ENQUÊTES EPISTEMOLOGIQUE ET DIDACTIQUE DU CONCEPT DE LA QUANTIFICATION

Faïza CHELLOUGUI* – Rahim KOUKI**

Résumé – Dans une première partie de cet article, nous présentons une enquête épistémologique à partir des textes fondateurs (Frege et Quine) mettant en valeur la naissance du symbolisme logique et le lien du concept de la quantification avec des théories philosophiques qui montrent la complexité et la polysémie des quantificateurs dans le langage formel et le langage naturel (Chellougui 2004). La deuxième partie propose une analyse didactique autour du concept de quantification. Il s'agit de quelques résultats expérimentaux issus des travaux antérieurs de Dubinsky et Yiparaki (2000) et de Durand-Guerrier et Arsac (2003).

Mots-clefs : quantification, quantificateur universel, quantificateur existentiel, logique, calcul des prédicats

Abstract – In a first part of this article, we present an epistemological survey starting from the foundational texts of Frege and Quine in ordre to highlight the birth of logical symbolism and the link of the concept of the quantification with philosophical theories which show the complexity and the polysemy of quantifiers in the formal language and the natural language (Chellougui 2004). The second part proposes a didactic analysis around the concept of quantification. We discuss some experimental results from earlier work of Dubinsky and Yiparaki (2000) and Durand-Guerrier and Arsac (2003).

Keywords: quantification, universal quantifier, existential quantifier, logic, calculation of the predicates

I. INTRODUCTION

Dans l'activité mathématique, l'essentiel du discours est porté par la langue naturelle et par un langage mixte qui incorpore des symboles mathématiques. En début d'université, on introduit le symbolisme logique : $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\forall$ et $\exists$, pour permettre d'écrire des énoncés entièrement formalisés sans qu'un travail spécifique sur les règles de fonctionnement du symbolisme et sur le passage des énoncés en langue naturelle aux énoncés formalisés et vice versa (Duval 1995), ne soit conduit.

On observe cependant que chez un grand nombre d'étudiants, l'introduction des écritures formalisées semble bien au contraire engendrer des ambiguïtés résistantes. De nombreux travaux de recherche en didactique des mathématiques (Bloch 2000 ; Dubinsky et Yparaki 2000 ; Durand-Guerrier et Arsac 2003 ; Chellougui 2004 ; Durand-Guerrier 2005) ont montré que la complexité de la structure logique des expressions mathématiques quantifiées engendre souvent des difficultés spécifiques dans la gestion et la manipulation des quantificateurs par les étudiants : difficultés d'interprétation du vocabulaire logico-mathématique ; lacunes d'ordre opératoire ; difficultés dans la manipulation des énoncés complexes à quantifications multiples.

Dans la première partie de cet article, nous présentons quelques fondements épistémologiques autour du concept de quantification, à partir des textes fondateurs de Frege (1848-1925) et Quine (1908-2000). Ces fondements épistémologiques sous-tendent l'introduction des dimensions historique et culturelle, dans l'enseignement des notions mathématiques dont l'usage des quantificateurs est nécessaire, telles que la limite, la continuité, les suites réelles, etc. Au cœur de ce travail se trouve une analyse du langage qui

* Université de Carthage, Faculté des Sciences de Bizerte – Tunisie – chellouguifaiza@yahoo.fr
**Université de Tunis El Manar, Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs El Manar, LAMSIN ENIT – Tunisie – kouki_ra@yahoo.fr

© Chellougui F., Kouki R. (2012) Enquêtes épistémologique et didactique du concept de la quantification. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT4, pp. 593–602). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

conduit à l'élaboration progressive d'un formalisme dont, selon Quine, la fonction première est de contribuer à la clarification conceptuelle. Il s'agit, en particulier, d'élucider les règles d'usage tant syntaxiques que sémantiques des expressions telles que : « quel que soit », « tout », « pour tout », « chacun », « chaque », « il existe », « certain »…

Dans la deuxième partie, nous présentons quelques résultats en didactique des mathématiques. Il s'agit des travaux ayant pour problématique le formalisme logique. Le premier travail, accompli conjointement par Ed Dubinsky et Olga Yiparaki (2000), concerne les énoncés quantifiés du type « Pour tout X, il existe Y… », « Il existe X, pour tout Y… ». Le second travail réalisé par Durand-Guerrier et Arsac (2003) montre une analyse des énoncés quantifiés du type « Pour tout x, il existe y tel que F(x, y) ».

