SUR LA DIMENSION CULTURELLE DE L'ENSEIGNEMENT
DE LA SIGNIFICATION D'UN PLÉONASME

Rudolf BKOUCHE*

Résumé – Parler de dimension culturelle de l'enseignement apparaît comme un pléonasme. Si la question se pose aujourd'hui, c'est que l'enseignement s'est coupé de la culture. C'est ce point que nous examinerons dans un premier temps. Second point, pourquoi ce rapprochement entre la dimension culturelle de l'enseignement d'une science et la dimension historique ? L'intervention de l'histoire dans l'enseignement relève moins d'un accompagnement culturel que de sa contribution à la compréhension de cette science. Cela nous renvoie à la notion de perspective historique, ce que nous développerons via la notion de grandeur et le calcul littéral. Ces deux points nous conduisent à insister sur la culture des professeurs.

Mots-clefs : calcul littéral, culture, enseignement, formation des maîtres, histoire des mathématiques

Abstract – To talk about cultural dimension of teaching appears as a pleonasm. If the question is answered to ay, that is because teaching has cut from culture. This is first point we shall examine. Second point. Why a link between cultural dimension of the teaching of a science and the historical dimension ? The introduction of history in teaching is less a cultural accompaniment than a contribution to the comprehension of this science. We shall talk about the historical perspective with the examples of the magnitudes and the literal computing. This two points lead us to talk about the culture of teachers.

Keywords: literal computing, culture, education, teachers' training, history of mathematics

Si donc la culture nous pose un problème, c'est donc, et tout d'abord, qu'elle est en décadence (Rougemont 1972)

Il est plus aisé de suivre dans l'histoire les sauts accomplis dans les sciences empiriques et dans les humanités que de répondre à la toute simple question: comment se fait-il que Galilée et Newton ont laissé sur le carreau d'un massacre épistémologique la physique aristotélicienne alors que les démonstrations d'Euclide, elles, gardent toute leur validité ? (Kowalevski 1989)

I. INTRODUCTION

Qu'est-ce que la dimension culturelle de l'enseignement ? Si cette expression n'est pas un pléonasme, c'est que les termes « enseignement » et « culture » ont perdu leur sens. La question se pose alors de comprendre pourquoi on sent le besoin aujourd'hui de rapprocher ces deux termes comme s'ils relevaient de domaines hétérogènes qu'il faudrait recoller. Cela nous conduit à revenir sur les objectifs de l'enseignement et particulièrement de l'enseignement scientifique.

Second point que nous aborderons : que signifie le rapprochement entre dimension culturelle et dimension historique lorsqu'on parle de l'enseignement d'une science ? L'histoire d'une science est une discipline et si elle intervient dans l'enseignement d'une science, c'est moins comme accompagnement culturel que par ce qu'elle apporte à la compréhension de cette science. En ce sens, ce qu'on appelle la perspective historique dans l'enseignement d'une science s'inscrit dans l'enseignement de cette science ; reste alors à définir les modalités de cette inscription, ce que nous développerons dans la seconde partie de cet exposé. Mais rien ne serait plus dangereux que de réduire cette inscription à une « dimension culturelle », comme si le fait de parler de l'histoire de la discipline suffisait pour non seulement la mieux faire comprendre aux élèves mais encore pour amener les élèves à mieux en appréhender les divers enjeux.

* IREM de Lille, Université de Lille – France – rbkouche@wanadoo.frq

II. DES OBJECTIFS DE L'ENSEIGNEMENT

On peut considérer que l'enseignement a un double objectif, d'une part l'intégration des nouvelles générations dans la société, d'autre part l'émancipation des individus (Arendt 1990)[1]. C'est dans ce cadre que l'on peut considérer l'enseignement comme s'inscrivant dans la culture d'une société. L'enseignement est ainsi le lieu de transmission des savoirs propres à cette société, savoirs dont l'objectif est, soit de comprendre le monde, soit d'agir sur le monde, soit de construire les règles qui régissent les rapports entre les hommes dans la société.

Ce double objectif, intégration et émancipation, est-il encore pertinent dans la société contemporaine ? L'évolution des contenus d'enseignement depuis un siècle peut apporter des éléments de réponse à cette question (Belhoste, Gispert et Hulin 1996).

L'exemple des mathématiques est à cet égard significatif de cette évolution. Cet enseignement a été marqué par deux grandes réformes, la première au début du XX^{e} siècle, la seconde dans la seconde partie de ce siècle. Après l'échec de cette seconde réforme, les programmes se sont réduits à une accumulation de morceaux de savoir sans grande cohérence globale, l'objectif étant moins de transmettre une connaissance des mathématiques que d'assurer la réussite scolaire des élèves. Cette situation conduit à la double question : que signifie un tel enseignement ? que signifie la réussite scolaire des élèves ?

Il faut, pour comprendre ces questions, noter que le discours contemporain sur l'enseignement s'intéresse essentiellement aux élèves, discours qui exprime ce qu'on peut appeler l'idéologie de la centralité de l'élève. Il est alors moins question de définir des contenus de savoir à transmettre et les modalités de cette transmission que de rechercher ce qui peut satisfaire l'élève devenu « consommateur d'école », une conception marchande de l'enseignement pourrait-on dire. Dans ces conditions le professeur perd son rôle de porteur de savoir pour n'être plus que l'animateur des activités de l'élève, ce que certains considèrent comme la nouvelle forme du métier d'enseignant (Meirieu 1990). Une telle conception est portée par deux idéologies que nous avons définies ailleurs comme une idéologie moralisante et une idéologie savante (Bkouche 1992).

Face à cette mercantilisation de l'enseignement, la tentation est grande, d'abord de chercher à réintroduire dans l'enseignement une dimension culturelle, ensuite de chercher les moyens de cette réintroduction et l'histoire des sciences apparaît comme l'un de ces moyens. Mais cette tentation ne conduit-elle pas à un leurre ? Cette question nous conduit à revenir d'abord sur les notions de dimension culturelle et de dimension historique. Nous nous restreindrons dans ce texte au seul enseignement des mathématiques.

