LA PHASE ARABE DE L'ALGEBRE (IX^{e}-XV^{e} S.)

Ahmed DJEBBAR*

Résumé – L'article expose la naissance de l'algèbre comme discipline, ses premiers pas en relation avec la géométrie euclidienne, ses orientations les plus importantes entre le IX^{e} et le XV^{e} siècle et la circulation, en Europe, à travers des traductions en latin et en hébreu de certains ouvrages algébriques écrits en arabe.

Mots-clefs : Algèbre, arabe, équations, polynômes, traduction

Abstract – The paper presents the birth of algebra as a discipline, its first steps in relation to Euclidean geometry, its most important orientations between the ninth and the fifteenth centuries and the diffusion in Europe, through Latin and Hebrew translations, of some algebraic books written in Arabic.

Keywords : Algebra, arabic, equations, polynomes, translation

I. INTRODUCTION

Depuis la seconde moitié du XIX^{e} siècle, la phase arabe[1] de l'histoire de l'algèbre a bénéficié d'un grand nombre d'étude de la part des historiens des mathématiques. Cela a permis de révéler quelques aspects de l'histoire de cette discipline et quelques spécificités de son contenu. Ainsi, nous disposons désormais d'un certain nombre d'informations fiables sur les premiers pas des pratiques algébriques à Bagdad, sur leur développement, en relation avec leur environnement scientifique, culturel et social, ainsi que sur la circulation partielle de la production algébrique de l'Orient vers l'Occident musulmans puis vers l'Europe médiévale.

Dans ce court exposé, nous allons tenter de faire le point sur l'état de la recherche dans ce domaine, en nous intéressant plus particulièrement au contenu des premiers écrits algébriques arabes, aux orientations les plus importantes de la discipline, aux obstacles auxquels se sont heurtés les chercheurs dans leurs investigations et aux solutions qu'ils ont élaborées pour contourner certains de ces obstacles. Dans une dernière partie, nous évoquerons, rapidement, ce qui est connu aujourd'hui de la réception de l'algèbre par les premiers foyers scientifiques du sud de l'Europe.

II. LES PREMIERS PAS DE L'ALGEBRE EN PAYS D'ISLAM

Il n'est pas possible, aujourd'hui, de dater les premières pratiques algébriques dans le cadre de la civilisation arabo-musulmane. Il semble qu'elles aient précédé la parution du célèbre ouvrage d'al-Khwârizmî (780-850), *L'Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison*, qui est considéré comme l'acte de naissance officiel de l'algèbre en tant que discipline (avec un nom, des objets, des outils, des justifications géométriques et des domaines d'application). Cette hypothèse est confortée par le fait que ce mathématicien ne s'attribue aucun des éléments nouveaux que renferme son manuel. Mais, le seul témoignage en faveur de l'existence de ces pratiques avant le IX^{e} siècle est très tardif. De plus, il n'est pas confirmé par d'autres sources et certaines informations qu'il rapporte ont un caractère légendaire qui affaiblit le reste du témoignage. Dans l'un de ses manuels, Ibn al-Jallâb, un mathématicien yéménite peu connu du XIII^{e} siècle, évoque ce que lui aurait dit un juriste, al-Yifrâshî, encore moins connu. Ce dernier affirme qu'à l'époque du second calife musulman

* Université des Sciences et des Technologies de Lille – France – ahmed.djebbar@wanadoo.fr

[1] C'est-à-dire la phase au cours de laquelle les ouvrages traitant de cette discipline étaient, pour la plupart, écrits en arabe.

‘Umar (634-644) des Persans ayant des connaissances en algèbre seraient arrivés à Médine. L’ayant appris, ‘Alî, le cousin et gendre du Prophète, aurait suggéré à ‘Umar de les charger d’enseigner ce nouveau savoir, en leur accordant une pension du trésor public. Il est même précisé que, parmi les premiers élèves, il y avait ‘Alî qui aurait assimilé les nouvelles techniques en moins d’une semaine. Puis, ce savoir-faire aurait circulé oralement jusqu’au début du IX^e siècle, date à laquelle le célèbre calife abbasside al-Ma’mun (813-833) aurait chargé al-Khwarizmî (m. 850) de rassembler les éléments encore disponibles dans un manuel qui devait être mis à la disposition des utilisateurs (Djebbar 2005, pp.41-42).

