APPROCHES EPISTEMOLOGIQUE ET DIDACTIQUE DE L'ACTIVITE DE FORMALISATION EN MATHEMATIQUES

Marc ROGALSKI*

Résumé – On analyse quelques formes que prennent en mathématiques les processus de formalisation, concrètement, aussi bien pour des problèmes ayant eu une dimension historique que pour les « mathématiques de tous les jours ». En même temps, on posera quelques problèmes didactiques sur la transposition possible de ces processus de formalisation. On n'évoquera pas ici la « philosophie formaliste » en mathématiques.

Mots-clefs : formalisation, épistémologie, unification, axiomatique locale

Abstract – We study some forms of formalisation activities in mathematics, in its history and also in « every day » mathematics. We ask some didactic questions about the possible transposition of these processus of formalisation. We say nothing about the « formalist philosophy » in mathematics.

Keywords: formalisation, epistemology, unification, local axiomatisation

I. INTRODUCTION

Ce texte reprend et complète sur certains points (Rogalski 1997). Notre point de départ est la question de la prise en compte éventuelle, en didactique, des pratiques expertes des mathématiciens, dans l'histoire et dans leur activité de tous les jours : la résolution de problèmes.

Les pratiques de résolutions des élèves mises en œuvre dans les exercices et problèmes sont analysées dans certains travaux didactiques, et mises en relation avec certaines pratiques expertes des mathématiciens ; voir par exemple une brève synthèse dans Mac Aleese, Pian, Robert, Rogalski, Viennot (2009). Mais il y a moins d'études sur les réflexions de type « méta » (Dorier 1997, Robert et Robinet 1989, Rogalski 1995) qui pourraient faire comprendre aux élèves ou étudiants certaines démarches fréquentes qui orientent les mathématiciens dans la recherche de résolution de problèmes, y compris par élaboration de théories, locales ou globales ; voir néanmoins Schoenfeld (1980) et Polya (1965).

Je ne m'intéresserai ici qu'aux pratiques expertes qui relèvent de l'activité de formalisation, parce qu'elles semblent constituer un trait marquant de l'évolution des mathématiques, et être une pratique très fréquente actuellement. Elles sont néanmoins très anciennes (qu'on pense à la théorie des grandeurs chez les Grecs). Mais elles ont pris depuis plus d'un siècle une place croissante dans l'activité mathématique, au point d'être devenues un mode de pensée en mathématiques, à la fois dans les restructurations permanentes de l'édifice mathématique (voir Patras 2001) et dans les pratiques de résolution de problèmes.

En bref, la formalisation est une activité extraordinairement productrice, au cours de l'histoire comme dans l'activité quotidienne des mathématiciens, qui permet une meilleure compréhension des mathématiques et une économie importante dans le travail de résolution de problèmes, en particulier parce qu'elle est liée à *une activité réflexive* des mathématiciens sur :

- leurs pratiques spontanées (collectives) de résolution de problèmes : calculs, raisonnements ;

* Laboratoire Paul Painlevé (Lille1-CNRS), Insitut Mathématique de Jussieu (UPMC-CNRS) et Laboratoire de Didactique André Revuz (Université Paris-Diderot) – France – marc.rogalski@upmc.fr

© Rogalski M. (2012) Aproches épistémologique et didactique de l'activité de formalisation en mathématiques. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT3, pp. 504–513). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

- les objets produits dans ces pratiques : organisations de calculs, méthodes, théorèmes, concepts, contre-exemples ;
- la nature des problèmes qu'on essaye de résoudre.

Je me bornerai ici à essayer d'analyser trois types de formalisations, que je retiens parce qu'elles me semblent fréquentes et efficaces.

Les rapports de ces types de formalisation avec l'enseignement se posent évidemment. L'expérience malheureuse des « maths modernes » ne doit pas faire oublier la nécessité d'une prise en compte dans l'enseignement, sous une forme ou une autre, de ce type d'activité des mathématiciens et de développement des mathématiques. Nous essayerons, pour les trois types de formalisations retenues ici, de réfléchir aux possibilités effectives qu'elles puissent être transposées dans l'enseignement, aux niveaux des lycées et surtout de l'université.

Enfin, on n'évoquera pas ici la « philosophie formaliste » en mathématiques c'est-à-dire celle qui est plus fondamentalement liée au formalisme lui-même, au sens de Hilbert, dans la mesure où son objectif concerne l'élucidation de la notion de « vérité » en mathématiques, et non la résolution de problèmes mathématiques.