III. LA CULTURE DES PROFESSEURS

Lorsque l'on parle de dimension culturelle de l'enseignement des mathématiques, on renvoie autant à un point de vue interne qui concerne à la fois les mathématiques et leurs rapports aux autres sciences qu'à un point de vue externe qui concerne la place des mathématiques dans la société. Mais une telle dimension culturelle n'a de sens que si elle s'appuie sur ce qu'on peut appeler la culture des professeurs, laquelle suppose d'une part la maîtrise de la discipline enseigné et d'autre part des connaissances sur les rapports de cette discipline avec d'autres domaines de la connaissance ainsi que sur les enjeux de société en rapport avec leur discipline. L'acquisition de cette culture est alors l'un des enjeux de la formation des maîtres.

---

[1] Rappelons que pour Hannah Arendt, ces deux objectifs, s'ils sont complémentaires, présentent des aspects contradictoires.

La pédagogie, aussi importante soit-elle, vient en second et se construit en fonction de cette culture des professeurs.

C'est pourquoi au classique triangle didactique « l'élève, le professeur, le savoir » nous préférons substituer le triptyque « la discipline, l'enseignement, la classe » (Bkouche 2010). Ce triptyque a l'avantage de remettre le savoir au centre de l'acte d'enseignement.

IV. PERSPECTIVE HISTORIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT D'UNE SCIENCE

Dans cette recherche éperdue de la dimension culturelle de l'enseignement, on a cru trouver une réponse dans l'histoire des sciences. Comme si la connaissance de l'histoire de ce que l'on enseigne allait permettre aux élèves de mieux comprendre ce qu'on leur enseigne.

Dans la préface de l'ouvrage *The Principles of Quantum Mechanics*, Dirac explique que le choix qu'il a fait pour introduire la mécanique quantique, la méthode symbolique plutôt que la méthode des coordonnées utilisée dans la plupart des ouvrages de mécanique quantique, l'a conduit à rompre avec toute présentation historique :

> This has necessitated a complete break from the historical line of development, but this break in an advantage through enabling the approach to the new ideas to be made as direct as possible. (Dirac 1930)

Pourtant une introduction historique peut être utile pour comprendre la mécanique quantique et plus précisément les raisons qui ont conduit Dirac à développer la méthode symbolique. Mais le traité de Dirac semble s'adresser à des lecteurs qui ont déjà une idée de la mécanique quantique et son objectif est de donner une présentation synthétique indépendante de la façon dont la mécanique quantique s'est mise en place.

Que peut-on dire en ce qui concerne l'enseignement secondaire ? Une introduction historique est-elle utile pour aborder une question nouvelle ? On ne peut espérer une réponse unique à une telle question. Si une introduction historique peut être utile dans certains cas, elle n'a rien de nécessaire et peut être nuisible dans d'autres cas. A quoi cela sert-il de faire l'histoire du produit scalaire pour l'introduire alors que ce qui importe c'est de montrer son efficacité dans les problèmes métriques ? Et faut-il raconter les difficiles débuts du calcul différentiel pour l'enseigner ?

C'est pourquoi, à l'introduction de l'histoire des sciences dans l'enseignement, nous préférons la notion de perspective historique telle qu'elle s'est dégagée à partir des travaux de la Commission Inter-IREM Epistémologie (1988).

Que l'histoire intervienne explicitement dans la classe est ici secondaire, c'est à chaque professeur de définir la part d'histoire qu'il peut introduire dans son enseignement et la forme de cette introduction (cours, lecture de textes…). Plus intéressant est le rôle que peut jouer l'introduction d'une perspective historique dans l'élaboration de l'enseignement. Non que la perspective historique constitue une panacée pour résoudre les problèmes d'enseignement, une telle panacée n'existe pas, mais le recours à l'histoire permet de mieux prendre en charge certaines questions d'enseignement. C'est alors à chaque professeur de définir, dans le cadre de son enseignement, la façon dont il se sert de l'histoire, ce qui exige d'une part que les professeurs connaissent l'histoire de la discipline qu'ils enseignent, et d'autre part qu'ils aient nourri cette connaissance d'un travail de réflexion qui renvoie à l'épistémologie. Cela renvoie encore une fois à la culture des professeurs.

Ce n'est pas le lieu d'entrer ici dans les détails, renvoyant à des travaux antérieurs (Bkouche 1997, 2000a). Nous nous contentons ici de citer deux points, d'une part la mise en perspective historique permet de mieux comprendre les enjeux d'une théorie, d'autre part la connaissance des difficultés rencontrées lors de l'élaboration d'une théorie permet de mieux prendre en charge les difficultés rencontrées par les élèves au cours de l'apprentissage ; nous précisons ces deux points à travers deux thèmes : la mesure des grandeurs et le calcul littéral. Pour d'autres thèmes nous renvoyons à (Bkouche 2000a), article dans lequel nous abordons les thèmes suivants : la notion de limite, la géométrie dans l'espace en liaison avec la représentation perspectiviste, le lien entre la géométrie et l'algèbre linéaire.

V. DE LA MESURE DES GRANDEURS

La notion de grandeur a disparu de l'enseignement des mathématiques avec la réforme dite des *mathématiques modernes*. Cette notion, dont nous verrons qu'elle a joué un rôle important dans le développement des mathématiques et en particulier dans ce que l'on appelle la généralisation de la notion de nombre, a été considérée comme relevant des mathématiques appliquées. A la décharge des réformateurs enfermés dans leur volonté d'enseigner les mathématiques qui se font[2], rappelons que le point de vue ensembliste a permis de présenter la généralisation de la notion de nombre sous une forme purement arithmétique ; il n'était donc plus besoin de s'appuyer sur la notion de grandeur considérée comme relevant de la physique et des mathématiques dites appliquées. Aujourd'hui, sous l'influence d'une conception moralisante de l'interdisciplinarité, on réintroduit les grandeurs pour faire « concret » et rapprocher l'enseignement des mathématiques de celui de la physique. On commet ici une double erreur. D'une part, la notion de grandeur n'est pas concrète, c'est même l'une des premières abstractions à l'origine du développement des mathématiques. D'autre part, c'est un travail sur les grandeurs qui a conduit au développement de l'algèbre comme nous le verrons ci-dessous.