Ce petit livre, qui ne contient pas plus de 92 pages dans sa version imprimée, commence par une introduction dont le contenu confirme la dernière partie du témoignage que nous venons de rapporter. En effet, on y lit ceci :

> [J'ai été] exhorté à composer, dans le calcul de l'*algèbre* et d'*al-muqâbala* un livre concis ; j'ai voulu qu'il renferme ce qui est subtil dans le calcul et ce qui, en lui, est le plus noble, ce dont les gens ont nécessairement besoin dans leurs héritages, leurs legs, leurs partages, leurs arbitrages, leurs commerces, et dans tout ce qu'ils traitent les uns avec les autres lorsqu'il s'agit de l'arpentage des terres, de la percée des canaux, de la mensuration, et d'autres choses relevant du calcul et de ses sortes. (Rashed 2007, p.94)

1. Structure et contenu du premier livre d'algèbre en arabe

Le livre d'al-Khwârizmî est divisé en deux grandes parties. La première se subdivise en plusieurs petits chapitres. Dans le premier, l’auteur rappelle la définition du système décimal (qu’il a évoqué plus longuement dans un livre consacré à cette numération d’origine indienne et à ses utilisations) (Allard 1992). Puis, il définit les objets de l'algèbre : les *nombres* (entiers et rationnels positifs), le *mâl*[2] et la *racine* (sous-entendu du *mâl*). Puis, il présente les six équations canoniques que nous écrirons ainsi, à l'aide du symbolisme moderne, mais en respectant la formulation de l'auteur :

$$(1)\ aX = b\sqrt{X}\ ; \qquad (2)\ aX = c\ ; \qquad (3)\ b\sqrt{X} = c\ ;$$

$$(4)\ aX + b\sqrt{X} = c\ ; \quad (5)\ aX + c = b\sqrt{X}\ ; \quad (6)\ b\sqrt{X} + c = aX,$$

avec X désignant le *mâl* et a, b, c, des nombres positifs (entiers, rationnels positifs et, parfois, irrationnels quadratiques)[3].

Dans le second chapitre, l’auteur fournit, pour chacune des six équations un procédé de résolution permettant d'obtenir la valeur du *mâl* et de sa racine. Chaque étape de ce procédé est exprimée d'une manière générale avant d’être explicitée à l'aide d'un exemple. Puis il expose les justifications géométriques de l'existence des solutions de chaque équation, étant entendu qu’il s’agit uniquement de celles qui sont positives.

Dans le troisième chapitre, il explique la manière de formuler algébriquement un problème donné afin de le ramener à l'une des six équations précédentes. Dans le quatrième, il montre comment étendre les opérations arithmétiques classiques (addition, soustraction, multiplication, division et racine carrée) aux objets de l'algèbre de cette époque qui se limitaient alors aux entiers, aux rationnels positifs et à certains monômes. Il formule également ce qui sera appelé plus tard la règle des signes qui ne semble pas être de son invention puisqu’on la trouve dans des ouvrages qui traitent des procédés de calcul non indiens, c'est-à-dire ceux utilisés dans le calcul digital et mental.

---

[2] Mâl : mot arabe signifiant « *capital* », « *fortune* », « *bien* », « *troupeau* ».

[3] Ce qui correspond, dans la notation actuelle (où x est l’inconnue et non pas son carré), aux équations suivantes : $ax^2 = bx$; $ax^2 = c$; $bx = c$; $ax^2 + bx = c$; $ax^2 + c = bx$; $bx + c = ax^2$.

Le cinquième et dernier chapitre de la première partie du livre est constitué d'une quarantaine de problèmes d'application, groupés en trois thèmes (problèmes des dizaines, des biens et des hommes), et qui sont résolus à l'aide des outils des chapitres précédents : les *problèmes des dizaines* dans lesquels on doit déterminer deux valeurs dont la somme est dix et qui sont liés par une seconde relation du second degré ; les *problèmes des biens* où l'inconnue est un capital lié à des valeurs connues selon une équation du premier ou du second degré ; les *problèmes des hommes* dans lesquels il s'agit de partager une somme d'argent entre un certain nombre de personnes et sous certaines conditions.

La seconde partie du livre, quantitativement la plus importante, est consacrée exclusivement à la résolution de problèmes de transactions commerciales, d'arpentage et de répartition des héritages (selon la loi islamique).