II. LES GRANDS PROBLEMES CONCERNANT DES NOTIONS MAL OU NON DEFINIES, MAIS « NATURELLES », « INTUITIVES »

1. *Approche épistémologique*

A plusieurs reprises dans l'histoire des mathématiques on constate que l'absence d'une définition suffisamment formelle, générale d'une notion "commune" comprise de façon intuitive par tout le monde, entraîne des *imprécisions* dans les preuves, des *désaccords* sur leur validité, des *réfutations* ou des *controverses*. Ces phénomènes apparaissent lors des essais de résolution de ce qui apparaît souvent a posteriori comme un grand problème concernant cette notion, et peuvent durer lontemps. On voit encore surgir actuellement le même type de situations (en particulier pour des branches des mathématiques qui essayent de résoudre ou de formuler des problèmes issus de la physique contemporaine).

Le saut conceptuel consistant à unifier ces points de vue différents à travers une *définition formelle* est alors le moyen « de rendre tout le monde d'accord » ; cette nouvelle manière formelle de voir la notion en question crée ainsi *un sens nouveau, unifié à un niveau supérieur*. En un sens, cet aspect de la formalisation est constitutif de la « preuve rigoureuse définitive » de résultats longtemps indécis ou controversés. C'est aussi souvent *la délimitation du domaine de validité de résultats* qu'on pensait trop généraux.

Cette activité de formalisation est bien sûr très liée aux différentes manières dont *les mathématiciens créent des définitions*, non pas *a priori*, mais en situation de résolution de problème, individuelle ou collective. Pour cet aspect des choses, nous renvoyons aux travaux de C. Ouvrier-Buffet (Ouvrier-Buffet 2003, 2006), et à la contribution qu'elle propose dans le présent groupe de travail.

2. *Exemples historiques*

On trouvera dans Rogalski (1997) plusieurs exemples, qui illustrent bien ce processus particulier de formalisation, et sa puissance pour le progrès en mathématiques :

* la formule d'Euler pour les polyèdres : seule la définition formelle du polyèdre a été le moyen d'aboutir à une preuve définitive (Lakatos 1976) ;

* la notion de convergence et la pratique des infiniments petits ;

* les implicites de la géométrie d'Euclide, ceux des variétés, ceux des courbes et surfaces algébriques, ceux de la notion d'aire d'une surface (Lebesgue 1915) ;

* la controverse sur les logarithmes des nombres négatifs (Verley 1986) ;

* l'idée naïve de grandeurs et la non commensurabilité de la diagonale du carré à son côté, avec la solution « formelle » d'Eudoxe (Arsac 1987) ;

* les systèmes dynamiques chaotiques, la notion de suite aléatoire, divers problèmes de mécanique statistique.

3. *Questions didactiques*

La question de l'écho que ce processus de formalisation particulier peut ou doit avoir dans l'enseignement des mathématiques est complexe.

D'abord, il s'agit souvent de problèmes difficiles. Ensuite, la volonté de ne plus parler en termes naïfs ou intuitifs de concepts difficiles reste, malgré la réaction à l'épisode des « math modernes », très forte dans le milieu. Or, il semble bien que pour faire vivre dans l'enseignement ce type de processus de formalisation il va falloir se placer à un niveau où la formalisation complète ne sera pas faite, mais où on se contentera seulement de l'ébaucher, voire de la vulgariser. Enfin, parce que ces processus ont souvent eu historiquement de longues durées, ce qui rend difficile leur transposition didactique.

Néanmoins, plusieurs occasions peuvent se présenter, y compris dans les programmes actuels, *de faire que les élèves puissent toucher du doigt l'insuffisance de certaines notions communes, pourtant apparemment claires car reposant sur des images mentales fortes, pour résoudre des problèmes d'énoncés simples*, et de faire vivre en classe une démarche de formalisation raisonnable. Il me semble qu'*il y a un grand intérêt didactique et éducatif à ce que les élèves rencontrent ces moments formalisateurs*, pour leur efficacité et pour leur apport culturel.

Voici un premier exemple (virtuel car jamais testé), qui m'a été suscité par Lehmann (1989). Il s'agit du théorème admis en première : la limite en 0 de sin x/x vaut 1. Parfois, une ébauche de preuve en était donnée, fondée sur les inégalités classiques $\sin x < x < \tan x$, dont on cherchait à donner une raison géométrique. Autant la première inégalité repose sur des intuitions fortes sur la distance, autant le fait que l'arc sous-tendu par un angle soit plus court que le segment déterminé sur la tangente n'a plus rien d'évident visuellement. La preuve alternative utilisant une comparaison de surfaces mène très vite à un cercle vicieux, à moins d'avoir éclairci la raison pour laquelle c'est le même nombre π qu'on trouve dans les mesures de la surface du cercle et de son périmètre… et c'est une question de même nature !