Une réflexion d'ordre historique permet alors de comprendre la place de la notion de grandeur dans le développement des mathématiques et par conséquent sa place dans l'enseignement. S'il ne s'agit pas de reprendre la démarche historique dans l'enseignement, il s'agit, en s'appuyant sur la connaissance historique, de mettre en place une problématique qui montre comment la mesure des grandeurs a conduit à généraliser la notion de nombre à partie de la notion d'entier naturel, à commencer par la notion de fraction comme l'écrit Hermann Weyl :

> Historically **fractions** owe their creation to the transition from counting to **measuring**. (Weyl H. 1949)

1. Qu'est-ce qu'une grandeur ?

Dans ses *Leçons d'Arithmétique théorique et pratique*, Tannery rappelle cette définition vague

> ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution. (Tannery 1928)

mais il explique que cette définition est suffisante pour une première appréhension des grandeurs.

Une telle définition ne nous apprend pas grand chose sur ce qu'est une grandeur mais elle apparaît suffisante dans un premier enseignement dès que l'on a donné des exemples de grandeurs comme les longueurs, les poids ou les durées.

La première question qui se pose à propos des grandeurs est de les comparer, ce qui conduit au mesurage que l'on peut considérer comme un mode de comptage. On est ainsi

[2] La mode dans les années soixante était d'opposer la « science qui se fait » à la « science déjà faite », ce qui conduisait à mettre en avant l'enseignement de la première en oubliant que celle-ci se construit sur la seconde. En cela on oubliait que la modernité scientifique n'est jamais transparente et que l'enseignement scientifique s'appuie sur des progressions à définir à partir de la science déjà faite.

conduit à la définition de la mesure. Pour simplifier cet exposé nous nous restreindrons, sauf mention explicite, aux longueurs, les grandeurs associées aux segments de droite.

2. *De l'égalité des segments de droite*

Etant donnés deux segments de droite, nous dirons qu'ils sont *égaux* ou qu'ils ont *même longueur* si on peut amener le premier sur le second. La définition de l'égalité est ainsi liée au mouvement renvoyant au principe de l'égalité par superposition que l'on peut énoncer sous la forme suivante :

> Deux objets que l'on peut superposer sont égaux.

C'est en s'appuyant sur ce principe qu'Euclide démontre le premier cas d'égalité des triangles :

> Si deux triangles ont deux côtés égaux à deux côtés, chacun à chacun, et si les angles compris par les côtés sont égaux, ces triangles auront leurs bases égales, ils seront égaux, et les angles restants, sous tendus par les côtés égaux, serons égaux chacun à chacun. (Euclide 1993)

Une fois cette proposition démontrée, Euclide peut se passer du mouvement. Ainsi la géométrie élémentaire s'appuie sur le mouvement pour pouvoir l'éliminer (Bkouche 2000b).

Une fois définie l'égalité des segments et la notion de longueur, on peut définir une longueur particulière que l'on appellera la *longueur unité* et le mesurage n'est autre que l'opération qui consiste à compter combien de fois une longueur donnée contient la longueur unité.

Cette opération exige de définir d'abord un calcul sur les longueurs, ensuite la notion de rapport de longueurs. On peut alors définir la mesure d'une longueur par rapport à la longueur unité choisie comme le rapport de la longueur donnée à la longueur unité. Reste alors à définir ce rapport comme nombre.

3. *Calcul sur les grandeurs*

La longueur est une grandeur additive, c'est-à-dire que l'on peut définir l'addition des longueurs, celle-ci étant commutative et associative. On peut alors définir la multiplication par un entier. Rappelons que, deux longueurs a et b étant données, on dit que b est un *multiple* de a si $b = \mathrm{n}a$ où n est un entier naturel ; on dit aussi que a est un *diviseur* de b. On dit alors que deux longueurs sont *commensurables* si elles ont un diviseur commun, *incommensurables* dans le cas contraire.

Soient a et b deux longueurs et c un diviseur commun, on peut écrire les relations

$$a = \mathrm{m}c \qquad\qquad b = \mathrm{n}c$$

et on dit que le rapport de a à b est égal au rapport de m à n.

On montre aisément que si d est un autre diviseur commun de a et b, c'est-à-dire si on peut écrire les relations

$$a = \mathrm{p}d \qquad\qquad b = \mathrm{q}d$$

on a la relation

$$\mathrm{mq} = \mathrm{np}$$

Cette dernière relation permet de définir la notion de rapport de deux grandeurs commensurables de façon indépendante du choix du diviseur commun.

Le calcul du rapport de deux grandeurs conduit alors à chercher un diviseur commun à ces deux grandeurs. L'algorithme d'Euclide permet de déterminer le plus grand diviseur commun de deux longueurs.

Pour mettre en place l'algorithme, nous devons faire l'hypothèse que deux longueurs étant données, il existe un multiple de la plus petite supérieur à la plus grande, ce que l'on appelle l'*axiome d'Archimède*. On procède alors de la façon suivante :

Soient a et b deux longueurs, a étant inférieure à b, l'axiome d'Archimède implique qu'il existe un entier n tel que

$$\mathrm{n}a \leq b < (\mathrm{n} + 1)b$$

ce qui permet d'écrire

$$b = \mathrm{n}a + a_1$$

où a_1 est inférieur à a.

L'opération ci-dessus est appelée la *division* de b par a et la longueur a_1 est appelée le *reste* de la division. Il est clair que tout diviseur commun aux longueurs a et b divise la longueur a_1.

On peut continuer, c'est-à-dire diviser a par a_1 et obtenir le reste a_2, et ainsi de suite. On obtient une suite de longueurs b, a, a_1, a_2, …, a_n, … et tout diviseur commun de a et b divise les éléments de la suite b, a, a_1, a_2, …, a_n, ….

On montre aisément que si a et b ont un diviseur commun, la suite s'arrête au sens qu'il existe un entier p tel que a_p divise $a_{\mathrm{p}-1}$, le dernier terme a_p est le plus grand diviseur commun de a et b. Réciproquement, si la suite s'arrête, le dernier terme de la suite est le plus grand diviseur commun de a et b.

La question se pose alors de savoir si la suite s'arrête.

Pour les pythagoriciens, deux longueurs sont commensurables et on peut définir leur rapport comme un rapport d'entiers. Le problème se posera avec la découverte de longueurs incommensurables, l'exemple classique étant le couple de longueurs défini par le côté d'un carré et sa diagonale, l'opération d'antiphérèse montrant que la suite définie par l'algorithme d'Euclide ne s'arrête pas (Szabo 2000, pp. 162-163).