Compte tenu de ce qui nous est parvenu des traditions mathématiques antérieures à l'islam qui ont eu à traiter des problèmes du premier et du second degré, on peut affirmer que l'apport d'al-Khwârizmî ne se situe pas au niveau des procédés de résolution. Sa contribution a consisté à rassembler des définitions des opérations des procédés de résolution et des démonstrations qui étaient auparavant éparpillés ou qui n'étaient pas formulés explicitement. Cet assemblage semble répondre à une logique qui vise à distinguer clairement ce nouveau chapitre des autres chapitres du vaste domaine de la science du calcul (Rashed 2007, pp. 96-330).

2. *Les premiers prolongements de l'algèbre arabe*

Le caractère encore très lacunaire de nos connaissances relatives aux activités algébriques du IX^{e} siècle, ne nous permet pas de dater les premières contributions qui ont été inspirées par le livre d'al-Khwârizmî. Nous nous contenterons donc d'évoquer des travaux plus tardifs sans qu'on puisse d'ailleurs préciser le contenu de certains d'entre eux. Des bibliographes signalent la publication, au cours de la seconde moitié du IX^{e} siècle et du début du X^{e}, d'une série d'ouvrages consacrés exclusivement à l'algèbre. Certains, comme ceux de Sinân Ibn al-Fath, d'as-Saydanânî et d'abû l-Wafâ' (m. 997), sont des commentaires du livre d'algèbre d'al-Khwârizmî puisque cela est mentionné dans leurs titres. D'autres, comme ceux d'ad-Dinawârî, et d'al-Missîsî sont intitulés *Livre d'algèbre* sans référence au premier manuel d'algèbre.

A côté de ces ouvrages qui ne nous sont pas parvenus, on remarque la production d'autres écrits dont la caractéristique commune a été de réaliser l'interpénétration entre l'algèbre naissante et la géométrie grecque. C'est ainsi que Thâbit Ibn Qurra (m. 901) a rédigé un opuscule, intitulé *La justification des problèmes de l'algèbre par les preuves géométriques*, dans lequel il est le premier, à notre connaissance, à utiliser des propositions des *Eléments* d'Euclide pour établir l'existence des solutions des équations quadratiques. De son côté, al-Ahwâzî (X^{e} s.) a suivi, dans une de ses épîtres, la démarche inverse qui a consisté à utiliser des équations algébriques pour expliciter certaines grandeurs incommensurables du Livre X des *Eléments*. Son travail s'inscrivait en fait dans un projet plus large concernant l'extension de la notion de nombre : dans une première étape, les grandeurs incommensurables du Livre X ont été arithmétisées en quelque sorte et ont été assimilées à des nombres irrationnels. Dans une seconde étape, Ces nombres ont été enrichis par l'introduction de nouveaux irrationnels qui ne pouvaient pas s'obtenir à l'aide des procédés géométriques d'Euclide. C'est le cas des racines $n^{\text{ièmes}}$, avec n impair, qui sont définies par al-Mâhânî (m. 888). Plus tard, des progrès ont été faits dans l'extension des opérations arithmétiques classiques à ces nouveaux nombres. C'est ce qu'a fait, en particulier, al-Baghdâdî (XI^{e} s.), dans son livre intitulé *Le livre de la complétion en calcul* (Djebbar 2005, pp. 49-54).

3. *Les contributions du X^e siècle*

Les travaux de cette période concernent deux domaines déjà présents dans le livre d'al-Khwârizmî : celui des objets de l'algèbre et celui des opérations qui leurs sont appliquées. On voit d'abord apparaître, dans les équations du premier et du second degré, des coefficients et des racines qui ne sont pas seulement des entiers ou des rationnels mais également des irrationnels quadratiques et biquadratiques, comme cela est le cas dans un grand nombre de problèmes résolus par Abû Kâmil dans son important traité *Le livre complet en algèbre*. Ce progrès a été rendu possible grâce aux travaux relatifs au livre X des *Eléments* qui ont permis d'appliquer aux grandeurs de ce livre les opérations arithmétiques classiques.