II. FONDEMENTS EPISTEMOLOGIQUES

*1. L'*Idéographi*e de Frege*

L'*Idéographie* de Frege (1879) expose pour la première fois un langage symbolique enrichi par rapport au symbolisme mathématique où la quantification trouve son expression. L'*Idéographie* est l'écriture des concepts, c'est un exemple d'une langue scientifique, en particulier d'une langue mathématique. Selon Frege, le langage formel devrait être capable d'éviter les différences de représentations et les ambiguïtés intrinsèques dans certaines structures qui, même dans un contexte donné, sont susceptibles d'engendrer une mauvaise compréhension.

Frege adopte les signes suivants : trait de jugement, trait de contenu, trait de négation et lettre gothique.

Frege exprime un jugement à l'aide du signe : ⊢——, qui se trouve à gauche du signe ou de la combinaison de signes exprimant le contenu du jugement. Ce signe se compose de deux traits : |… trait de jugement, et —— trait de contenu.

Le trait de jugement ne peut paraître qu'une seule fois dans une formule et doit invariablement y occuper la première place. De plus, il doit être suivi directement par un trait de contenu.

On peut écrire, sans se prononcer sur la vérité : —— 2 + 5 = 7

Pour affirmer la justesse de ce contenu, on écrit : ⊢—— 2 + 5 = 7

Ainsi, le trait de jugement signifie toujours « il est vrai » ce qui donne « il est vrai qu'il est vrai » ou « il est vrai qu'il est faux ».

Dans l'*Idéographie*, le trait de négation est formulé de la manière suivante :

> Si l'on met un petit trait vertical sous le trait de contenu, on exprime de cette manière la circonstance *que le contenu n'a pas eu lieu*. (Frege 1879, p. 24)

Frege présente l'exemple suivant : « ├──┬── A » qui signifie : « A n'a pas lieu ».

Le petit trait vertical est appelé le trait de négation. La partie du trait horizontal qui se trouve à la droite du trait de négation est le trait de contenu de A, et la partie qui se trouve à la gauche du trait de négation est le trait de contenu de la négation de A. Par exemple, avec ce trait de négation, on peut exprimer le jugement selon lequel « il n'est pas le cas que deux et quatre font sept », en se servant de la formule suivante : « ├──┬── 2 + 4 = 7 ».

Ainsi, l'expression : « ├─┬─ A » est vraie, si et seulement si l'expression : « ├─ A » est fausse.

Frege introduit l'universelle affirmative formulée comme suit : « ├──a,◡── Φ(a) » en disant qu'elle exprime le jugement que la fonction désignée par « Φ » est un fait pour n'importe quel argument « a ».

Dans ce qui suit, nous présentons une expression idéographique pour des énoncés portant une négation. En voici deux énoncés[1] proposés par Barnes :

Enoncé 1. Rien n'est plus grand que deux.

Enoncé 2. Quelque chose n'est pas plus grand que deux.

Pour l'énoncé1 la formule idéographique est : « ├─a,◡─┬─ $a > 2$ » cette formule est vraie si et seulement si, pour tout élément, il n'est pas vrai qu'il est plus grand que 2, ou si et seulement si, il n'y a rien qui est plus grand que 2. Cette formule exprime la généralité d'une négation, elle dit qu'une négation est tenue comme vraie partout. En effet, la généralité s'étend du début de ligne jusqu'à la fin sans être affectée par la négation.

Par contre, l'énoncé 2 exprime la négation d'une généralité qui ne commence qu'après le trait de négation. Son expression idéographique est la suivante : « ├─┬─a,◡── $a > 2$ ». Ici, la négation porte sur toute la formule. Celle-ci est vraie si et seulement si, « ├─a,◡── $a > 2$ », est fausse. Autrement dit, si et seulement si, au moins un élément n'est pas plus grand que deux.