Une fois découverte l'existence de couples de longueurs incommensurables, la question se posera de la définition du rapport de deux longueurs. C'est ce qu'expose Euclide au livre V des *Eléments*.

4. Rapport de grandeurs et théorie des proportions

Euclide ne donne pas de définition précise du rapport de deux grandeurs, se contentant de dire que le rapport de deux grandeurs est « une certaine manière d'être entre elles suivant la quantité » (Euclide 1993, Livre V, Définition 5)[3]. Cependant il suppose une condition qui n'est autre que l'axiome d'Archimède rappelé ci-dessus. Il peut alors donner une définition précise de l'égalité de deux rapports, puis de l'ordre entre les rapports, qu'il énonce de la façon suivante :

> Des grandeurs sont dites être en même rapport, la première à la seconde, et la troisième à la quatrième, lorsque des équimultiples quelconques de la première et de la troisième, et d'autres équimultiples quelconques de la seconde et de la quatrième sont tels, que les premiers équimultiples surpassent, chacun

[3] Dans sa traduction, Peyrard utilise le terme « raison » qui est équivalent au terme « rapport ». C'est ce dernier terme que nous utilisons dans la suite.

> à chacun, les seconds équimultiples, ou leur sont égaux à la fois, ou plus petits à la fois. (Euclide, 1993, Livre V, définition 6)
>
> Lorsque, parmi ces équimultiples, un multiple de la première surpasse un multiple de la seconde, et qu'un multiple de la troisième ne surpasse pas un multiple de la quatrième, on dit alors que la première a avec la seconde un plus grand rapport que la troisième avec la quatrième. (Euclide 1993, Livre V, Définition 8)

Ces définitions lui permettent de développer la théorie des proportions (égalité de rapports) qu'il utilisera pour l'étude des proportions géométriques, ce qu'il développe au Livre VI des *Eléments*.

5. *Mesure des grandeurs et généralisation de la notion de nombre*

Si, avec la théorie des proportions, Euclide a défini l'égalité des rapports, il n'en a pas pour autant donné la définition d'un rapport, encore moins défini le rapport comme un nombre.

Reste cependant la question de relier sa construction théorique avec la pratique de la mesure. Cela conduira à introduire des "nombres" nouveaux dont le statut reste mal défini. Si, lorsque deux grandeurs sont commensurables on peut définir leur rapport comme un rapport de nombre à nombre ce qui conduit à la notion de *nombre rompu* (la notion de fraction), la question des couples de grandeurs incommensurables reste entière et conduira à parler de *nombres sourds*[4].

A la fin du XVI^{e} siècle, Stevin décidera que tous les nombres se valent pour que les divers types de nombres (entiers, rompus, sourds) soient considérés de même nature (Groupe Epistémologie et histoire des mathématiques 1987, pp. 134-135). Mais ce que l'on peut considérer comme un coup de force épistémologique de la part de Stevin ne résout pas le problème et il faudra attendre la seconde partie du XIX^{e} siècle pour que les nombres sourds acquièrent un statut clair avec Dedekind, Cauchy, Méray et Weierstrass. Mais cela est une autre histoire.

6. *La définition arithmétique des nombres*

Le développement de l'analyse et les problèmes que pose la notion de limite conduiront à remettre en question, au tournant des XVIII^{e} et XIX^{e} siècles, la place de la géométrie comme modèle de la rigueur mathématique, remise en question renforcée par la découverte (ou l'invention !) des géométries non euclidiennes.

Ainsi Bolzano cherchera une démonstration numérique du fait que, une fonction continue f étant définie sur un intervalle $[a,b]$, si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes différents, alors la fonction s'annule pour au moins une valeur située dans l'intervalle $[a,b]$ (Bolzano 1964). Si sa démonstration reste incomplète dans la mesure où il ne dispose pas de la notion de nombre réel, elle met en place les ingrédients nécessaires qui seront repris une fois définie la notion de nombre réel.

Une première solution sera proposée par ce que l'on appelle l'arithmétisation de l'analyse conduisant à reconstruire le numérique à partir des entiers. La théorie des ensembles y ajoutera la définition des ensembles de nombres aujourd'hui notés **N**, **Z**, **Q**, **R**.

7. *Construction des nombres rationnels*

On définit sur l'ensemble des couples d'entiers la relation R[(m,n),(p,q)] définie par

$$mq = np$$

[4] Cette dénomination, introduite par les mathématiciens arabes, désigne les nombres que la raison n'entend pas.

et l'on montre aisément que c'est une relation d'équivalence dont on peut noter la ressemblance, non fortuite, avec la relation qui définissait l'égalité des rapports de nombres.

On définit sur l'ensemble des couples d'entiers une addition et une multiplication qui ne sont autres que l'addition et la multiplication des fractions. Ces opérations sont compatibles avec la relation d'équivalence.

Le quotient de l'ensemble des couples d'entiers par la relation d'équivalence R n'est autre que l'ensemble des nombres rationnels positifs.

8. Construction des nombres réels (Dedekind 2008)

Les nombres réels sont au fondement de l'analyse et leur construction est nécessaire pour démontrer les propriétés élémentaires des fonctions continues. Cette construction a permis d'abord de construire l'analyse indépendamment de toute référence géométrique et ensuite de redéfinir la notion de continuité géométrique comme l'explique Dedekind dans son article « Continuité and Nombres Irrationnels » (Dedekind 2008). On peut cependant noter que, si la construction de Dedekind permet de construire l'analyse indépendamment de toute référence géométrique, l'idée de coupure qu'il introduit est d'origine géométrique.

9. Retour à la mesure des grandeurs

La construction des nombres réels permet de redéfinir la mesure des grandeurs comme une application d'un ensemble de grandeurs dans l'ensemble des nombres réels. Nous nous appuyons ici la construction donnée par Jules Tannery dans *ses Leçons d'Arithmétique théorique et pratique* déjà citées (Tannery 1928), construction que nous reformulons pour mieux faire apparaître le lien avec la construction d'Eudoxe - Euclide.