On a OA = 1 (voir la figure 1). On veut montrer PM ≤ arc(AM) ≤ AT. Si PM ≤ AM ≤ arc(AM) sont des inégalités « claires », pourquoi a-t-on arc(AM) ≤ AT ? Il suffiraitt de montrer qu'on a arc(AM) ≤ AI + IM. Pour cela, il faut préciser ce que signifie arc(AM). On pourrait alors faire comprendre qu'un effort pour définir plus clairement la « longueur de l'arc du cercle » (longueur « maximale » qu'on peut approcher par des arcs polygonaux inscrits - sans nécessairement prononcer le nom de borne supérieure) permet de faire facilement la comparaison demandée, dès lors qu'on prouve l'inégalité entre les périmètres de deux polygones *convexes* inclus l'un dans l'autre.

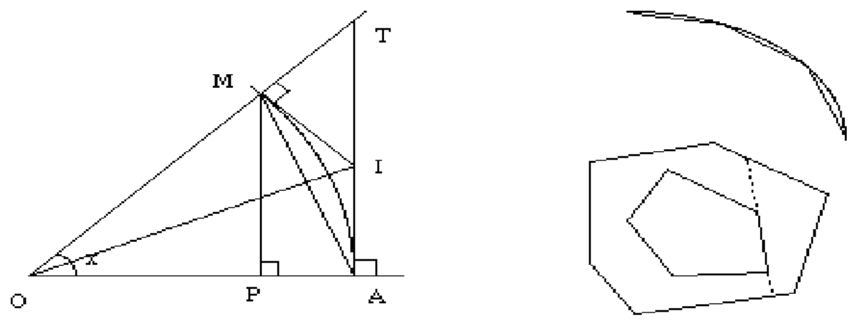

Figure 1

On trouvera dans (Rogalski et al. 2001) une exploitation de cette idée, et comment elle permet de « tirer un fil » menant de la dérivée du sinus au nombre π, au théorème d'Archimède sur l'aire du cercle, et aux versions modernes par l'analyse des fonctions trigonométriques.

Une démarche analogue est possible avec la notion d'aire, en terminale : empiler des petits carrés semble une démarche indispensable au calcul de l'aire intérieure à une *courbe*. Cela peut permettre de relier l'aire du disque à celles des polygones, plutôt que lui laisser un statut de « tarababoum » (Lebesgue 1915) source d'erreurs fréquentes chez les élèves (« si le rayon double, l'aire du disque aussi »).

Troisième exemple, mettre des étudiants de première année d'université devant le problème de calculer le carré du « nombre » 1, 7777… peut faire sentir qu'une définition formelle des nombres comme précisant l'idée de « processus d'approximation » permet de résoudre le problème. Cet exemple a été développé à Lille en première année d'université (CI2U 1990), et est exploité dans (Rogalski 2001, annexe 3).

Un autre exemple est celui développé par D. Grenier, M. Legrand et F. Richard, pour la construction de l'intégrale en première année d'université, dans le cadre du « débat scientifique ». Partant d'une définition « naïve » car ponctuelle de l'attraction de deux masses, il s'agit d'élucider comment on peut la calculer pour des masses non ponctuelles, et cela ne peut se faire que par la construction-définition de la notion d'intégrale. Pour plus de détails, voir (Legrand 1990 dans CI2U 1990) et aussi (Rogalski 2001).

Enfin, les travaux de C. Ouvrier-Buffet, en mettant l'accent sur la notion de définition, explorent les possibilités de constructions de situations didactiques permettant aux élèves d'avoir une activité de construction de définitions, par exemple *pour redéfinir une notion commune* quand il s'agit de l'utiliser dans un domaine ou la notion usuelle ne suffit plus. Nous renvoyons le lecteur à Ouvrier-Buffet (2003).