Ainsi, on dispose d'une universelle négative formulée de la manière suivante :

« ├─a,◡─┬─ Φ(a) » dont la négation est la particulière affirmative : « ├─┬─a,◡─┬─ Φ(a) », ce qui revient à dire que quelque chose possède une certaine propriété.

Ceci donne à voir la portée de la quantification par rapport à la négation ce qui élève des ambiguïtés dans la langue française. On peut donc représenter la phrase : « Quelque chose est plus petit que toute chose » au moyen de la formule idéographique suivante :

├──┬──b,◡──┬──a,◡── $b < a$

Frege a réussi à exprimer le quantificateur universel en lui attribuant, comme ostensif, une lettre gothique glissée dans un creux. Alors que, le quantificateur existentiel est exprimé en utilisant le trait de négation suivit du creux de généralité. En d'autre terme, le quantificateur existentiel est la négation du quantificateur universel. C'est ainsi que dans son idéographie, Frege ne se sert que du quantificateur universel.

On prend comme exemple les deux propositions suivantes, dont le domaine de référence est l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$:

Proposition 1 : « Il y a un entier qui est plus grand que tous les autres entiers" » (1) qui est fausse.

Proposition 2 : « Pour tout entier il existe un entier qui est plus grand que lui" » (2) qui est vraie.

Pour la proposition1, la formule idéographique est : « ├─┬─x,◡─┬─y,◡── $x \geq y$ », pour la proposition 2, elle est : « ├───y,◡─┬─x,◡─┬─ $x \geq y$ »

La différence entre ces deux ostensifs exprime la différence entre les pensées qui se trouvent dans les deux propositions. En effet, Frege donne une importance capitale pour les

[1] Postface de l'ouvrage : « Idéographie », p. 169.

signes dans le développement de la pensée car ils permettent de se détacher des images mentales courtes pour entrer dans un mode de pensée.

A l'aide du quantificateur universel, on a les équivalences suivantes pour les deux formules précédentes :

(1) « ├─┬─x,◡─┬─y,◡─ $x \geq y \equiv \neg [\forall x \ \neg (\forall y, x \geq y)]$ » et

(2) « ├───y,◡─┬─x,◡─┬─ $x \geq y \equiv \forall y [\neg (\forall x \ \neg (x \geq y))]$ »

Les formules complexes ne sont pas faciles à interpréter et à saisir. Mais leur structure générale est toujours évidente et une approche méthodique suffit pour déceler leur sens. Nous pouvons ainsi dire que non seulement l'idéographie possède un pouvoir expressif permettant principalement la compréhension des expressions mathématiques contenant des éléments de logique mais elle peut également lever les ambiguïtés.

Comme conséquence, on peut dire que cette *Idéographie* est peu maniable pour exprimer les existentielles. Par exemple : « Quelque homme est blanc », se traduit dans le langage idéographique par : « Non (tout homme est non blanc) ».

Aujourd'hui, on peut écrire : « $\exists x \ \forall y, x \geq y$ » pour (1) et « $\forall y \ \exists x, x \geq y$ » pour (2).

Pour conclure, nous pouvons signaler que L'*Idéographie* se voulait d'une aide non négligeable, essentiellement pour la bonne compréhension du cheminement logique d'un raisonnement. Frege a réussi à exprimer le quantificateur universel, désigné dans l'*Idéographie* par généralité, en lui attribuant, comme ostensif, une lettre gothique glissée dans un creux. Alors que, le quantificateur existentiel est exprimé en utilisant le trait de négation suivit du creux de généralité. C'est ainsi que dans son idéographie, Frege ne se sert que du quantificateur universel. Comme conséquence, on peut dire que cette Idéographie est peu maniable pour exprimer les existentielles.

2. La quantification chez Quine

La simplification de la théorie logique

Quine (1960) parle de l'ambiguïté des termes et examine différents moyens pour les clarifier. Le recours aux parenthèses dans les écritures formalisées permet de clarifier certaines ambiguïtés structurelles dans les écrits mathématiques. Selon Quine, sans les parenthèses ou quelques conventions de rechange, les mathématiques n'en seraient pas où elles en sont.