Pour ce faire, nous définissons une section positive commençante comme une partie de l'ensemble des rationnels strictement positifs telle que si un nombre rationnel positif appartient à cette partie, alors tout nombre rationnel positif inférieur au nombre donné appartient encore à cette partie. Une section positive commençante définit un nombre réel positif.

On suppose que l'ensemble des grandeurs que l'on considère est additif et satisfait l'axiome d'Archimède, on associe à tout couple de grandeurs (a, b) la section positive commençante

$$S(a, b) = \{p/q \mid pb < qa\}$$

et on appelle *rapport* de a à b le nombre réel positif défini par $S(a,b)$, on le note a/b.

On vérifie aisément les propriétés suivantes :

Soient (a, b) et (c, d) deux couples de grandeurs, alors

I : les rapports a/b et c/d sont égaux si et seulement si les sections positives commençantes $S(a, b)$ et $S(c, d)$ sont les mêmes.

Ii : le rapport a/b est strictement supérieur au rapport c/d si et seulement $S(a, b)$ contient strictement $S(c, d)$.

Ces propriétés sont analogues aux définitions 6 et 8 du Livre V des *Eléments* d'Euclide rappelées ci-dessus.

VI. DE LA THEORIE DES EQUATIONS AU CALCUL LITTERAL

Dans un ouvrage destiné à des élèves de cinquième, les auteurs écrivent pour expliquer les *raisons* du calcul littéral :

> La résolution d'un problème est souvent facilitée lorsqu'on représente par des lettres les nombres inconnus qui interviennent dans ce problème. (Lebossé et Hémery 1948)

précisant ensuite :

> On peut raisonner sur ces lettres comme s'il s'agissait de nombres inconnus.

Nous ajouterons ici que si on n'a pas compris que le calcul littéral participe de la construction du simple, construction qui est l'un des objectifs du travail du mathématicien (Bkouche 1997), on n'a pas compris ce que signifie le calcul littéral. Le premier objectif d'un enseignement du calcul littéral est alors d'amener les élèves à prendre conscience de ce caractère de simplicité. Replacer le calcul littéral dans une perspective historique apparaît alors comme une façon de comprendre ce caractère de simplicité. Cela nous conduit à définir les trois aspects du calcul littéral, la lettre comme inconnue et comme paramètre, la lettre comme variable et la lettre comme indéterminée.

1. La lettre comme inconnue

L'utilisation des équations pour résoudre un problème s'inscrit dans le prolongement de la méthode « analyse – synthèse » des géomètres grecs pour les problèmes de constructions géométriques. Pour préciser cela, nous mettrons en parallèle un texte de Pappus sur l'analyse et la synthèse et un texte de François Viète.

Pappus écrit au Livre VII de la *Collection Mathématique* :

> L'analyse est donc la voie qui part de la chose cherchée, comme étant concédée, pour aboutir, au moyen des conséquences qui en découlent, à la synthèse de ce qui a été concédé. En effet, supposant, dans l'analyse, que la chose cherchée est obtenue, on considère ce qui dérive de cette chose et ce dont elle est précédée, jusqu'à ce que revenant sur ses pas, on aboutisse à une chose déjà connue ou qui rentre dans l'ordre des principes ; et que l'on nomme cette voie l'analyse en tant qu'elle constitue un renversement de la solution. Dans la synthèse, au contraire, supposant la chose finalement perçue par l'analyse comme déjà obtenue, et disposant dès lors de ses conséquences et ses causes dans leur ordre naturel, puis, les rattachant les unes aux autres, on aboutit en dernier ressort à construire la chose cherchée ; et c'est ce que nous appelons la synthèse. (Pappus 1982)

Quant à Viète, il écrit au début de l'*Art Analytique* :

> Il y a une voie aux mathématiques pour enquérir et rechercher la vérité, laquelle est dite premièrement trouvée par Platon et par Théon, appelée Analyse, et d'icelles définies par l'Assumption du requis comme concédé par les conséquences au vrai concédé. Comme au contraire la Synthèse, l'Assumption du concédé par les conséquences tirées de la fin et compréhension du requis. Et bien que les anciens aient seulement proposé deux espèces d'analytiques, savoir la zététique et la poristique auxquelles convient très bien la définition de Théon, j'en ai toutefois constitué une troisième espèce convenables à icelles, laquelle sera site rétique exégétique. Comme étant le Zététique, celui par lequel est trouvée l'égalité ou proportion de la grandeur requise avec celles qui sont données, le Poristique, par lequel est enquis de la vérité du Théorème ordonné, par l'égalité et la proportion, l'Exégétique, par lequel est exhibé la même grandeur dont est question, par l'égalité ou proportion ordonnée. Et ainsi tout l'art Analytique s'attribuant ce triple office sera défini la doctrine de bien trouver aux Mathématiques. (Vaulezard 1986)

Cette mise en parallèle nous rappelle l'origine du terme *"analytique"*.

La mise en équation revient à écrire les relations entre les quantités inconnues et les quantités connues et à calculer avec les quantités inconnues comme si elles étaient connues. Pour ce faire, on représente les quantités inconnues par des mots, la *racine*, comme le fait Al-Khwarizmi dans son ouvrage fondateur (Al-Khwarizmi 2007) ou la *chose* comme le feront les géomètres italiens du début du XVI^{e} siècle et plus tard par des lettres. Il faut alors noter que les coefficients numériques qui interviennent dans les équations jouent le rôle de "nombres génériques" au sens où, si l'on change la valeur de ces coefficients, le développement des calculs ne change pas.

2. Le calcul littéral

La représentation littérale des inconnues sera élargie par François Viète lorsqu'il représentera aussi les quantités connues par des lettres. Un tel élargissement permet d'éviter l'usage des nombres génériques puisque cet usage est indépendant des valeurs numériques, mais cet élargissement est lié au fait que les calculs portent non seulement sur des nombres mais plus généralement sur des grandeurs. C'est l'analogie entre le calcul sur les nombres et le calcul sur les grandeurs qui conduira Viète à écrire :

> Le Logistique Numérique est celuy qui est exhibé et traité par les nombres, le Spécifique par les espèces ou formes des choses : comme par les lettres de l'alphabet. (Vaulezard 1986)

Viète précise que le calcul sur les grandeurs est plus simple que le calcul numérique en ce qu'il est contraint par la loi des homogènes, ce qui conduit Viète à introduire cette loi dans le calcul sur les nombres, critiquant Diophante pour avoir ignoré cette loi. La loi des homogènes apparaît ainsi comme un point crucial du calcul littéral, ce qui pose la question de son explicitation dans l'enseignement si on veut que le calcul littéral apparaisse autrement que comme un exercice de style, mais cette explicitation ne prend son sens que dans un calcul sur les grandeurs, ce qui renvoie à la géométrie et à la physique[5]. Cela montre la place de la géométrie et de la physique dans l'enseignement du calcul littéral.

