UNE SÉQUENCE D'INTRODUCTION DES NOTIONS DE TOPOLOGIE DANS IR^N : DE LA CONCEPTION À L'EXPÉRIMENTATION

Stéphanie BRIDOUX
Équipe Didirem, Paris 7
Université de Mons-Hainaut, Belgique
Stephanie.Bridoux@umh.ac.be

Résumé
Les définitions des notions d'intérieur, d'adhérence d'un ensemble, d'ouvert et de fermé mettent en jeu un formalisme complexe auquel les étudiants ont souvent des difficultés à donner du sens. Dans cette communication, je présente une séquence d'introduction de ces notions. En faisant travailler les étudiants avec d'autres registres d'écriture que celui du langage formel, cette séquence vise à ce qu'ils développent une vision plus intuitive des notions de topologie sur laquelle ils pourront ensuite s'appuyer pour manipuler le formalisme contenu dans les définitions.

Dans un premier temps, je développe les éléments qui ont contribué à l'élaboration de la séquence. En particulier, j'explique comment une réflexion historique et épistémologique s'est incorporée à mon travail et quelles sont les pistes d'enseignement qui en ont découlé. Je présente ensuite la séquence en question et les résultats obtenus, après l'avoir expérimentée auprès de mes étudiants.

1. INTRODUCTION

De par mon expérience d'enseignante, j'ai pu remarquer, au fil des années, que l'enseignement des premières notions de topologie dans l'espace Υ^N est source de difficultés auprès de mes étudiants. Ce constat est notamment étayé par le fait qu'aux évaluations, des erreurs sont repérées dès la restitution des définitions de ces notions. Un phénomène récurrent est que les étudiants donnent souvent des définitions incomplètes ou encore, des définitions vérifiées par tous les objets. Un aspect frappant est qu'ils utilisent alors ces définitions dans les exercices sans s'apercevoir qu'elles mènent à des conclusions incohérentes. Les notions visées dans cet enseignement sont celles d'intérieur et d'adhérence d'un ensemble et celles d'ensemble ouvert et d'ensemble fermé. Les définitions présentées au cours sont données en annexe. Le public visé est constitué d'étudiants en première année universitaire inscrits dans une filière mathématique à l'UMH, en Belgique.

Une analyse du cours théorique de topologie dont il est question ici et des exercices proposés aux étudiants a permis de préciser les difficultés d'enseignement de ces notions (Bridoux, 2005). J'évoque ici les aspects les plus frappants de cette analyse. Le point de départ de ce travail a été d'interpréter les notions de topologie en termes de notions formalisatrices, unificatrices et généralisatrices (Robert, 1998), notées notions FUG par la suite. Ces notions introduisent de la généralité en unifiant des notions antérieures grâce à un nouveau formalisme. Les notions FUG ont des caractéristiques épistémologiques qui tiennent à une genèse longue, le passage des notions primitives à leur généralisation est souvent long et sinueux. Ces notions sont difficiles à introduire car il n'est pas facile de trouver un problème initial permettant aux étudiants de faire fonctionner seules les nouvelles notions. De plus, la distance entre les connaissances anciennes des étudiants et les nouvelles notions est souvent grande. Les travaux d'A. Robert sur la notion de convergence d'une suite (Robert, 1998) ou encore, ceux de J.-L. Dorier sur la notion d'espace vectoriel (Dorier, 1997) ont permis d'identifier les caractères formalisateur, unificateur et généralisateur de ces notions.

Cette interprétation des notions de topologie en termes de notions FUG a été non seulement légitimée mais aussi précisée dans mon analyse. Du côté du cours théorique, les notions sont introduites par leurs définitions formelles sans réelle motivation. L'absence d'une situation d'introduction et la complexité du formalisme contenu dans les définitions sont telles que les étudiants parviennent difficilement à donner du sens aux nouvelles notions. Du côté des exercices, les énoncés proposés aux étudiants consistent essentiellement à manipuler les définitions. J'ai montré que ce type de travail met en jeu des connaissances qui sont en cours d'acquisition (par exemple la convergence des suites, des connaissances en logique et en théorie des ensembles) et donc probablement pas encore disponibles chez la plupart des étudiants. D'autre part, ce travail de manipulation formelle ne met pas en jeu des connaissances de nature topologique (Bridoux, 2006). Ainsi, c'est le caractère formalisateur des notions qui est essentiellement développé dans cet enseignement de topologie. Une conséquence est que la dynamique entre les aspects formel et conceptuel n'est pas productrice de sens.

Un des enjeux de mon travail de thèse, actuellement en cours, est de proposer un scénario d'enseignement visant à rendre cette dynamique productive, notamment en élaborant des situations d'introduction des notions et en concevant des exercices dans lesquels les nouvelles notions apparaissent comme un outil de résolution adapté au problème.

Dans ce texte, j'aborde la question de l'introduction des notions. Mon objectif est double : d'une part pointer quelques éléments qui ont contribué à l'élaboration d'une séquence d'introduction de certaines notions de topologie et d'autre part, présenter les résultats obtenus après avoir expérimenté la séquence auprès de mes étudiants.

