrement soignées qui montrent qu'une part des validations se fait par un retour au dessin aussi bien pour les candidats-assemblages autour d'un nœud que pour le pavage lui même[17]. Plus généralement, les textes montrent une référence constante aux objets et à leurs propriétés. Dans cet optique, il est probable que les « non êtres » et leur mode « d'existence » bien particulier aient une place à part dans le milieu de la recherche et que le candidat-pavage contenant l'assemblage de polygones à 3, 7 et 42 côtés, ait été écarté par son absence de réalité dans l'interprétation du monde de Kepler.

---

[13] Une étude fine de la démarche de Kepler devrait détailler l'environnement mathématique, qui intègre au-delà des polygones réguliers, des polygones étoilés et doit se concevoir dans un parallélisme avec l'étude des polyèdres.
[14] On pourra consulter (Front, à paraître) pour des développements.
[15] Nous entendons par objet, toute chose qui peut être soumise à manipulation, aussi bien concrète qu'abstraite.
[16] Nous faisons ici référence au milieu au sens de Brousseau, qui est caractérisé, dans le cadre d'une situation de recherche.
en classe, par : « dans une situation d'action, on appelle "milieu" tout ce qui agit sur l'élève ou/et ce sur quoi l'élève agit ».
[17] Ceci apparaît clairement sur certaines planches.

Ainsi ce qui apparaît lors de l'élaboration mathématique de Kepler, c'est un appui fort sur les objets manipulés et en conséquence sur le sens que ces objets portent dans l'interprétation de Kepler. Et si, comme on l'a vu, cela peut perturber certains aspects de la démarche, c'est aussi sans doute ce lien plus fort avec les objets de l'étude qui donne un avantage à Kepler sur Badoureau. En effet, l'approche algébrique de ce dernier l'amène à identifier quasiment tous les pavages archimédiens mais ne lui permet pas de retrouver que l'association de polygones à 3, 3, 3, 3 et 6 côtés amène à considérer 2 pavages différents, non superposables sans retournement (Figure 3). C'est ce que Kepler avait parfaitement identifié, ce pourquoi, Coxeter le tenait en haute estime.

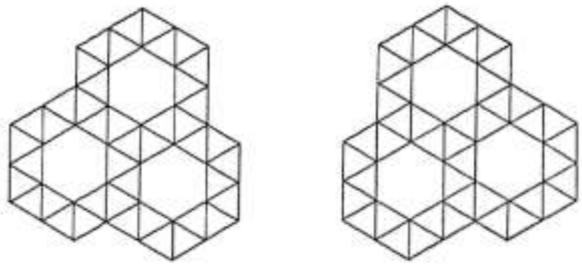

Figure 3

Ces quelques éléments nous permettent de pointer ainsi l'influence des approches et des démarches, le rôle du type d'objets manipulés, de leur intégration dans le milieu de la recherche en lien avec une certaine interprétation du monde et l'intérêt du va et vient entre les élaborations théoriques et les actions sur les objets.

IV. DES LIAISONS AVEC LA DIDACTIQUE

Il n'est bien entendu pas dans notre propos ici d'imaginer un enseignement du discours le plus récent concernant les pavages archimédiens, ni même d'envisager de le présenter avec une perspective historique. Le lien qui nous établissons se réalise par une approche que nous menons autour de la mise en œuvre de problèmes de recherche en classe et qui s'appuie aussi fortement, sur le rôle de l'action sur les objets qui peut donc être mis en évidence lors de processus de recherche. Nous n'entrerons pas ici dans le détail de la méthodologie qui peut amener à l'élaboration d'une situation pour la classe mais nous souhaitons mettre en évidence quelles idées fortes.

En reprenant des propos de Dias et Durand-Guerrier (2008, p. 15), rappelons tout d'abord que nous souhaitons avant tout « favoriser l'accès du plus grand nombre d'élèves non seulement aux outils et méthodes spécifiques des mathématiques, mais également à la signification des objets mathématiques et de leurs propriétés et à leurs liens avec les autres domaines de la connaissance et de l'activité humaine ».