3. La notion de paramètre

La représentation des constantes par des lettres conduira à la notion de *paramètre*, un paramètre désignant une constante (nombre ou grandeur) dont la valeur peut varier. On peut alors classer les équations en fonction des paramètres ce qui permet de discuter de l'existence et du nombre de solutions, l'exemple classique étant l'équation du second degré.

Le passage des équations à coefficients numériques aux équations à coefficients littéraux marque une étape importante de la progression de l'enseignement de l'algèbre. La difficulté, dans l'enseignement, vient de ce qu'une littéralisation trop rapide risque de cacher la question sous ses aspects techniques et de couper ceux-ci de leur signification théorique. Il est donc nécessaire d'introduire la représentation littérale des quantités connues lorsque celle-ci permet de mieux appréhender une question. Ce qui conduit à mettre en avant, dans l'enseignement, d'abord le rôle des équations, ensuite le rôle déjà signalé de la géométrie et de la physique dans l'enseignement du calcul littéral.

La représentation littérale des constantes conduira à la notion de polynômes, sur laquelle s'appuie la théorie des équations algébriques, laquelle s'est identifiée à l'algèbre jusqu'à la mise en place des structures algébriques au XIX^{e}. Mais ce n'est pas ici le lieu de développer cette partie du calcul littéral nous contentant de renvoyer à quelques ouvrages classiques d'algèbre, tels que les *Leçons d'Algèbre élémentaire* de Carlo Bourlet et le *Cours d'Algèbre* de Pierre Chenevier, à l'usage des élèves des classes de Mathématiques élémentaires des lycées, ou encore, à un niveau plus élémentaire, l'ouvrage d'*Algèbre* d'Emile Borel et Paul Montel.

---

[5] On peut relier la loi des homogènes aux équations aux dimensions.

4. *La géométrie analytique*

L'invention de ce que l'on appelle aujourd'hui de la géométrie analytique, c'est-à-dire l'algébrisation de la géométrie, a suivi de près le travail de Viète. Cette algébrisation de la géométrie conduira en retour à une géométrisation de la théorie des équations et il faut voir dans cette dialectique « algébrisation – géométrisation » un aspect essentiel des mathématiques contemporaines.

Nous citerons d'abord la première phrase de *La Géométrie* de Descartes :

> Tous les Problèmes de Géométrie se peuvent facilement réduire à tels termes qu'il n'est besoin par après que de connaître la longueur de quelques lignes droites pour les connaître. (Descartes 1986, p. 333)

Cette première phrase annonce l'objectif : la réduction des méthodes géométriques au calcul des longueurs. Pour Descartes, un tel calcul doit être analogue au calcul numérique, ce qui le conduit à introduire une longueur unité et renoncer ainsi à la loi des homogènes ; c'est le prix à payer si l'on veut définir le produit de deux longueurs comme une longueur. Si ce calcul se montre à la fois simple et puissant, la géométrie disparaît derrière le calcul. La question se pose alors de retrouver la géométrie sous-jacente, ce qui conduit Descartes à alourdir le discours comme le montre le laborieux chapitre III de l'ouvrage.

Par contre Fermat, en conservant la loi des homogènes, reste plus proche de la géométrie. Il obtient ainsi un calcul moins fluide que celui de Descartes[6], calcul qui permet cependant à Fermat de prendre conscience de l'autonomie du calcul littéral par rapport aux grandeurs que représentent les lettres. C'est ce qui apparaît dans la partie consacrée à la géométrisation de la théorie des équations, d'abord dans l'appendice de son « Introduction aux lieux plans et solides » (Fermat 1896, pp. 95-101), ensuite dans la « Dissertation en trois parties » (Fermat 1896, pp. 109-20). Nous reviendrons ci-dessous sur l'autonomie du calcul littéral.

5. *La lettre comme variable*

La notion de fonction est aujourd'hui une notion essentielle des mathématiques. Pourtant cette notion est susceptible de plusieurs approches dont il n'est pas toujours facile de voir les liens. La définition ensembliste, malgré la simplicité de sa formulation, n'est pas la plus intéressante dans l'enseignement élémentaire[7]. Parmi les entrées possibles, la cinématique tient un rôle important sinon premier.

Etudier un mouvement revient à associer à chaque instant la position d'un mobile. Cette définition se précise lorsque le mouvement est celui d'un point se déplaçant sur une droite. On peut alors considérer le temps lui-même comme un point (un instant) se déplaçant uniformément sur une droite (l'axe des temps). Cette représentation du temps est loin d'être évidente et c'est l'une des grandes conquêtes de la révolution scientifique du XVII^{e} siècle.

En admettant une telle représentation, on peut alors représenter le mouvement d'un point sur une droite comme une fonction du temps. Le temps est ici la variable indépendante et la position du point la variable dépendante. Le mouvement est dit uniforme si les espaces parcourus sont proportionnels aux durées, ce qui conduit à la représentation du mouvement par une relation de la forme

---

[6] Encore que la question se pose des nos habitudes de calcul, plus proches de la présentation cartésienne. Tannery et Henry ont montré comment on pouvait moderniser les calculs de Fermat tout en conservant l'essentiel de sa présentation.

[7] Rappelons que la théorie des ensembles répond à des problèmes qui ne relèvent pas de l'enseignement élémentaire, sauf peut-être en ce qui concerne les probabilités. On peut s'appuyer sur ces dernières pour introduire quelques éléments de théorie des ensembles dans l'enseignement du lycée.

$$x = at + b$$

où x est l'abscisse du point en mouvement sur la droite qu'il parcourt et t le temps[8].

D'autres exemples de fonctions affines peuvent être donnés, mais il nous semble que le mouvement est une entrée essentielle pour l'étude des fonctions.