Quine donne un nom à ce procédé qu'il note : la simplification de la théorie. Ce procédé est l'un des motifs principaux du recours à la notation de la logique. Pour expliquer cette notation, on doit employer la langue naturelle en spécifiant explicitement certaines opérations par lesquelles toute phrase notée dans la notation logique peut être directement développée dans la langue naturelle. En développant rigoureusement la théorie logique pour les phrases mises sous une forme canonique adaptée à cette théorie, Quine adopte la tâche de paraphraser ces expressions du langage naturel en symboles logiques. L'adjectif indéfini « aucun » peut être paraphrasé à l'aide de « chaque » et de la négation. Les formes essentielles des termes singuliers indéfinis se réduisent à « chaque F » et « quelque F », où « F » tient la place de n'importe quel terme général en forme substantive.

Les quantificateurs universel et existentiel sont représentés habituellement et respectivement par « $\forall x$ »[2] et « $\exists x$ ». L'expression "aucune chose" s'écrit « $\neg(\exists x)$ ». Le

[2] Dans son symbolisme, Quine représente le quantificateur universel par « (x) ».

quantificateur existentiel peut être paraphrasé à l'aide du quantificateur universel et vice versa : « ∃x (…x…) » devient « non (∀x) non (…x…) », et réciproquement. Ainsi, selon Quine, tous les termes indéfinis se réduisent aux deux sortes de quantificateurs.

Le quantificateur existentiel chez Quine

Selon Quine, l'observation de la nature elle-même suffit à décider de ce qui « existe » comme de ce qui « subsiste ». La distinction terminologique entre « exister » et « subsister » n'a, pour lui, aucune justification. Il est légitime de traduire « Socrate est » par « Il existe un et un seul x qui est Socrate », ou « Il existe un et un seul x qui Socrate », ou « ∃!x (Sx) », ou encore, en langage ensembliste, « ∃!x (x∈s) », (le prédicat monadique S ayant pour extension la classe s).

Pour comprendre le propos de Quine, il est nécessaire de distinguer, parmi les fonctions du langage, celles dont se chargent ou ne se chargent pas certains mots. Un nom propre ne signifie rien, il nomme. Sa fonction est de faire référence à un objet, mais, par lui-même, il n'affirme l'existence d'aucun objet. C'est au prédicat que revient, dans la phrase, la fonction de préciser la qualité qui est attribuée à l'objet. Seule une affirmation existentielle comme « ∃x Fx » affirme l'existence d'au moins un individu x qui vérifie la propriété F. Cet individu est nommé par la variable x, il est dit « exister », puisqu'il est sous la portée du quantificateur existentiel et une qualité F lui est attribuée. En l'absence de toute précision, cet individu peut être un élément comme un ensemble, mais il appartient au domaine de l'ontologie. Son exclusion de ce domaine se formulerait par les énoncés : « ¬(∃x Fx) » ou « ∀x ¬Fx ».

On peut dire qu'il y a une différence importante entre le « il existe » de la notation canonique de Quine et celui de la logique de la théorie des ensembles. Le « il existe » de Quine marque une existence soit physique ou ontologique de la variable quantifiée et explique ensuite qu'il prend comme existants les objets physiques et les classes construites sur ces objets. Ainsi, le « il existe » de la notation canonique se divise en un « il existe » quantifiant sur tous les éléments de ce modèle, qui est un quantificateur, et un prédicat à une place « a une existence physique ». Alors que le « il existe » de la logique est plutôt une manière de dire qu'on va parler d'un certain « objet » à valeurs dans n'importe quel modèle de la théorie.

Dans la notation canonique de la quantification de Quine, les objets admis sont les objets de l'univers dans lequel les variables liées de la quantification sont censées prendre leurs valeurs. Cependant, en considérant *U* l'univers du discours, le sens donné aux quantificateurs « ∀x » et « ∃x » est respectivement « tout objet x de U est tel que », « il existe un objet x de U tel que ». Ces constructions servent à renvoyer à des objets. Ainsi, paraphraser une phrase dans la notation canonique de la quantification c'est expliciter son contenu ontique : la quantification n'est qu'un procédé pour parler des objets (Quine 1960).