Le second sujet, étudié ou simplement effleuré par certains mathématiciens de ce siècle, est celui de la généralisation de la notion de puissance et son application à l'étude des équations. D'après le témoignage de Sinân Ibn al-Fath, plusieurs mathématiciens, avant lui, avaient été amenés à considérer des monômes de degré supérieur à 2 et à leur donner des noms, mais il dit être le premier à avoir rédigé un exposé systématique sur cette question et à s'être servi de ces nouveaux objets pour étendre le domaine des équations résolubles par radicaux. Son étude contient, pour la première fois à notre connaissance, la notion générale de monôme de degré quelconque ainsi que le procédé de génération de ces monômes. Il est également le premier à avoir défini et résolu toutes les équations de degré $2n+p$ qui se ramènent (par simplification par x^p puis par changement d'inconnue : $X = x^n$) aux six équations canoniques d'al-Khwârizmî (Djebbar 2005, pp. 51-54).

III. L'ALGEBRE DES XI^e-XII^e SIECLES

1. *Les polynômes, des objets d'études nouveaux*

Vers la fin du X^e siècle ou au début du XI^e, des prolongements aux travaux d'Ibn al-Fath sont réalisés par le mathématicien persan al-Karajî (m. 1029). Il semble avoir été le premier à exposer les premiers éléments d'une théorie des polynômes, avec l'extension des opérations arithmétiques classiques (addition, soustraction, multiplication) aux monômes et à leurs inverses, en utilisant, explicitement, la notion de puissance et les opérations d'addition et de soustraction de ces puissances. A cette occasion, al-Karajî expose le procédé de construction du triangle arithmétique et la manière de l'utiliser pour déterminer le développement du binôme. Ces études ont été poursuivies par as-Samaw'al (m. 1175) qui a justifié la division d'un polynôme par un autre polynôme composés tous deux de monômes ajoutés ou retranchés et qui a appliqué l'opération d'extraction de la racine carrée à un polynôme carré parfait.

La nature de ces études et leur complexité ont nécessité l'introduction d'un premier symbolisme, celui des tableaux qui a permis aux algébristes de cette époque de représenter chaque polynôme par ce que nous appelons aujourd'hui la suite de ses coefficients disposés dans les colonnes correspondants à leurs monômes respectifs.

Avec ces contributions, l'algèbre a connu un premier saut qualitatif. En effet, après avoir été un instrument de calcul axé sur la résolution des équations, elle a acquis, avec l'étude des polynômes comme nouveaux objets mathématiques, une certaine dimension théorique qui pouvait lui ouvrir de nouvelles voies.

2. *Les systèmes d'équations*

Malgré la présence, dans la troisième partie du livre d'al-Khwârizmî, de quelques problèmes d'héritage pouvant aboutir à des systèmes d'équations, il ne semble pas que son livre soit à l'origine de ce chapitre de l'algèbre. La forme de certains problèmes, comme ceux où les inconnues sont des volatiles, suggérerait plutôt une origine chinoise ou indienne. Mais, les premiers ouvrages mathématiques qui ont abordé l'étude des systèmes d'équations et qui pouvaient nous renseigner sur leurs sources, n'ont pas encore été retrouvés.

Quant à ceux qui nous sont parvenus, et qui sont du Xe ou du XIe siècle, ils ont une facture assez élaborée qui confirme l'existence d'une activité antérieure : il y a, tout d'abord, le *Livre complet en algèbre* d'Abû Kâmil (m. 930) qui traite, dans sa troisième partie, quelques problèmes de ce type sans souci de classification ou de systématisation, mais plutôt comme des exemples d'application des procédés de l'algèbre. Un autre livre du même auteur, intitulé *Les choses rares en calcul,* est entièrement consacré aux systèmes d'équations. Six problèmes seulement y sont traités et, à chaque fois, il s'agit d'acheter, avec une somme donnée, un nombre fixé de volatiles de plusieurs sortes (passereaux, poulets, pigeons, canards ou alouettes). Dans cet opuscule, on trouve une première classification des systèmes d'équations : ceux qui sont impossibles, ceux qui ont une et une seule solution et ceux qui peuvent en avoir plusieurs.