Nous pensons alors qu'il est nécessaire, de prendre en considération et de favoriser l'affirmation des divergences d'interprétation des situations mais également des divergences d'interprétation du « monde ». Ceci doit se traduire par l'apparition, lors de situations de recherche, d'approches et de démarches variées qui engagent les élèves dans des modes d'élaborations théoriques parfois opposés mais toujours complémentaires.

Nous estimons également que l'activité mathématique ne s'exprime ni par la simple manipulation d'objets qui ferait à elle seule émerger des concepts, ni par des constructions essentiellement formelles et théoriques, trop souvent purement syntaxiques. Cette opposition ne permet d'ailleurs pas de rendre compte d'une activité mathématique où les élèves élaborent des mini-théories locales comme nous pouvons l'observer quand nous mettons en œuvre certaines situations que nous avons élaborées. Nous émettons l'hypothèse que ces élaborations théoriques se développent lors de manipulations qui agissent sur du concret, c'est-à-dire « de l'abstrait rendu familier par l'usage », par un mouvement de va et vient entre ces actions et les élaborations conceptuelles.

Dans cette optique, un travail sur les objets potentiellement manipulés lors de la recherche et sur les relations que les élèves entretiennent avec eux s'avère alors indispensable. En effet, au-delà de la simple connaissance factuelle, un élément clé de la fécondité des recherches est bien, comme on a pu en donner un exemple, le mode d'existence que l'on accorde aux objets considérés.

Ainsi, en appui sur les travaux du groupe de recherche EXPRIME[18] (2010), nous nous plaçons dans une optique qui met particulièrement en avant la recherche de problèmes en classe de mathématiques pour élaborer des situations didactiques permettant des élaborations théoriques et la construction de connaissances nouvelles. Celle, s'appuyant sur cette situation des pavages a été expérimentée de nombreuses fois en France, avec des élèves de terminale scientifique, mais également avec des étudiants non scientifiques préparant le concours de professeurs des écoles ou encore avec des enseignants du second degré en formation initiale ou continue. Elle s'est révélée, dans tous les cas, résistante et favorable à des élaborations théoriques, locales ou globales, partielles ou complètes. Ainsi par exemple, l'étude du voisinage d'un nœud permet l'élaboration de résultats souvent sous forme de conditions nécessaires et suffisantes, qui investissent soit le registre géométrique soit le registre numérique mais qui toutes montrent à des degrés divers l'importance de la relation aux objets et des retours de l'expérience sur ces objets. Cette relation porte particulièrement ses fruits lors des changements de registres qui s'avèrent nécessaires. Montrons sur un exemple ce lien entre élaboration théorique et action sur les objets, ici lors de l'étude d'une relation obtenue algébriquement : $180 \times \frac{n-2}{n} = \frac{360}{p}$, où n désigne le nombre de côtés des polygones réguliers considérés et p leur nombre. Les protagonistes se retrouvent en difficulté : « Non mais c'est des trucs que tu vois en terme » ... (en référence à des équations diophantiennes). Puis :

- ... si on en met plus de 6 on va peut-être trouver un angle trop aigu
- Si si on va s'en sortir parce que là on essaie d'en mettre le plus possible à un moment donné on arrive à des angles aigus plus petits que l'angle du triangle ça marche plus ben tout simplement, on peut pas faire moins que 60 ... et oui oui ... n il est forcément plus grand ou égal à 60 euh
- Non pas n, p
- Non p c'est un nombre de côté, non c'est le nombre de polygones

Apparaît ainsi clairement ici le fait que la résolution d'un problème de la théorie se réalise en appui sur l'expérimentation, au-delà de considérations syntaxiques. C'est la manipulation « mentale » des objets de la famille des polygones réguliers, qui permet de constater une

[18] EXPRIME, EXpérimenter des Problèmes de Recherche Innovants en Mathématiques à l'Ecole, est une équipe de recherche regroupant des chercheurs de l'Université Lyon 1 (UFR de Mathématiques, IREM, S2HEP, IUFM) et de l'IFE.

impossibilité « ça marche plus ». On peut d'ailleurs constater que l'élaboration de cet élément de la théorie, s'appuie, non pas sur les objets polygones réguliers mais sur la famille de ces polygones.