Pour conclure, le critère de l'engagement ontologique permet de reconnaître les êtres : entités et objets, qu'une théorie admet dans la description de la réalité. La norme de l'engagement ontologique est formulée dans le langage ordinaire de la façon suivante : « Une théorie admet *tels objets* si l'affirmation de l'*existence de tels objets* est nécessaire pour rendre la théorie *vrai*e ». Dans la langue canonique de la logique, elle est formulée comme suit : « Il y a des choses de l'espèce *F* si et seulement si (∃x *Fx*) ».

La formalisation montre que l'engagement ontologique ne porte pas sur l'espèce *F*, mais sur ce *x* quelconque qui vérifie la propriété d'être un objet d'espèce *F*. Une question se pose alors : quelle est la nature de ce *x* qui est dit exister ?

III. QUELQUES RESULTATS EN DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Nous présentons quelques résultats expérimentaux issus des travaux antérieurs de Dubinsky et Yiparaki (2000) à partir de leur article intitulé *On student understanding of AE and EA quantification*, et de Durand-Guerrier et Arsac (2003) à travers leur article *Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques*.

1. Interprétation des énoncés en langue naturelle

Dubinsky et Yiparaki (2000) ont mené un travail sur la compréhension par des étudiants scientifiques des énoncés quantifiés du type AE et EA donnés en langue naturelle. En particulier, ils cherchent à savoir si la différence de syntaxe est considérée ou non. Par AE, ils désignent des formulations du type : « For all...there exists... » (Pour tout...il existe...) ; il s'agit des énoncés de la forme : $(\forall x)\ (\exists y)\ R(x,y)$ où R est une relation binaire. De même, ils désignent par EA, les formulations du type : « There exists... for all... » (Il existe… pour tout…) ; il s'agit des énoncés de la forme : $(\exists c)\ (\forall d)\ S(c,d)$ où S est une relation binaire.

Dans ce travail, les auteurs ont conduit une étude expérimentale auprès d'étudiants d'université scientifique. Cette étude comporte deux phases : un questionnaire et un entretien. Le questionnaire contient 11 énoncés présentés dans le langage naturel dont chacun est soit vrai soit faux. Parmi ces énoncés, on compte six EA et cinq AE, seuls les deux derniers sont des énoncés mathématiques. Les auteurs ont proposé une catégorisation des énoncés suivant qu'ils soient (AE) ou (EA), notée au début de chaque phrase. Par contre, les étudiants ne disposent pas de cette catégorisation.

En voici la liste telle qu'elle est présentée dans les pages 5 et 6 de l'article :

(1) (AE) Everyone hates somebody.

(2) (AE) Every pot has a cover.

(3) (EA) Someone is kind and considerate to everyone.

(4) (EA) There is a mother for all children.

(5) (AE) All good things must come to an end.

(6) (EA) There is a magic key that unlocks everyone's heart.

(7) (AE) All medieval Greek poems described a war legend.

(8) (EA) There is a perfect gift for every child.

(9) (EA) There is a fertilizer for all plants.

(10) (AE) For every positive number a there exists a positive number b such that $b<a$

(11) (EA) There exists a positive number b such that for every positive number a $b<a$ (Ibid., pp. 5-6)

Dans le questionnaire, il est demandé aux étudiants de répondre par vrai ou faux pour chacun des énoncés et d'expliquer brièvement leur réponse. Concernant la phase de l'entretien, les questions posées sont liées aux interprétations faites dans leurs réponses.

Ce travail a mis en évidence la tendance des étudiants à interpréter systématiquement les énoncés comme AE : les résultats ont montré qu'il y a une forte tendance chez un nombre important d'étudiants à favoriser une interprétation AE contre une interprétation EA. Ceci semble dû au fait que les énoncés AE sont plus facilement tenus pour vrais.

L'étude a montré, en outre, certaines difficultés des étudiants pour interpréter et distinguer ces énoncés dans un contexte mathématique et non mathématique. Selon Dubinsky et Yiparaki, les étudiants sont beaucoup plus capables de traiter les énoncés non mathématiques que les énoncés mathématiques. En effet, pour les énoncés mathématiques, il y a une mauvaise gestion des quantificateurs et une interprétation non pertinente des énoncés AE et EA.