On rencontre ainsi une nouvelle forme d'utilisation des lettres, les lettres comme représentant des nombres ou des grandeurs variables, une fonction exprimant le mode de dépendance d'une grandeur, la grandeur dépendante, par rapport à la grandeur indépendante.

Lorsque les grandeurs sont des nombres ou représentées par des nombres *via* la mesure, la fonction est définie par une expression composée d'opérations élémentaires telles les quatre opérations arithmétiques augmentées de quelques autres que nous ne précisons pas ici.

Rappelons la définition d'une fonction énoncée par Euler dans son *Introduction à l'Analyse Infinitésimale* :

> Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes. (Euler 1796, t.1, p. 2)

Cette définition est suffisante dans l'enseignement secondaire autant pour les besoins des mathématiques que pour les besoins de la physique.

6. L'autonomie du calcul littéral

La pratique du calcul littéral conduit à remarquer que, une fois les règles de calcul énoncées, on ne se préoccupe plus de ce que représentent les lettres utilisées, nombres ou grandeurs. Le calcul devient ainsi un pur jeu de lettres obéissant à des règles précises.

Pour préciser ce point de vue, nous donnerons l'exemple de l'identité remarquable

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

On peut considérer cette identité comme une façon de représenter une infinité de relations numériques, chacune étant définie en "donnant des valeurs numériques" aux lettres.

On peut aussi considérer que cette identité représente une égalité d'aire si on considère le carré de côté $a + b$ que l'on décompose en deux carrés de côtés respectifs a et b et deux rectangles, chacun de côtés a et b. (nous laissons au lecteur le soin de dessiner la figure)[9].

Si ces représentations sont utiles pour comprendre ce que signifie cette identité, il faut remarquer que le calcul qui conduit à cette identité est indépendant de toute signification des lettres. Il suffit de connaître les règles d'usage de l'addition (l'application qui au couple (a, b) associe l'expression notée $a + b$), de la multiplication (l'application qui au couple (a, b) associe l'expression notée ab), et la règle de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition. Autrement dit, du point de vue du calcul littéral, l'identité ne signifie rien d'autre qu'elle-même en tant que conséquence des règles d'usage.

C'est cela que nous appellerons l'*autonomie du calcul algébrique*. On peut considérer que Fermat l'avait, sinon compris, du moins entrevu, lorsqu'il transformait ses équations pour montrer comment leur résolution conduisait à chercher l'intersection de deux courbes. Cette

[8] Il faudrait distinguer ici la relation entre grandeurs, ce qui renvoie à la loi des homogènes, et la relation entre mesures qui est une relation numérique.

[9] Cette propriété géométrique n'est autre que la proposition 4 du Livre II des *Eléments* d'Euclide. La démonstration euclidienne est purement géométrique, s'appuyant sur la méthode des aires développée dans le Livre I.

autonomisation n'est pas sans poser problème. C'est ce qu'expose Poncelet lorsqu'il énonce les deux postulats de la géométrie analytique.

> Premier postulat : une situation géométrique étant donnée, on peut la représenter par des équations exprimant des propriétés de cette situation géométrique.
>
> Second postulat : après que certains calculs ont été effectués, les nouvelles équations obtenues expriment encore des propriétés de la situation géométrique. (Poncelet 1864, t.2, pp. 320-321)

La question se pose alors de la place de cette autonomie dans l'enseignement de l'algèbre.

La compréhension de cette autonomie s'appuie sur la pratique du calcul littéral, que ce soit sous une forme purement algébrique ou sous la forme de la géométrie analytique ou de la physique ; il ne saurait donc être question d'exiger cette compréhension au début de l'enseignement de l'algèbre. Mais, si dans un premier enseignement, les lettres restent les symboles des quantités, nombres ou grandeurs, qu'elles représentent, on peut penser que l'idée de l'autonomie du calcul se mettra en place au fur et à mesure que se développe la pratique du calcul littéral par l'élève. Ce peut être l'un des objectifs de la terminale S, mais ce peut être aussi l'objectif des terminales littéraires si on relie cette notion d'autonomie à l'enseignement de la philosophie des sciences. Car cette autonomie du calcul littéral reste un des points importants des mathématiques contemporaines.

7. La lettre comme indéterminée

C'est dans le cadre de cette autonomie du calcul qu'il faut comprendre la notion d'indéterminée. Une indéterminée n'est plus une lettre en attente de valeur comme cela se passe dans le premier enseignement du calcul littéral, c'est une lettre qui n'a d'autre signification qu'elle même et dont l'usage est défini par des règles explicites.

Dans ce cadre les polynômes ne sont plus des fonctions mais des assemblages de lettres soumis à des règles de calcul. Mais ces assemblages ne prennent sens que parce qu'ils sont la systématisation de calculs antérieurs, systématisation qui permet de mieux comprendre ces calculs antérieurs. S'il n'est pas question de reprendre l'ordre historique pour expliquer ce passage de la lettre-symbole, c'est-à-dire représentant un objet qui lui est antérieur, un nombre ou une grandeur, à la lettre-signe, l'histoire permet de comprendre comment on est passé d'un calcul littéral symbolique à un calcul littéral autonome, c'est-à-dire portant sur des signes, ici les lettres, indépendamment de toute signification de ces signes, permet de comprendre aussi que ce calcul sur les signes ne prend son sens que si on le replace dans son contexte, moins celui de l'autonomie que celui de l'autonomisation. En cela la notion d'indéterminée ne relève pas de l'enseignement secondaire, tout au plus peut-elle apparaître comme un thème limite en classe de terminale.

Ce court historique sur la constitution et les transformations du calcul littéral rappelle ce principe dont la réforme dite des « mathématiques modernes » a fait prendre conscience, à savoir que l'enseignement secondaire, et en particulier l'enseignement scientifique, a moins pour objectif de dire la modernité scientifique que de donner aux élèves les moyens intellectuels d'accéder à cette modernité.

VII. FORMATION DES MAÎTRES ET CULTURE DES PROFESSEURS

Les considérations sur la perspective historique indiquées ci-dessus nous conduisent à revenir sur la formation des maîtres et son rôle dans la culture des professeurs.