2. LE BESOIN D'UN ÉCLAIRAGE NOUVEAU SUR LES CONCEPTS

L'analyse qui vient d'être présentée renseigne sur le fonctionnement du savoir et sur les connaissances mises en jeu. Elle a permis de repérer certaines caractéristiques des notions dans le paysage mathématique des étudiants. Cependant, cette étude reste spécifique à un système d'enseignement précis. Il s'agit donc d'adopter un point de vue plus général pour interroger ce qui peut contribuer à l'élaboration du sens des notions à enseigner. Je fais l'hypothèse que de préciser les spécificités des notions de topologie, et notamment leurs caractères formalisateur, unificateur et généralisateur, pourra éclairer mon propos. Pariès et al. (2007) utilisent le mot « relief » pour qualifier « des éléments qui pourraient contribuer par exemple à trouver des repères permettant de s'adapter à la spécificité de chaque notion nouvelle… » En ce sens, ma démarche consiste à chercher des éléments qui mettraient une forme de « relief » sur les notions à enseigner.

L'idée d'étudier les spécificités des notions de topologie en adoptant un point de vue général m'a amenée à analyser comment se produit le passage du savoir savant au savoir enseigné, c'est-à-dire le phénomène de transposition didactique, au sens de Chevallard (1991).

Dans ce texte, je me place du côté du savoir savant. Du côté du savoir enseigné, une analyse de manuels est en cours. Mon propos vise à expliquer comment des préoccupations épistémologiques et historiques se sont intégrées à mon travail et quelles pistes sont apparues pour la conception d'une situation d'introduction des notions de topologie.

Dans un premier temps, il me semble important de préciser la nature du travail qui a été réalisé. Dans son travail de synthèse, J.-L. Dorier (2000) interroge les liens entre les trois domaines que sont l'épistémologie, l'histoire et la didactique des mathématiques. Comme il le souligne, « une part importante de l'analyse didactique consiste à prendre en compte l'évolution et la constitution historique du savoir mathématique dans la sphère savante et ses rapports avec la constitution du savoir enseigné. » Un certain nombre de travaux en didactique des mathématiques ont intégré une réflexion historique et épistémologique en préalable aux analyses didactiques (par exemple le travail de thèse de C. Ouvrier-Buffet (2003) sur le concept de définition ; ou bien celui de C. Bardini (2003) sur le symbolisme algébrique).

Je tiens à souligner ici le caractère modeste de ma démarche. Le récit d'éléments historiques concernant la topologie, considérée comme une discipline mathématique, existe déjà dans divers travaux (voir par exemple Dieudonné (1978), Manheim (1964) ou James (1999)). Mon projet est d'en retirer les éléments que je juge pertinents pour mon travail. Mon objectif reste donc piloté par la didactique des mathématiques. Cette vue sélective m'amène à incorporer une composante épistémologique dans l'histoire retracée. Je partage cependant le point de vue développé dans Pariès et al. (2007) à propos du travail dont il est question :

> [...] *ce travail diffère fondamentalement de celui de l'historien ou de l'épistémologue : nous ne faisons pas avancer les réflexions sur le sujet, nous cherchons à tirer des travaux déjà faits des éléments assez globaux, comme notamment les problèmes éventuels ou les projets à l'origine des avancées. Cela nous renseigne aussi sur les difficultés qui se sont présentées et les erreurs résistantes, sur l'ordre dans lequel les différentes notions sont apparues, etc*. (op. cit., p. 2)

En lien avec la question de l'introduction des notions, je me suis attachée à reconstituer des éléments sur l'émergence des notions et sur les types de problèmes qui ont motivé l'introduction des notions. Précisons également que je ne me suis pas restreinte aux notions de topologie concernées par l'enseignement décrit dans l'introduction. Mon étude s'est élargie à des notions clés de la topologie générale, telles que celles de voisinage ou d'espace topologique.

3. SPÉCIFICITÉS DES NOTIONS DE TOPOLOGIE ET PERSPECTIVES D'ENSEIGNEMENT

Dans cette partie, je pointe succinctement quelques faits historiques qui ont permis de préciser les caractères formalisateur, unificateur et généralisateur des notions de topologie. Je développe ensuite des pistes d'enseignement qui en ont découlé et les choix réalisés pour concevoir une situation d'introduction des notions.