Les auteurs insistent sur la nécessité d'enseigner la syntaxe. Par ailleurs, nous pensons qu'il ne suffit pas d'enseigner quelques règles d'usage pour que les problèmes liés à ces questions soient résolus. Les résultats fournis par les auteurs ont mis en évidence une nécessaire interaction entre les points de vue sémantique et syntaxique. Cette étude de l'articulation entre syntaxe et sémantique présente une importance considérable pour analyser les énoncés mathématiques illustrant des notions travaillées et rencontrées dans l'enseignement supérieur telles que : continuité, limite, continuité uniforme, convergence simple, convergence uniforme etc. Ces notions nécessitent le plus souvent une présence des quantificateurs, de même type ou de types différents qui peuvent être placés au début ou au milieu de l'énoncé quantifié.

2. *Manipulation des énoncés en « quel que soit, il existe »*

Durand-Guerrier et Arsac (2003) se sont intéressés de très près à la place et au rôle de la logique dans l'enseignement des mathématiques depuis le lycée jusqu'au premier cycle universitaire scientifique. Dans leurs travaux, ils placent le formalisme logique au cœur de leur problématique d'une part, et analysent le plus souvent des énoncés quantifiés d'autre part. Parmi ces énoncés, nous distinguons ceux du type « Pour tout x, il existe y tel que F(x,y) ».

Durand-Guerrier et Arsac proposent d'utiliser un modèle théorique pour rendre compte de la pratique suivante :

> […] ; quand on applique un énoncé du type « quel que soit a, il existe b… », il faut ajouter que b « dépend » de a. […], l'erreur consiste à utiliser une lettre de variable liée comme s'il s'agissait d'un nom d'objet. Ceci revient à faire l'impasse sur l'inférence sémantique associée à la règle d'instanciation existentielle, et du coup, à ne pas respecter les restrictions correspondantes sur les noms d'objets ; à savoir, qu'une lettre utilisée pour une instance d'un énoncé existentiel ne peut pas être utilisée pour désigner un autre objet. (Ibid., pp. 299-300)

Pour éviter cette erreur, une pratique, fréquemment proposée par les professeurs de mathématiques, consiste à attribuer deux lettres différentes pour la variable liée pour chacune des deux instances de l'énoncé existentiel[3].

On s'intéresse dans ce travail à la branche de l'analyse, dans laquelle pour définir les notions de limite, de continuité, d'uniforme continuité, etc., les énoncés qui apparaissent le plus souvent sont du type : « $\forall\varepsilon\ \exists\eta$… ».

Durand-Guerrier et Arsac (2003) parlent en abrégé de démonstration en (ε, η) qui part de la donnée d'un ε générique et de la dépendance de η par rapport à ε. A partir d'un examen de quelques manuels, ils ont montré que le caractère générique de ε fait l'objet d'une grande variété de traitements et que le caractère de dépendance est parfois introduit par la notation η_ε sans toutefois faire l'objet d'une explicitation.

La grande variété de formulations proposées, tant dans les manuels que par les professeurs interrogés, incite les auteurs à envisager un cadre théorique permettant de fournir pour le chercheur une référence stabilisée pour les preuves comportant l'usage d'énoncés à quantificateurs multiples, principalement les énoncés en « Quel que soit x, il existe y tel que

[3] Exemple : démonstration du théorème des accroissements finis généralisé.

F(x, y) ». Ils proposent pour cela la démonstration naturelle de Copi que nous présentons dans le paragraphe suivant.

3. *Le contrôle des preuves*

Les systèmes de déduction naturelle, tels ceux dus à Gentzen (1935) et à Copi (1954), fournissent des outils intermédiaires permettant, d'une part, de détecter des failles dans le choix des arguments en restant au plus près des modes habituels de raisonnement des mathématiciens, et d'autre part, de contrôler logiquement la validité des démonstrations mathématiques en raison de la trop grande complexité et de la longueur des preuves logiques (Durand-Guerrier et Arsac 2003).