Après lui, al-Karajî reprend, dans son *Fakhrî en algèbre*, des problèmes du même type sans toutefois les regrouper dans un chapitre autonome. Ces problèmes aboutissent à des systèmes d'ordre inférieur ou égal à 4. A peu près à la même époque, Ibn al-Haytham (m. *ca*. 1041), publie une *Epître sur les problèmes de rencontre*, consacrée exclusivement aux systèmes d'équations à *n* inconnues, *n* quelconque, qui sont du type :

$$p_i x_i = q_j x_j \text{ , } 1 < i,j < n \text{ ; } i \neq j$$

Dans cette étude, la démarche d'Ibn al-Haytham est différente de celle de ses prédécesseurs dans la mesure où son traitement des problèmes adopte une démarche générale et s'accompagne de démonstration alors qu'avant lui, on se contentait d'exposer les méthodes de résolution. On ne sait pas si, après lui, ce chapitre a fait l'objet de nouvelles recherches en pays d'Islam. En tout cas, cela n'est pas confirmé par les livres d'algèbre connus postérieurs à celui d'Ibn al-Haytham (Djebbar 2005, pp. 54–60).

3. *L'analyse indéterminée*

Au vu des problèmes qui nous sont parvenus, ce chapitre semble être un prolongement de pratiques que l'on trouve dans la tradition arithmétique grecque. Le plus ancien auteur connu ayant traité ce type de problèmes est Abû Kâmil. Dans son livre d'algèbre, il résout des équations et des systèmes d'équations du premier ou du second degré dont le second membre est toujours un carré non fixé. Aujourd'hui, ces systèmes seraient exprimés ainsi :

$$x^2 + a_1 x + b_1 = \square_1$$

$$x^2 + a_2 x + b_2 = \square_2$$

Les méthodes utilisées par Abû Kâmil ne sont pas identiques à celles que l'on trouve dans les dix chapitres des *Arithmétiques* de Diophante qui nous sont parvenus. Il faut d'ailleurs préciser que la traduction partielle de cet ouvrage en arabe a été réalisée par Qustâ Ibn Lûqâ (m. 910) qui était son contemporain. Il semble donc qu'Abû Kâmil ne connaissait pas l'existence de cette traduction au moment où il rédigeait son ouvrage. Sinon, il aurait au moins évoqué son contenu. Par contre, il fait référence à des pratiques qui existaient à son époque et qui concernaient des problèmes qualifiés « d'indéterminés » ou « à plusieurs solutions ».

Cela dit, la traduction des livres de Diophante a enrichi considérablement ce chapitre et a favorisé son développement. Ainsi, dès la seconde moitié du Xe siècle, un certain nombre de mathématiciens a étudié ce qui avait été traduit des *Arithmétiques*. Le plus connu d'entre eux est Abû l-Wafâ' mais ses contributions dans ce domaine n'ont pas encore été retrouvées. Ces travaux ont probablement préparé le terrain à al-Karajî. Ce dernier a traité de ces problèmes dans deux de ses ouvrages, le *Fakhrî* qui est consacré, en grande partie à la résolution de problèmes indéterminés, et le *Livre merveilleux en calcul*. Dans le second traité, l'auteur présente une étude systématique de ce chapitre en donnant une classification des problèmes traités et des méthodes de résolution pour chaque catégorie d'équations (Djebbar 2005, pp. 60–63).

4. La géométrie au secours de l'algèbre

Parmi les tentatives d'extension des outils de l'algèbre d'al-Khwârizmî à des domaines nouveaux, il y a celles qui ont concerné les problèmes dits « solides » et qui s'exprimeraient aujourd'hui sous forme d'une équation du troisième ou du quatrième degré. La première de ces tentatives a été celle d'al-Mâhânî (m. 888) qui a essayé, sans succès, de résoudre, par radicaux, l'équation suivante :

$$x^3 + c = x^2 \ ; c > 0$$

Sa résolution devait permettre d'établir, par une méthode non géométrique, le lemme de la proposition 4 du Livre II du traité d'Archimède (m. 212 av. J.C.) sur *La sphère et le cylindre* qui concerne la division d'une sphère en deux parties dont les volumes V_1 et V_2 vérifient le rapport suivant :

$$\frac{V_1}{V_2} = \lambda \ ; \lambda > 0$$

Cet échec a été suivi par d'autres tentatives dont certaines ont fini par aboutir en faisant intervenir la géométrie des coniques. C'est ainsi qu'al-Khâzin (X^e s.) et, après lui, Ibn al-Haytham, ont établi, chacun de son côté, l'existence de la solution positive de l'équation d'al-Mâhânî à l'aide de l'intersection de deux sections coniques. Au cours de ce même siècle, al-Kûhî résout, selon une démarche semblable, un problème nouveau, celui de la détermination d'une portion de sphère de volume égal à celui d'une portion de sphère donnée et de surface égale à celle d'une autre portion de sphère donnée.