3.1. Une vue générale

Prise au sens large du terme, la topologie désigne l'étude des propriétés qui sont invariantes par homéomorphisme. La nécessité de ce type d'étude est apparue lorsque les mathématiciens ont été amenés à définir rigoureusement des notions jusqu'à alors intuitives et de nature géométrique, telles que la compacité ou celle de déformation continue. D'abord connue sous le nom d'*analysis situs*, qui signifie littéralement une analyse de positions, la topologie (mot introduit par Listing en 1836) trouve ses sources dans l'idée de travailler avec un type de géométrie dans lequel on n'a pas recours à la notion de distance. Les travaux au cœur de ce projet font émerger des notions qui constituent davantage les prémisses de la topologie algébrique que de la topologie générale, ce qui m'éloigne de mon projet. Il faut d'ailleurs attendre la fin du 19^{e} siècle pour que la topologie se scinde en deux domaines distincts, qui deviendront la topologie générale et la topologie algébrique. La volonté de travailler sans faire appel à la notion de distance est aussi présente en topologie générale pour définir les notions de limite et de continuité, donc de proximité. Les premières notions de topologie en lien avec mon travail émergent au fil du 19^{e} siècle, d'une part des développements de l'analyse dans ϒ et de la volonté de définir rigoureusement les notions de base de l'analyse, et d'autre part des développements de l'analyse fonctionnelle. Bien que très succinct, ce panorama général met en évidence que l'émergence des notions de topologie provient de trois sources (au moins). Une source est liée aux fondements de l'analyse ; elle fait notamment émerger les notions de limite et de continuité de fonctions en termes de voisinages. Une construction rigoureuse de l'ensemble des nombres réels permet également de comprendre la structure topologique de cet ensemble. Une autre source est liée à l'intuition géométrique. Par exemple, dans ses travaux sur les surfaces, Riemann utilise différents modes de représentation pour avoir une idée intuitive de ce que sont ces objets abstraits avec lesquels il travaille. Cette source mène davantage à l'émergence de la topologie algébrique qu'à la topologie générale et s'éloigne donc des notions qui sont au cœur de mon travail. Une troisième source est liée à une volonté de travailler avec des ensembles dont les éléments ne sont pas des nombres réels ; elle fait émerger des notions plus abstraites telles que celle d'espace topologique. On est alors au début du 20^{e} siècle.

3.2. Le caractère unificateur des notions

Deux types de questionnements occupent les mathématiciens du 19^{e} siècle : d'une part la volonté de définir rigoureusement les notions de base de l'analyse, d'autre part l'étude des séries. Des notions de topologie émergent de ces deux types de questionnement.

Dans un cours sur le calcul différentiel, K. Weierstrass (1874) définit la notion de continuité d'une fonction. Après avoir énoncé l'équivalent du théorème des bornes atteintes, il définit le voisinage d'un point x_0 en disant que ce sont tous les x « pour lesquels la différence $x–x_0$ en valeur absolue ne dépasse pas une borne déterminée. » Il définit ensuite les notions de point intérieur, point extérieur et point frontière en termes de voisinages.

G. Cantor est au cœur des deux types de questionnements mentionnés ci-dessus. L'étude d'un résultat sur les séries trigonométriques (1883) l'amène à fournir une construction rigoureuse de l'ensemble des réels et à s'interroger sur le lien entre les nombres réels et la géométrie de la droite. Il s'intéresse également aux sous-ensembles de la droite réelle constitués d'un nombre fini ou infini d'éléments. Il définit alors les notions de voisinage, de point limite et de point isolé de la façon suivante :

- Un voisinage d'un point est un intervalle dans lequel ce point est contenu.
- Un point limite d'un système de points *P* est un point de la droite tel que dans son voisinage, il y ait un nombre infini de points du système *P*.
- Un point isolé d'un système de points *P* est un point qui, appartenant à *P*, n'est pas en même temps point limite de *P*.

Le traité de Jordan de 1893 (seconde édition) est un des premiers exposés globalisant les notions de topologie dans ϒ. Jordan explique que pour un ensemble donné *E*, tous les points de l'espace peuvent être classés en trois catégories : points intérieurs à *E*, points extérieurs à *E* et intérieurs à son complémentaire, points frontières. Ces travaux montrent qu'une première unification des notions apparaît sous la forme d'une classification des types de points, par rapport à un sous-ensemble de ϒ fixé.

À la fin du 19^{e} siècle, l'idée de travailler avec des ensembles dont les éléments sont autre chose que des nombres est de plus en plus présente. La volonté de développer des théories abstraites est bien là. F. Hausdorff (1914) introduit le concept d'espace topologique qui unifie les notions topologiques antérieures. Cette seconde unification est de nature différente de la première. Ici, il ne s'agit plus de catégoriser les objets mais bien d'utiliser une même notion, celle d'espace topologique, pour unifier les notions précédentes.

3.3. Le caractère généralisateur des notions

Les premières définitions des notions topologiques sont données dans ϒ sous la forme d'une catégorisation des types de points. Elles n'amènent pas de généralisation à proprement parler. Les définitions se généralisent dans $ϒ^N$ avec le concept de boule, puis dans les espaces métriques avec les travaux de Fréchet (1906). La généralisation est liée à l'espace dans lequel on travaille. Une fois encore, le concept d'espace topologique est la source majeure de généralisation. Son émergence amène un déplacement de l'attention des éléments d'un espace vers les sous-ensembles puisque la structure des espaces est donnée à partir des conditions sur ces sous-ensembles « privilégiés » que sont les ouverts. Une fois encore, le caractère généralisateur est mis en évidence par l'introduction de notions qui m'éloignent de mon projet d'enseignement. Je ne le développe donc pas davantage ici.