V. CONCLUSION

La situation des pavages archimédiens, d'une approche pourtant aisée, a longuement résisté aux mathématiciens et résiste à ceux qui l'abordent comme un objet de recherche, objet d'étude, (objet « à » savoir et non objet « de » savoir, pour reprendre une expression de Audin et Duchet[19]). Les textes de Kepler montrent qu'une approche exploratoire liant action sur les objets et cadre théorique en construction s'avère féconde, même dans une interprétation du monde qui nous surprend encore. Ce qui apparaît également c'est que ces constructions ne peuvent se renouveler à l'identique pour peu que l'on considère le rôle de l'environnement culturel, environnement mathématique, scientifique, langagier ... Mais ce que nous pouvons toutefois espérer c'est qu'elles se renouvellent pour chaque individu, dans le cadre de situations que nous construisons avec cet objectif et qui doivent permettre, en favorisant l'élaboration de processus efficaces, d'améliorer la conceptualisation du monde de chacun des acteurs.

[19] Compte-rendu d'un atelier de présentation de MATh.en.JEANS par Pierre Audin et Pierre Duchet, en ligne : http://www.animath.fr/old/UE/UE04/MeJ.pdf

RÉFÉRENCES

Badoureau A. (1881) Mémoire sur les figures isoscèles. *Journal de l'Ecole polytechnique* 30, 47-172.

Barbin E. (1997) Sur les relations entre épistémologie, histoire et didactique. *Repères IREM* 27, 63-80.

Chasles M. (1837) *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*. Bruxelles : Editions Hayez.

Coxeter H. (1974) Kepler and mathematics. *Vistas in Astronomy* 18, 661-670.

Cuomo S. (2000) *Pappus of Alexandria and the mathematics of the lake antiquity*, Cambridge : Cambridge University Press.

Dias T., Durand-Guerrier V. (2008) Faire l'épreuve des objets en mathématiques, le cas des polyèdres réguliers. In *Actes du colloque : Efficacité et équité en éducation, IUFM de Bretagne et Université de Rennes.*

EXPRIME (2010) *Expérimenter des problèmes innovant en mathématiques à l'école.* Cédérom, INRP.

Front M., Legrand P. (2010) Pavages semi-réguliers du plan. *Bulletin de l'APMEP* 486, 60-66.

Front M. (2012) Pavages semi-réguliers du plan, une exploration favorable aux élaborations mathématiques. *Repères IREM 89.*

Kepler J. (1609) *Strena sive de Nive sexangula*. Traduction française (1975) *L'étrenne ou la neige sexangulaire*, Halleux R. (Trad.) Paris : Vrin-CNRS.

Kepler J. (1619) *Harmonices mundi.* Traduction française (1980) *L'harmonie du monde*. Peyroux J. (Trad.) Paris : Blanchard.

Lévy L. (1891) Sur les pavages à l'aide de polygones réguliers. *Bulletin de la Société philomatique de Paris* 8(3), 46-50.

Mazauric S. (2007) De l'âge baroque à l'âge classique : construction d'une nouvelle rationalité scientifique. In *Actes du colloque Histoire et agronomie : entre ruptures et durée* (pp. 90-104). Paris : IRD.

Pappus (~340). *Collection*. Traduction française (1933) *La Collection mathématique*. Ver Eecke P. (Trad.) Paris and Bruges : Desclée De Brouwer. Rééd. (1982) Paris : Blanchard.

Simon G. (1979) *Kepler astronome astrologue*. Paris : Gallimard.

Sommerville D. M. Y. (1905) Semi-regular networks of the plane in absolute geometry. *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* 41, 725-759.

Voelkel J. (2001) *The composition of Kepler's Astronomia nova*. Princeton : Princeton university press.