L'aboutissement de ces recherches partielles a été l'élaboration, par 'Umar Al-Khayyâm (m. 1131), d'une classification et d'une étude complète des 25 équations de degré inférieur ou égal à 2. Cette étude fait intervenir des cercles, des paraboles et des hyperboles pour établir l'existence des solutions positives des équations (Djebbar et Rashed 1981).

Quelques décennies plus tard, un autre mathématicien persan, Sharaf ad-Dîn at-Tûsî (m. 1273), publie une nouvelle étude de ces équations qui va plus loin que la contribution d'al-Khayyâm. Il y présente une nouvelle classification des équations en fonction du nombre de leurs solutions et non pas du degré des monômes qui interviennent dans chacune d'elle. Il étudie également la relation entre les coefficients de chaque équation du troisième degré et l'existe de ses solutions positives en introduisant la notion de « maximum » d'un polynôme. Et pour déterminer ce maximum, il résout, à chaque fois, une équation auxiliaire que l'on obtiendrait aujourd'hui en « dérivant » le polynôme du troisième degré associé à l'équation étudiée (Rashed 1984, pp. 148-93).

IV. L'ALGEBRE AUX $XIII^e$-XIV^e SIECLES

En Orient, de nouvelles recherches ont été entreprises en algèbre mais, à notre connaissance, aucune n'a abouti. A la fin du $XIII^e$ siècle Ibn al-Khawwâm (m. après 1324) rassemble à la fin de son *Livre à Bahâ' ad-Dîn sur les choses utiles en calcul*, les énoncés de 36 problèmes que ses prédécesseurs et lui-même n'avaient pas réussi à résoudre par une méthode algébrique. Certains d'entre eux s'expriment sous forme d'équations du 3^e et du 4^e degré ou de systèmes d'équations indéterminées. Au XIV^e siècle, al-Kâshî (m. 1429) a commencé l'étude des équations de degré inférieur ou égal à 4, mais il ne semble pas qu'il ait abouti à des résultats tangibles. A peu près à la même époque, le mathématicien du Caire, Ibn al-Majdî (m. 1447), se contente de dénombrer les équations à coefficients positifs, de degré inférieur ou égal à n (Djebbar 2005, pp. 70-72).

En Occident musulman, les informations concernant l'algèbre sont postérieures au XII^e siècle. Nous disposons en effet de trois ouvrages consacrés exclusivement à cette discipline. Le plus ancien semble être le poème mathématique d'Ibn al-Yâsamîn (m. 1204). Son auteur y expose les algorithmes de résolution des six équations canoniques et quelques opérations sur les irrationnels quadratiques et sur les monômes. Son contenu ne reflète donc pas le niveau de l'algèbre à son époque. Il s'agit en fait d'une sorte d'aide-mémoire pour les enseignants et pour les étudiants. C'est probablement sa forme versifiée et la facilité avec laquelle il pouvait être mémorisé qui ont permis à ce poème de circuler et de s'imposer tout au long des trois siècles suivants. Ce succès est confirmé par les nombreux commentaires dont il a bénéficié au Maghreb et en Egypte et par les références à son contenu.

Le second livre est *L'abrégé en algèbre* d'Ibn Badr. Au vu de son nom, l'auteur semble être d'origine andalouse mais nous ne savons pas où il a vécu et où il a enseigné. Son ouvrage a été écrit avant 1343, date à laquelle a été réalisée la seule copie qui nous en est parvenue. Son contenu s'inscrit dans la double tradition d'al-Khwârizmî et d'Abû Kâmil, avec certains éléments nouveaux qui sont apparus après le X^e siècle. On sait aussi que des copies ont circulé, au XIV^e siècle, à Fès et à Ceuta puis au XV^e siècle à Tunis. Mais les auteurs maghrébins postérieurs au $XIII^e$ siècle, dont les écrits ont été analysés, ne le citent pas et ne reprennent pas les problèmes qui y sont traités.