3.4.Le caractère formalisateur des notions

Un aspect important est que les premières définitions rencontrées dans les travaux précédents sont écrites dans le registre de la langue naturelle. Les symboles mathématiques utilisés sont des lettres, des inégalités. Les propriétés telles que l'intersection ou l'inclusion sont décrites avec des mots. Le registre formel utilisé pour écrire les définitions, telles qu'elles sont données actuellement, apparaît avec les avancées dans les domaines de la logique et la théorie des ensembles, c'est-à-dire au début du 20e siècle.

3.5.Perspectives d'enseignement

Le travail décrit très brièvement ici fournit néanmoins divers éléments de réflexion dont on pourrait essayer de tenir compte pour introduire les notions de topologie et tenter de contourner l'obstacle du formalisme, source de réelles difficultés chez les étudiants. Tout d'abord, l'histoire montre que les problèmes qui ont motivé l'introduction des premières notions de topologie (séries trigonométriques, théorie des fonctions…) ne sont pas accessibles au niveau d'enseignement considéré ici. Cependant, je développe trois pistes de réflexion concernant l'introduction des notions :

- Un travail sur les registres d'écritures : les premières définitions qui émergent sont écrites dans la langue naturelle. D'autre part, l'histoire a montré qu'un appui sur l'intuition géométrique a fait émerger des notions. D'où l'idée de mélanger le registre de la langue naturelle avec un registre d'écriture permettant aux étudiants de s'appuyer sur l'intuition géométrique, par exemple en proposant des dessins mettant en jeu des objets géométriques accessibles aux étudiants à ce niveau d'enseignement.
- Le travail en réseaux de concepts : les premières notions, en lien direct avec mon travail, qui émergent dans l'histoire sont celles de point intérieur et de point adhérent à un sous-ensemble de ϒ. D'où l'idée de commencer par définir ces types de points avant de déplacer l'attention vers les sous-ensembles. Il s'agirait alors de développer un itinéraire pour parvenir à définir les notions visées dans l'enseignement. Par exemple, la notion d'ouvert pourrait émerger du travail en réseau sur les concepts suivants : point intérieur et intérieur d'un ensemble. Un ensemble ouvert serait alors défini comme coïncidant avec son intérieur. Un itinéraire semblable peut être défini pour la notion d'ensemble fermé à partir de celle de point adhérent.
- Les commentaires méta-mathématiques : le panorama très brièvement décrit ci-dessus met en évidence que les problèmes et motivations faisant émerger les premières notions de topologie sont loin d'être accessibles au niveau d'enseignement visé ici. Pour amener les étudiants à comprendre ce qui est en jeu en topologie, une piste à creuser est l'élaboration de commentaires non strictement mathématiques, ou *méta-mathématiques* (Robert et Robinet, 1996), à proposer aux étudiants sur ces notions au fil de l'enseignement.

4. L'EXPÉRIMENTATION

4.1.Remarques préliminaires

L'expérience s'est déroulée au début du mois de mars 2008, pendant une séance d'exercices du cours d'analyse mathématique. J'ai pris en charge cette séance, qui a duré 1h50. Le public était constitué de 21 étudiants en première année universitaire, section mathématique.

À cette époque de l'année, les chapitres qui ont été enseignés sont les suivants : convergence des suites de nombres réels ; supremum/infimum et maximum/minimum d'un ensemble $A \subseteq \Upsilon$; convergence des suites dans Υ^N ; début du chapitre sur les limites de fonctions.

Le plan général de la séance est le suivant :

- Présentation du déroulement de la séance : 5 minutes
- Activité 1 : 40 minutes
- Première phase d'institutionnalisation : 10 minutes
- Activité 2 : 25 minutes
- Deuxième phase d'institutionnalisation : 30 minutes

Chaque phase est détaillée ci-dessous.

4.2. Présentation du déroulement de la séance

Les précisions méta-mathématiques suivantes ont été données aux étudiants quant à la nature du travail qu'ils seraient amenés à réaliser pendant la séance. Le but est d'introduire des nouvelles notions et l'objectif est que les étudiants les découvrent seuls au travers d'une activité. L'enseignant interviendra donc le moins possible, mais les discussions entre pairs sont autorisées. Le nouveau chapitre dont il est question s'appelle « Topologie ». Il s'agit d'une discipline importante en mathématique. J'ai également expliqué que cette discipline est souvent considérée comme difficile par les étudiants, notamment parce qu'ils trouvent que c'est abstrait (Bridoux, 2005). Pour tenter de modifier cette perception, l'activité va amener les étudiants à faire des dessins et à réfléchir sur ces dessins pour mieux comprendre les nouvelles notions.

4.3. Activité 1

Une première feuille (Feuille 1 ci-dessous) a été distribuée à chaque étudiant. J'ai lu l'énoncé avec eux en insistant sur le fait que le type de justification qui leur est demandé est inhabituel. En effet, ils n'ont pas l'habitude d'utiliser un dessin comme moyen de justification. Les étudiants ont travaillé à leur rythme. Après 35 minutes, ils avaient terminé.