Dans une perspective didactique, la question qui se pose est celle de savoir si on peut avoir des preuves formalisées qui ne s'éloignent pas trop du raisonnement naturel. C'est ce qu'ont proposé Gentzen (1935), après lui Quine (1950) et enfin Copi (1954).

Nous présentons dans ce paragraphe le système de démonstration naturelle que Copi a développé dans le calcul des prédicats en proposant quatre règles d'introduction et d'élimination pour les quantificateurs :

(1) IU : Instanciation Universelle. $\forall$-élimination

(2) GU : Généralisation Universelle. $\forall$-introduction

(3) GE : Généralisation Existentielle. $\exists$-introduction

(4) IE : Instanciation Existentielle. $\exists$-élimination

Ces règles peuvent être utilisées pour analyser le formalisme et explorer le phénomène d'articulation entre logique et mathématique d'une part, et pour contrôler localement la validité de preuves mathématiques d'autre part.

A ce système de déduction naturelle de Copi concernant les prédicats à une place, il sera important d'ajouter des règles pour les prédicats polyadiques indiquant des contraintes sur l'ordre de réintroduction des quantificateurs. Une des règles importantes peut s'énoncer ainsi :

> Si une IE a été faite après une IU, la GE correspondante devra se faire avant la GU. (Durand-Guerrier et Arsac 2005 p. 165)

Cette règle absorbe la question de la dépendance. Nous illustrons cette règle pour montrer, dans le calcul des prédicats, que l'implication suivante : « $\exists y\ \forall x\ F(x,y) \Rightarrow \forall x\ \exists y\ F(x,y)$ (A) » est valide, alors que sa réciproque : « $\forall x\ \exists y\ F(x,y) \Rightarrow \exists y\ \forall\ F(x,y)$ (B) » est non valide.

En adoptant la méthode de preuve due à Copi, la structure interprétative de (A) est la suivante :

(1)	$\exists y\ \forall x\ F(x,y)$	Prémisse
(2)	$\forall x\ F(x,b)$	IE sur (1)
(3)	$F(a,b)$	IU sur (2)
(4)	$\exists y\ F(a,y)$	GE sur (3)
(5)	$\forall x\ \exists y\ F(x,y)$	GU sur (4)

Ceci prouve la validité de l'énoncé (A). Examinons maintenant l'énoncé (B) et montrons qu'il n'est pas universellement valide. La méthode précédente conduit à :

(6)	$\forall x\ \exists y\ F(x,y)$	Prémisse
(7)	$\exists y\ F(a,y)$	IU sur (6)

(8) F(a,b) IE sur (7)

A partir de là, on ne peut pas conclure la vérité de « $\exists y\ \forall x\ F(x,y)$ ». Ainsi, la non validité de l'implication (B) est bien liée au fait qu'à partir de (8) on ne peut pas effectuer une généralisation universelle de la constante d'objet *a*, sans avoir fait la généralisation existentielle sur *b*, ce qui nous ramène à l'énoncé de départ.

Dans la pratique mathématique ordinaire, le plus souvent, les deux opérations d'élimination et d'introduction des quantificateurs sont soit absentes soit partielles (Durand-Guerrier et Arsac 2003). Ainsi, on peut dire que la déduction naturelle est pertinente dans l'analyse logique du raisonnement mathématique, principalement dans des situations qui mobilisent des énoncés contenant plusieurs quantificateurs où l'on trouve au moins une fois chacun des deux quantificateurs universel et existentiel.

IV. CONCLUSION

Le travail présenté dans cette communication s'est organisé autour de deux parties : une étude épistémologique et une analyse didactique.

L'étude épistémologique a permis de mettre à jour la complexité et la richesse du concept de la quantification et de développer certains éléments susceptibles d'éclairer ce concept. Selon la théorie de Frege, il existe des procédures de traduction permettant de faire passer les phrases du langage ordinaire dans des formules logiquement claires par l'intermédiaire de propositions contenant de expressions partiellement dépourvues d'ambiguïté. L'Idéographie de Frege doit s'occuper de l'hypothèse selon laquelle les mathématiques se réduisent à la logique et il lui suffit de savoir que sa langue peut exprimer n'importe quelle thèse logique nécessaire dans l'activité mathématique. Elle serait fructueuse dans une interprétation des formulations mathématiques complexes et aussi pour une production d'ostensifs pertinents au support visuel de chaque réflexion.