Le troisième écrit consacré exclusivement à l'algèbre est intitulé *Livre des fondements et des prémisses en algèbre*. Il a été publié à Marrakech, au tout début de la carrière de son auteur, Ibn al-Bannâ (m. 1321). Son contenu a fait l'objet d'une polémique dans le milieu des mathématiciens maghrébins de l'époque, puisque certains d'entre eux ont prétendu que son auteur n'avait fait que résumer le livre d'al-Qurashî, un de ses prédécesseurs. Quoi qu'il en soit, et en l'absence du traité de ce dernier, on peut affirmer qu'on est en présence du dernier ouvrage d'algèbre de l'Occident musulman. Son contenu, qui se rattache clairement à la tradition d'Abû Kâmil, est en deux parties : la première expose les fondements et les préliminaires relatifs aux nombres. C'est un résumé de certains livres des *Eléments* d'Euclide, avec quelques ajouts comme la division par des expressions irrationnelles de la forme : $n+\sqrt{m}+\sqrt{p}$. La seconde partie traite de la résolution des différents types de problèmes à l'aide des méthodes algébriques, en exposant et en résolvant d'abord ceux qui sont à solutions entières ou rationnelles puis, dans un dernier chapitre, ceux à solutions irrationnelles. Cette partie du livre est, à quelques exceptions près, une reprise abrégée, mais dans une présentation différente, des problèmes d'Abû Kâmil. Mais, on y trouve aussi des problèmes absents du livre de ce dernier, comme la décomposition d'un entier en somme de deux carrés d'entiers ou de rationnels.

Après Ibn al-Bannâ, trois types d'écrits mathématiques ont traité de questions d'algèbre. Il y a d'abord les commentaires portant sur des écrits antérieurs : ceux qui explicitent les vers, parfois hermétiques, du poème algébrique d'Ibn al-Yâsamîn et ceux, plus nombreux (une quinzaine), qui visent à expliciter le contenu de *L'Abrégé des opérations du calcul* d'Ibn al-Bannâ. Il y a aussi des chapitres dans des ouvrages de calcul. Ils sont généralement regroupés à la fin de chaque livre, à la suite des chapitres exposant d'autres méthodes de résolution des problèmes de la vie de tous les jours (règle des quatre proportions et méthodes de fausse position).

Il y a enfin des opuscules autonomes, souvent anonymes. L'analyse de ces écrits montre qu'ils ne contiennent rien de nouveau. Mais ils confirment, clairement, l'utilisation intensive d'un symbolisme algébrique dans l'enseignement mathématique du Maghreb des XIV^{e}-XV^{e} siècles. Ce symbolisme était utilisé pour exprimer les équations du premier et du second degré avec leurs algorithmes de résolution ainsi que les polynômes et les opérations arithmétiques qui leur étaient appliquées. Le *Livre de la fécondation des esprits sur l'utilisation des chiffres de poussière* d'Ibn al-Yâsamîn est le plus ancien texte connu contenant ce type de symbolisme.

Une des dernières contributions de nature algébrique, repérée dans un ouvrage écrit au Maghreb, est celle d'al-Qatrawânî (XIV^{e} s.), un mathématicien d'origine égyptienne qui a enseigné à Tunis. Dans son livre intitulé *La succion du nectar de la bouche des opérations du calcul*, il y a un chapitre d'algèbre consacré à la détermination de la racine n^{ième} d'un polynôme abstrait. Pour la racine carrée, il suit une démarche identique à celle de son prédécesseur al-Karajî mais en remplaçant les tableaux, dont les colonnes représentent les monômes a_1x, a_2x^2, a_3x^3, etc., par l'écriture des polynômes à l'aide des symboles algébriques que nous avons déjà évoqués et qui étaient devenus, à son époque, un outil d'usage courant dans les foyers scientifiques du Maghreb. Dans le même livre, l'auteur traite aussi de l'extraction de la racine cubique d'un polynôme. Ce problème n'a été traité ni par al-Karajî ni par son successeur as-Samaw'al, les seuls mathématiciens connus qui se sont occupés de ce sujet avant al-Qatrawânî (Djebbar 2005, pp. 73-103).