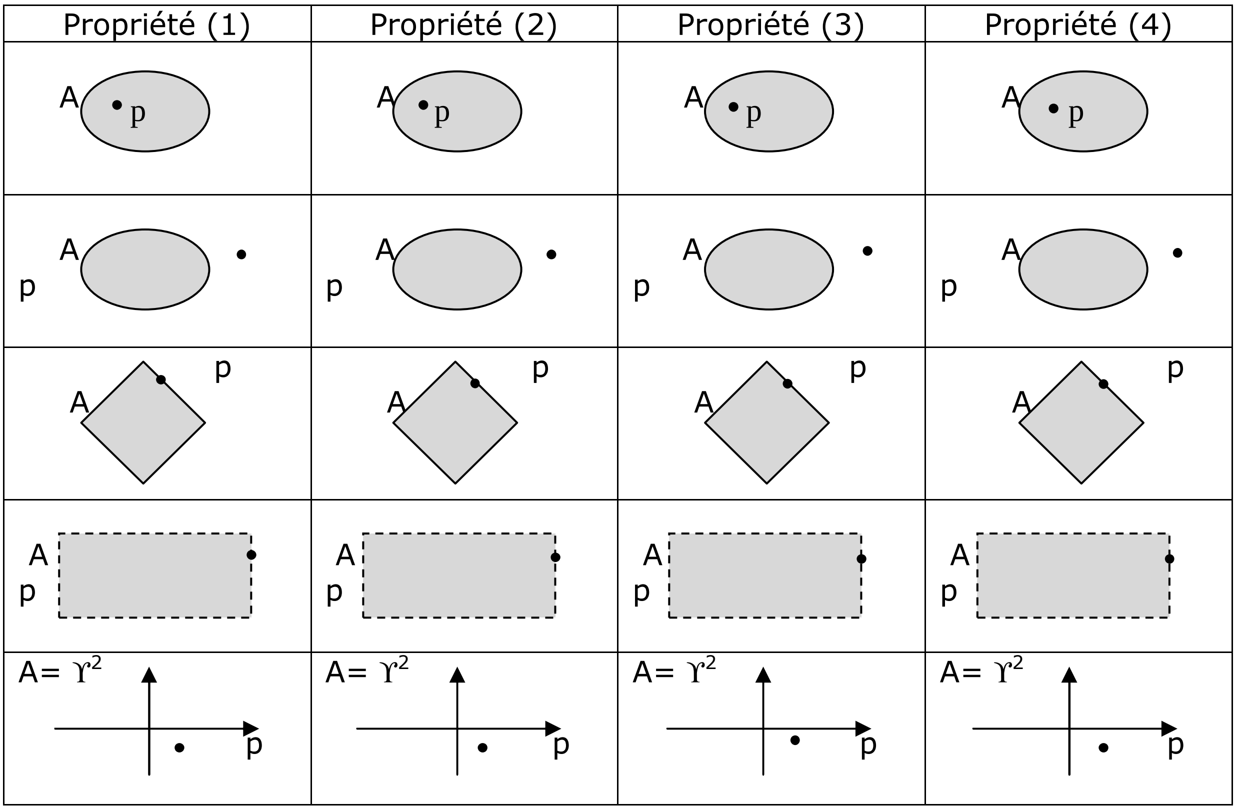
Feuille 1

Voici quatre propriétés mettant en relation un ensemble $A \subseteq \Upsilon^2$ et un point $p \in \Upsilon^2$:

(1) A contient une boule ouverte de centre p.
(2) A contient toutes les boules ouvertes de centre p.
(3) Il y a une boule ouverte de centre p qui intersecte A.
(4) Toutes les boules ouvertes de centre p intersectent A.

Dans chaque situation proposée ci-dessous, dites

- si p est un point de A ou non,
- si p et A vérifient ou non les propriétés (1), (2), (3), (4). Pour chaque propriété, justifiez votre réponse sur le dessin.



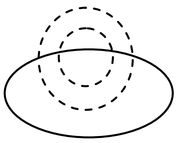
Selon vous, quelle est la propriété qui traduit l'idée que

- p est un point intérieur à A : ……………..
- p est un point adhérent à A : ……………..

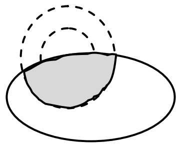
Remarque : à la demande de plusieurs étudiants, il a été spécifié que le trait pointillé illustre le fait qu'on ne prend pas le « tour » (mot prononcé) de l'ensemble. Le mot « bord » n'a pas été utilisé à ce stade.

<u>Aspects frappants du dépouillement des copies</u>
Les feuilles de dessins ont été reprises à la fin de la séance pour être dépouillées. Chaque étudiant a reçu une copie de sa feuille de dessins à la séance suivante.