Les apports de Quine à la logique formelle, à la philosophie du langage et également à la fondation des mathématiques et à l'épistémologie sont importants. Il soutient la thèse selon laquelle le travail de paraphrase su les énoncés du langage ordinaire pour les formaliser dans le calcul des prédicats du premier ordre, contribue à la simplification et à la clarification conceptuelle. L'une des préoccupations de Quine est l'éclaircissement et l'explicitation du problème de l'existentiel. Il regarde les variables et les quantificateurs comme fournissant des indices sur ce qu'une théorie affirme exister et non sur ce qui existe.

L'analyse didactique a essentiellement porté sur le raisonnement mathématique, la question fondamentale étant le traitement de la logique opératoire dans le formalisme mathématique. Le travail de Dubinsky et Yiparaki autour des énoncés du type AE et EA a mis en évidence la tendance des étudiants à interpréter systématiquement les énoncés comme AE. L'étude a montré, en outre, certaines difficultés pour interpréter et distinguer ces énoncés dans un contexte mathématique et non mathématique. Dans leur article, Durand-Guerrier et Arsac mettent en évidence que le fait de ne pas expliciter l'élimination et l'introduction des quantificateurs, peut conduire à des preuves invalides d'une part, et que l'utilisation du système de Copi pour analyser les preuves permet de repérer les pas de raisonnement douteux, d'autre part.

En rapport avec les questions directrices du GT4, signalons que ces approches didactiques sont pertinentes pour une prise en considération des dimensions historiques dans l'enseignement des mathématiques, et influencent également l'intérêt que portent les didacticiens sur des aspects particuliers du formalisme logique, qu'il s'agisse des propositions, de la quantification, des connecteurs logiques, etc.

Ces positions générales offrent des perspectives épistémologiques et didactiques concernant l'apparition des quantificateurs dans des énoncés mathématiques qui sont sensiblement différentes les unes des autres.

REFERENCES

Bloch I. (2000) *L'enseignement de l'analyse à la charnière lycée/université : Savoirs, connaissances et conditions relatives à la validation*. Thèse de doctorat. Université Bordeaux 1.

Chellougui F. (2004) *L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année d'université, entre l'explicite et l'implicite*. Thèse de doctorat. Université Lyon 1 et université de Tunis.

Copi I. M. (1954) *Symbolic Logic*. NewYork : Hardcover.

Dubinsky E., Yiparaki O. (2000) On student understanding of AE and EA quantification. Research in Collegiate Mathematics Education IV. *CBMS Issues in Mathematics Education* 8, 239-289.

Durand-Guerrier V. (2005) *Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique, Note de synthèse*. Habilitation à diriger les recherches en didactique des mathématiques. Université Claude Bernard Lyon 1.

Durand-Guerrier V., Arsac G. (2003) Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques : Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en didactique des mathématiques* 23 (3), 295-342.

Durand-Guerrier V., Arsac G. (2005) An epistemological and didactic study of a specific calculus reasoning rule. *Educational Studies in Mathematics* 60, 149-172.

Duval R. (1995), *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Berne : Peter Lang.

Frege G. (1879) *Begriffsschrift*. Traduction française (1999). Besson C., Barnes J. (Trad.) Paris : Vrin.

Gentzen G. (1935) Untersuchungen über das logische Schliessen. *Mathematische Zeitschrift* 39, 176-210 et 405-431.

Quine W. V. O. (1950) *Methods of logic*. New York : Holt, Rinehart & Winston. Traduction française (1972) Paris : Armand Colin.

Quine W. V. O. (1960) *Word and Object*. Cambridge (Mass.) : MIT Press. Traduction française (1977) Paris : Flammarion.

Quine W. V. O. (1970) *Philosophy of logic.* Englewood Cliffs : Prentice-Hall. Traduction française (1975) Paris : Aubier.