Si l'enseignement est lieu de transmission du savoir, la première exigence du métier de professeur est la maîtrise du savoir que l'on doit enseigner. La pédagogie, qui n'est autre que le moyen de construire les progressions nécessaires pour amener les élèves à acquérir le savoir qu'on leur enseigne, se définit essentiellement par rapport à ce savoir.

La formation des maîtres s'appuie sur ces deux pôles, la maîtrise du savoir, ou des savoirs, que le futur professeur devra enseigner et la mise en place de méthodes pédagogiques au sens que nous avons dit ci-dessus. L'histoire des mathématiques apparaît alors comme un moyen de penser l'enseignement. Nous l'avons vu ci-dessus pour la notion de grandeur et le calcul littéral, celui-ci apparaissant comme un moyen de résoudre les problèmes, problèmes numériques ou problèmes de grandeurs *via* la théorie des équations à laquelle s'identifie l'algèbre. Ce n'est que plus tard que la définition de l'algèbre évoluera, d'une part vers une science générale du calcul, d'autre part vers l'étude des structures algébriques.

Si le rôle de l'enseignement secondaire est moins de raconter le dernier cri de la science que d'expliciter les diverses étapes qui ont conduit à la science d'aujourd'hui, on peut concevoir que l'on s'appuie sur l'histoire pour organiser l'enseignement d'une science, non pour répéter cet histoire, ce qui serait illusoire mais pour en dessiner la trame. C'est ce que nous avons tenté de présenter autour de la notion de grandeur et du calcul littéral.

Mais, comme nous l'avons déjà souligné, ce travail historique préalable à l'organisation de l'enseignement s'appuie sur ce que nous avons appelé la culture des professeurs. C'est alors l'un des points essentiels de la formation des maîtres que de donner les moyens de cette culture aux futurs professeurs.

REFERENCES

Al-Khwarizmi (2007) *Le commencement de l'algèbre*. Texte établi, traduit et commenté par Roshdi Rashed. Paris : Blanchard.

Arendt H. (1990) La crise de l'éducation. Vezin C. (Trad.) In Arendt H., *La crise de la culture*. Paris : Gallimard.

Belhoste B., Gispert H., Hulin N. (Eds.) (1996) *Les sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France et à l'étranger*. Paris : Vuibert-INRP.

Bkouche R. (1992) L'enseignement scientifique entre l'illusion langagière et l'activisme pédagogique. *Repères IREM* 9, 5-12.

Bkouche R. (1997) Epistémologie, histoire et enseignement des mathématiques. *For the learning of mathematics* 17(1).

Bkouche R. (2000a) Sur la notion de perspective historique dans l'enseignement d'une science. *Repères IREM* 39, 5-59.

Bkouche R. (2000b) Quelques remarques autour des cas d'égalité des triangles. *Bulletin de l'APMEP* 430, 613-629.

Bkouche R. (2010) De la formation des maîtres. *Repères IREM* 80, 29-48.

Bolzano B. (1817) Démonstration purement analytique du théorème : entre deux valeurs quelconques qui donnent deux résultats de signes opposés se trouve au moins une racine réelle de l'équation. Traduction française 1964. Sebestik J. (Trad.) *Revue française d'histoire des sciences* 17(2), 129-164.

Borel E., Montel P. (1918) *Algèbre (Nouveau Cours de Mathématiques)*. Paris : Armand Colin.

Bourlet C. (1896) *Leçons d'Algèbre élémentaire (Cours complet de mathématiques élémentaires)*. Paris : Armand Colin.

Chenevier P. (1930) *Cours d'Algèbre, à l'usage des classes de Mathématiques de l'enseignement secondaire (lycées et collèges de garçons et de jeunes filles)*. Paris : Hachette.

Commission Inter-IREM Epistémologie (1988) Pour une perspective historique dans l'enseignement des mathématiques. *Bulletin Inter-IREM Epistémologie*.

Dedekind R. (2008) Continuité et nombres irrationnels (1872). In *La création des nombres*. Introduction, traduction et notes par Houria Benis Sinaceur. Paris : Vrin.

Descartes R. (1986) *La Géométrie*. In Descartes R., *Discours de la Méthode plus la Dioptrique, Les Météores et la Géométrie*. Paris : Fayard.

Dirac P. A. M. (1930) *The principles of Quantum Mechanics*. 3rd edition (1947). Oxford : Clarendon Press.

Euclide (1993), *Les Elément*s, traduits par Peyrard. Paris : Blanchard.

Euler L. (1796) *Introduction à l'Analyse Infinitésimale*, traduit du latin en français, avec des notes et des éclaircissements. Paris : Barrois. Réed. (1987) Paris : ACL-éditions.

Fermat P. (1896) *Œuvres de Fermat,* publiées par les soins de MM. Paul Tannery et Charles Henry. Tome troisième. Tannery P. (Trad.) Paris : Gauthier-Villars.

Groupe Epistémologie et histoire des mathématiques (1987) *Mathématiques au Fil des Ages*. Paris : Gauthier-Villars.

Kolakowski L. (1989) *Horreur métaphysique* (traduit de l'anglais par Michel Barat). Paris : Payot.

Lebossé C., Hémery C. (1948) *Arithmétique, Algèbre et Géométrie (classe de cinquième des lycées et collèges)*. Paris : Fernand Nathan.

Meirieu P. (1990) *Enseigner, scenario pour un métier nouveau*, préface de Louis Legrand, 2e édition augmentée d'un guide pour le conseil pédagogique. Paris : ESF.

Pappus (1982) *La Collection Mathématique*, traduction et notes par Paul Ver Eecke, nouveau tirage. Paris : Blanchard.

Poncelet J.-V. (1864) *Principes d'Analyse et de Géométrie*. Paris : Gauthier-Villars.

Rougemont (de) D. (1972) *Penser avec les mains*. Paris : Gallimard.

Szabo A. (2000) *L'aube des mathématiques grecques*. Traduit de l'allemand. Federspiel M. (Trad.) Paris : Vrin.

Tannery J. (1928) *Leçons d'Arithmétique théorique et pratique (Cours complet pour la classe de Mathématiques A, B)*, dixième édition revue. Paris : Armand Colin.

Vaulézard (1986) *La Nouvelle Algèbre de Monsieur Viète*. Paris : Fayard.

Weyl H. (1963) *Philosophy of mathematics and natural Science*. Princeton University Press. Reprint New York : Atheneum.