Le dépouillement montre que les étudiants peuvent être répartis en deux catégories concernant les caractéristiques de leurs dessins. Une catégorie est composée de dessins « dépouillés », en ce sens qu'il n'y a pas d'annotation. Elle concerne 9 étudiants sur 21. Ceux-ci représentent des boules sans faire apparaître explicitement le fait que la propriété est vérifiée ou non. On trouve dans cette catégorie des dessins de la forme suivante :



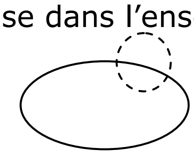
Une seconde catégorie est composée de dessins plus « élaborés ». Elle concerne 12 étudiants sur 21. Ici, l'inclusion ou la non inclusion, l'intersection ou la non intersection apparaît suivant un jeu de couleurs ou de partie hachurée. Cela donne lieu à des dessins de la forme suivante :



Dans cette catégorie, 6 étudiants vont recourir aux symboles mathématiques pour annoter leurs dessins et/ou incorporer des commentaires de la forme suivante :

- on a bien $B(p, r) \subseteq A$ ou $B(p, r) \cap A$ = partie hachurée
- la boule de centre p ne peut pas être contenue dans A car $p \notin A$
- la boule de centre p intersecte A car $p \in A$.

Pour illustrer l'idée qu'une boule intersecte l'ensemble, 18 étudiants sur 21 font dépasser la boule comme sur le dessin ci-dessous, alors qu'ils pourraient la construire entièrement incluse dans l'ensemble.



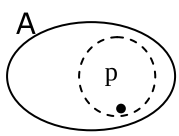
4.4. Première phase d'institutionnalisation

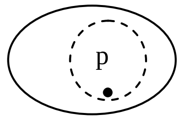
J'ai consulté les étudiants pour savoir quelles définitions ils avaient choisies. Tous les étudiants ont indiqué la phrase correcte pour définir la notion de point intérieur et 20 étudiants sur 21 ont choisi la phrase correcte pour la notion de point adhérent. J'ai ensuite demandé aux étudiants comment on pouvait traduire ces propriétés avec des symboles mathématiques. Ils n'ont pas rencontré de difficultés pour effectuer cette traduction. Les définitions suivantes ont donc été écrites au tableau :

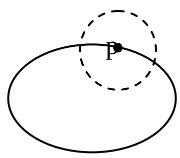
- p est intérieur à A si $\exists r > 0, B(p, r) \subseteq A$
- p est adhérent à A si $\forall r > 0, B(p, r) \cap A \neq \emptyset$

J'ai alors représenté au tableau des dessins de la forme suivante, pour exprimer les propriétés de point intérieur et de point adhérent, en expliquant qu'on pouvait s'appuyer sur les dessins pour retrouver les définitions. J'ai invité les étudiants à prendre note de ce type de commentaire. Le mot « bord » a été prononcé pour désigner le « tour » de l'ensemble.

A







A

p est intérieur à A   p est adhérent à A : p est intérieur à A ou sur le bord de A

4.5. Activité 2

Une deuxième feuille (Feuille 2 ci-dessous) a été distribuée aux étudiants. Ils n'ont reçu aucune précision sur l'énoncé. Cette feuille a été reprise à la fin de la séance. Tout comme pour la Feuille 1, les étudiants ont reçu une copie de leur production à la séance suivante.

Feuille 2

Pour chacune des propositions suivantes, cochez la case adéquate selon que vous pensez qu'elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.

- Vrai ☐ Faux ☐ Si p est un point intérieur à A, alors p est un point adhérent à A.
- Vrai ☐ Faux ☐ Si p est un point adhérent à A, alors p est un point intérieur à A.
- Vrai ☐ Faux ☐ Si $p \in A$, alors p est un point intérieur à A.
- Vrai ☐ Faux ☐ Si $p \in A$, alors p est un point adhérent à A.
- Vrai ☐ Faux ☐ Si p est intérieur à A, alors $p \in A$.
- Vrai ☐ Faux ☐ Si p est adhérent à A, alors $p \in A$.

<u>Aspects frappants du dépouillement</u>

Signalons tout d'abord que même si l'accent est mis sur la justification, 19 étudiants sur 21 cochent toutes les réponses correctes. Tous les étudiants utilisent le registre de la langue naturelle pour les justifications. 16 étudiants vont, de plus, recourir aux dessins.

On trouve deux types de justification qui se répartissent suivant les différentes phrases : utiliser les phrases de l'activité 1, c'est-à-dire le retour aux définitions (justification 1), ou bien utiliser les liens entre les notions d'intérieur, d'adhérence et de bord, c'est-à-dire des liens entre les types d'ensembles (justification 2). L'utilisation de l'une ou l'autre catégorie est très marquée suivant le type de phrases :

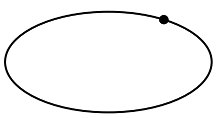
Phrase 1 : justification 1
Phrase 2 : justification 2
Phrase 3 : justification 2
Phrase 4 : justification 1
Phrase 5 : justification 1
Phrase 6 : justification 2

Voici un exemple relevant du premier type de justification :

- Phrase 1 : « si p est un point intérieur à A, alors A contient une boule de centre p. Donc toutes les boules de centre p intersectent A car il y aura toujours au-moins p dans l'intersection. »

L'exemple suivant relève du second type de justification :

- Phrase 2 : « Sur le dessin, p est sur le bord et appartient à A, mais p n'est pas intérieur à A. »


p

La présence du second type de justification est marquée dans les phrases 2, 3 et 6, c'est-à-dire les affirmations qui sont fausses. Il semble que la recherche d'un contre-exemple amène donc les étudiants à s'appuyer sur une réflexion plus intuitive et non pas sur l'utilisation des définitions formelles.