V. LA CIRCULATION DE L'ALGEBRE ARABE EN EUROPE

Compte tenu des résultats de recherches récentes qui ont révélé de nouveaux aspects de la transmission de l'algèbre arabe vers l'Europe médiévale, on peut dire, aujourd'hui, que cette transmission s'est effectuée en plusieurs étapes et qu'elle a revêtu diverses formes. Au cours de la période antérieure à la conquête de Tolède par les Castillans (1085), des Européens ont probablement eu accès à certains traités de *Calcul pour les transactions*, soit directement soit par l'intermédiaire de traductions orales. Nous savons, par exemple, qu'entre 967 et 970, Gerbert d'Aurillac (m. 1003), le futur pape Sylvestre II, a séjourné dans le nord de la péninsule ibérique, qu'il a étudié quelques rudiments des mathématiques arabes et qu'il a été un des premiers vecteurs de la diffusion de certains aspects de la science du calcul. Comme l'algèbre était considérée, encore à cette époque, comme un chapitre du calcul, il est probable que Gerbert ait eu connaissance des procédés algébriques et qu'il ait favorisé leur diffusion dans les milieux cultivés de son époque. Mais les sources connues ne permettent pas de confirmer cette hypothèse.

Après 1085, de nombreuses personnes, venues de différentes régions d'Europe, se sont mises à étudier l'arabe, d'abord à Tolède puis dans d'autres villes. Certaines d'entre elles ont pu ainsi se spécialiser dans la traduction d'œuvres scientifiques et philosophiques. Parmi elles, il y a eu le livre d'algèbre d'al-Khwârizmî qui a été traduit en latin, une première fois en 1145, à Ségovie, par Robert de Ketton, puis une seconde fois par Gérard de Crémone (m. 1187) et peut-être une troisième fois par de Lunis.

Parallèlement, et toujours au XII^{e} siècle, des auteurs européens, qui semblent avoir appris suffisamment d'arabe pour comprendre les mathématiques, ainsi que des Juifs arabisés de la péninsule ibérique, ont rédigé, directement en latin ou en hébreu, des manuels de calcul qui s'inscrivent complètement dans la tradition algébrique et arithmétique arabes. Pour les ouvrages hébraïques, on peut citer le *Liber Embadorum* d'Abraham Bar Hiyya. Pour les ouvrages latins, nous avons deux exemples importants : le premier est le *Liber Mahameleth* d'un auteur anonyme qui a vécu à Séville ou à Tolède et qui y a appris l'arabe. Le second est le *Liber Abaci* de Leonardo Pisano (m. après 1240) qui est le premier grand mathématicien de l'Europe médiévale. Comme il le dit lui-même, Pisano a appris l'arabe et le calcul au Maghreb dans la ville de Bejaïa, avant de poursuivre sa formation scientifique en Orient. Les deux ouvrages que nous venons d'évoquer se réfèrent plusieurs fois aux contenus des livres d'algèbre d'al-Khwârizmî et d'Abû Kâmil.

Quant aux traductions en hébreu des ouvrages arabes traitant de l'algèbre, elles ont également commencé au XII^{e} siècle et se sont prolongées jusqu'au XV^{e} siècle puisque il nous est parvenu une traduction, dans cette langue, du livre d'algèbre d'Abû Kâmil, réalisée, en 1460, par l'italien Mordechaï Finzi.

Ce ne sont là que quelques exemples qui ne peuvent pas exprimer toute l'importance du phénomène de traduction. Mais, ils permettent d'en saisir la diversité et la richesse. Ils montrent aussi la nécessité d'étudier les écrits mathématiques latins et hébraïques du moyen-âge, afin de mieux connaître encore le contenu de l'algèbre arabe, surtout lorsqu'on sait que certains ouvrages mathématiques arabes ne nous sont parvenus qu'à travers leurs traductions dans ces deux langues (Djebbar 2005, pp. 105-116).

REFERENCES

Allard A. (1992) *Al-Khwârizmî, le calcul indien (Algorismus)*. Paris : Blanchard – Namur : Société des Etudes Classiques.

Djebbar A. (2005) *L'algèbre arabe, genèse d'un art*. Paris : Vuibert-Adapt.

Djebbar A., Rashed R. (1981) *L'œuvre algébrique d'al-Khayyâm*. Alep : I.H.A.S.

Rashed R. (2007) *Al-Khwârizmî, le commencement de l'algèbre*. Paris : Blanchard.

Rashed R. (1984) *Entre Arithmétique et Algèbre, recherches sur l'histoire des mathématiques arabes*. Paris : Les Belles lettres.