4.6. Deuxième phase d'institutionnalisation

La séance s'est terminée par une partie théorique, sous la forme d'une discussion avec les étudiants. Je suis tout d'abord revenue sur le fait qu'on pouvait associer des dessins aux nouvelles notions et qu'ils pouvaient s'en servir pour retrouver les définitions. J'ai refait les dessins au tableau. J'ai alors défini l'intérieur et l'adhérence d'un ensemble. Voici les définitions qui ont été écrites au tableau :

$$\text{int } A = \{\text{points intérieurs à } A\} = \{p \in A : \exists r > 0,\ B(p, r) \subseteq A\}$$
$$\text{adh } A = \{\text{points adhérents à } A\} = \{p \in \Upsilon^N : \forall r > 0,\ B(p, r) \cap A \neq \emptyset\}$$

- Les étudiants sont parvenus à me donner les liens suivants en m'expliquant que cela venait du vrai ou faux : $\text{int } A \subseteq A \subseteq \text{adh } A$.
- Les étudiants ont défini par eux-mêmes la notion de bord : $\text{bd } A = \text{adh } A \setminus \text{int } A$.
- Les notions d'ensemble ouvert et d'ensemble fermé ont alors été définies comme suit :
  Un ensemble A est ouvert si A= int A.
  Un ensemble A est fermé si A = adh A.

- Plusieurs étudiants ont alors fait remarquer que Υ^2 est à la fois ouvert et fermé. Je leur ai demandé si à l'inverse, on pouvait trouver un ensemble qui n'était ni ouvert ni fermé. Ils m'ont expliqué qu'en reprenant l'exemple du carré dans les dessins, on pouvait laisser le trait pointillé d'un côté et mettre un trait plein de l'autre.

Il est important de remarquer que, par rapport aux définitions habituellement proposées dans le cours (voir l'annexe), un changement de point de vue a eu lieu dans cette activité. Les définitions d'ensemble ouvert et d'ensemble fermé sont proposées dans un formalisme plus économique, au sens où elles sont données en terme d'intérieur et d'adhérence.

5. BILAN DE L'EXPÉRIENCE ET PERSPECTIVES

Comme il a été précisé dans l'introduction, l'objectif final de mon travail est de concevoir un scénario d'enseignement contenant un enseignement théorique et des exercices. Celui ci sera expérimenté en février 2009. L'activité qui a été proposée aux étudiants est une pré-expérimentation. Des points positifs mais aussi des manques ont été relevés. Il y a lieu d'en tenir compte pour la suite des choses.

5.1. Points positifs de la séquence

Le premier élément positif relevé est l'émergence des propriétés correctes chez pratiquement tous les étudiants. De même, le fait que les affirmations présentes dans le vrai ou faux aient été traitées correctement chez une majorité d'étudiants est un autre élément positif. De plus, l'utilisation des dessins et de la langue naturelle dans les justifications porte à croire que le travail sur la Feuille 1 induit la mobilisation de ces deux registres d'écritures comme moyen de justification. Enfin, les réactions pertinentes des étudiants dans les phases d'institution-nalisation sont un élément nouveau dans cet enseignement.

5.2. Points négatifs de la séquence

Le manque de temps dans la gestion de la séquence a été tel que peu de commentaires ont été réalisés sur les dessins des étudiants. Le vrai ou faux a été corrigé oralement, une correction écrite au tableau de chaque affirmation n'ayant pas été proposée. Il s'agit d'un manque : le fait de revenir aux productions des étudiants serait un élément qui permettrait de mettre davantage en évidence l'importance accordée aux dessins dans cet enseignement. Dans la Feuille 1, des situations moins intuitives pourraient être insérées de façon à montrer que lorsque le dessin est plus difficile à envisager, le retour au formalisme peut être utile.

5.3. L'obstacle du formalisme

La séance d'exercices suivante, qui a eu lieu une semaine après la séquence, était une séance d'exercices traditionnelle. Des exercices de manipulation des définitions — donc d'utilisation du langage formel — ont été proposés aux étudiants. Il est apparu que même si au cours de la séquence, les étudiants semblaient avoir une vision intuitive et correcte de ce qu'est un ouvert ou un fermé, ils n'étaient pas capables, pour un ensemble donné, de se décider sur le fait qu'il est ouvert ou fermé. Après discussion avec eux, la difficulté proviendrait du fait qu'ils ne parviennent pas seuls à interpréter l'égalité A = int A par l'idée que tous les points de A doivent être intérieurs à A. Une interprétation semblable pour la notion de fermé leur posait également problème. Ainsi, le choix du langage formel contenu dans les définitions, a priori plus simple et économique, se présente tout de même comme un obstacle.

5.4. Perspectives

Bien qu'elle développe une vision intuitive des notions chez les étudiants et une certaine aptitude à recourir aux dessins pour déployer un raisonnement, la séquence ne permet cependant pas de contourner l'obstacle du formalisme. Les contraintes institutionnelles sont pourtant telles qu'un des objectifs à atteindre dans l'enseignement de la topologie décrit ici est que les étudiants soient capables de manipuler les définitions formelles. Dans le scénario d'enseignement à venir, une piste proposée est que la manipulation des aspects formels ne soit plus à la charge des étudiants. L'enseignant montrera comment le formalisme est utilisé au travers d'exemples, en y incorporant des commentaires méta-mathématiques sur le fonctionnement des connaissances mises en jeu. L'objectif est de familiariser les étudiants avec les aspects formels par des exemples présentés dans le cours théorique. Les exercices viseront à mélanger différents registres d'écritures pour trouver un équilibre productif entre le sens et la technique.

BIBLIOGRAPHIE

Bardini, C. (2003) *Le rapport au symbolisme algébrique : une approche didactique et épistémologique*. Thèse de doctorat, Université Paris 7.

Bridoux, S. (2006) Utiliser une définition, une tâche simple a priori. Le cas de la topologie de Υ^{N}. Dans N. Bednarz (Dir.), *Actes du 3^e colloque international Espace Mathématique Francophone* (EMF 2006), sur CD-ROM. Université de Sherbrooke, Canada.

Bridoux, S. (2005) Analyse d'un enseignement de topologie. *Cahier de Didirem* 51, Université Paris 7.

Cantor, G. (1883) Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der Trigonometrischen Reihen. *Mathematische Annalen*, t. 5, pp. 123-132 (1872). Trad. française : Acta Mathematica, t. 2, pp. 336-348 (1883).

Chevallard, Y. (1991) *La transposition didactique*. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Dieudonné, J. (1978) *Abrégé d'histoire des mathématiques*. Hermann, Paris.

Dorier, J.-L. (2000) *Recherches en histoire et en didactique des mathématiques sur l'algèbre linéaire, Perspective théorique sur leurs interactions*. Note de synthèse, Université Joseph Fourier, Cahier 12. Laboratoire Leibniz.

Dorier, J.-L. (1997) *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Grenoble, La Pensée Sauvage.

Fréchet, M. (1906) Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. XXII, pp. 1-74.

Hausdorff, F. (1914) *Grundzüge der Mengenlehre.* New York (1965). Reprint of the 1914 Berlin edition.

James, I. M. (1999) *History of Topology*. Oxford University, UK, Elsevier.

Jordan, C. (1893) *Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique*, Tome premier, *Calcul différentiel*.

Manheim, J. H. (1964) *The Genesis of Point Set Topology*. Pergamon Press, Oxford.

Pariès, M., Pouyanne, N., Robert, A., Roditi, E., Rogalski, M. (2007) Mettre du relief sur les mathématiques à enseigner au collège et au lycée – quelques exemples, *Cahier bleu* 9, Université Paris 7.

Ouvrier-Buffet, C. (2003) *Construction de définitions/construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble.

Robert, A. (1998) Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18/2, pp. 139-190.

Robert, A. et Robinet, J. (1996) Prise en compte du méta en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16/2, pp. 145-177.

Weierstrass, K. (1874) *Einleitung in die Theorie der analytischen Functionen*. Sommer Semester 1874, rédigé par G. Hettner.

ANNEXE

Les définitions telles qu'elles sont données dans le cours

- Intérieur, adhérence d'un ensemble $A \subseteq \Upsilon^N$

$\text{int } A = \{ x \in \Upsilon^N : \exists r > 0, B(x, r) \subseteq A \}$

$\qquad = \{ x \in \Upsilon^N : \forall (x_n) \subseteq \Upsilon^N, (x_n \to x) \Rightarrow (\exists n_0 \in \infty, \forall n \geq n_0, x_n \in A) \}$

$\text{adh } A = \{ x \in \Upsilon^N : \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \varnothing \}$

$\qquad = \{ x \in \Upsilon^N : \exists (x_n) \subseteq A, \ x_n \to x \}$

L'équivalence des définitions en termes de boules et de suites est démontrée.

- Ensemble ouvert, fermé

A est ouvert si $\forall x \in A, \exists r > 0, B(x, r) \subseteq A$
A est ouvert si $\forall x \in A, \forall (x_n) \subseteq \Upsilon^N, (x_n \to x) \Rightarrow (\exists n_0 \in \infty, \forall n \geq n_0, x_n \in A)$
A est fermé si $\forall x \in \Upsilon^N, (\forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \varnothing) \Rightarrow (x \in A)$
A est fermé si $\forall x \in \Upsilon^N, \forall (x_n) \subseteq A, (x_n \to x) \Rightarrow (x \in A)$

L'équivalence des définitions est démontrée.