III. LE PROCESSUS D'UNIFICATION FORMELLE DE DOMAINES DIFFERENTS

1. *Approche générale*

Un autre moment où l'on voit à l'œuvre un processus de formalisation d'une autre nature, est lorsque sont rassemblés sous un même concept ou une même théorie des problèmes et des démarches qui « se ressemblent », ont quelque chose en commun, alors même qu'ils se situent dans des domaines différents. Ce processus d'unification provient d'une *démarche réflexive*, consciente, et qui demande, de la part de ses auteurs, mais aussi des contemporains (et cela n'a pas toujours été de soi) *une « foi» en la puissance créatrice de la pensée unificatrice.* Les concepts crées dans ce type de démarche sont des concepts formalisateurs, unificateurs, généralisateurs, simplificateurs (FUGS), tels qu'évoqués à propos de l'algèbre linéaire dans (Dorier 1997).

C'est typiquement une démarche où l'analogie entre les problèmes, les démarches de résolution, les calculs, joue un grand rôle. La réflexion de nature « méta » est intrinsèquement liée à cette formalisation. C'est l'aspect de la méthode axiomatique qui est devenu le plus courant dans la pratique actuelle des mathématiques.

Ce type de formalisation ne fait pas « perdre le sens » des objets mathématiques manipulés, bien que ce soit un reproche qui lui a été fait (voir aussi plus loin la citation de Patras). Il y a là création d'un sens nouveau, à un niveau supérieur, fondée sur plusieurs aspects :

- les *relations nouvelles* créées entre les différents domaines unifiés ;
- l'usage de *nouveaux registres symboliques*, plus faciles pour faire des calculs ou des raisonnements, et adaptés à tous les cas particuliers à la fois, les changements de registres symboliques étant très porteurs de sens (qu'on pense par exemple à ce qu'évoque la suite d'égalités $(x \mid y) = \Sigma\, x_i y_i = \langle X^*, Y \rangle = y(x) = \int x(t)y(t)\, dt$ dans le cadre du formalisme des espaces de Hilbert) ;
- la création de *représentations mentales plus efficaces* car variées mais liées entre elles (la « géométrisation » de l'analyse fonctionnelle, par exemple).

Ce processus d'unification *organise* autrement des connaissances antérieures, et cette organisation est plus riche par les liens nouveaux et les registres nouveaux qu'elle offre.

A titre d'exemples de ce processus de formalisation par unification, on peut d'abord citer deux thèmes qui ont donné lieu à une étude didactique du point de vue de la transposition.

(a) La création de l'algèbre linéaire, unifiant les règles de calcul et les problématiques linéaires rencontrées dans la résolution des systèmes linéaires, la géométrie vectorielle de l'espace et de la physique, les transformations linéaires, les calculs avec les matrices et les déterminants, les démarches de l'analyse fonctionnelle (des équations aux dérivées partielles linéaires aux opérateurs dans des espaces de dimension infinie). Pour plus de détails, je renvoie à (Dorier 1997).

(b) La création de la topologie générale par Fréchet et Hausdorf est un autre exemple, unifiant les concepts topologiques de l'espace géométrique n-dimensionnel et certaines démarches concernant la convergence des fonctions (Bridoux 2011).

(c) L'évolution historique de la théorie des groupes est aussi typique de ce type de formalisation faisant intervenir des concepts de type FUGS. Pour ce point, je renvoie à la contribution de T. Hausberger dans le présent groupe de travail, et à sa bibliographie.

2. *Questions didactiques*

La prise en compte en didactique de ce deuxième processus de formalisation est sans doute moins malaisée que pour le précédent. Mais elle comporte le risque de donner lieu à un effet Jourdain généralisé qui rende illusoire l'appropriation de la démarche par les élèves, faute de vraie problématique (« voici 10 objets ; je vous dis : ce sont des groupes »).

Elle comporte aussi des difficultés didactiques très particulières : il n'y a pas toujours de bons problèmes d'introduction (pas de situation fondamentale, difficulté à faire jouer la dialectique outil-objet), ce qu'on doit dévoluer aux élèves est alors « l'envie d'unifier » pour forger des savoirs généraux dont l'utilité est nécessairement, pour un temps, différée, bien plus que « l'envie de résoudre un problème ». On se situe donc à un autre niveau, *les leviers à trouver ne vont plus relever nécessairement d'un processus d'accomodation à un milieu ; les enjeux culturels et réflexifs (méta) vont y être plus importants* (Rogalski 1995).

Enfin, une transposition dans les classes de ce processus de formalisation par unification impose des contraintes extrêmement fortes de temps et d'organisation des contenus (pour unifier, il faut avoir vu suffisamment de domaines différents à unifier), ainsi qu'une mise en valeur des enjeux par une *ébauche de réflexion épistémologique* sur les avantages de l'unification formelle, en particulier par utilisation de changements de cadres et de points de vue. Il faut articuler la formalisation unificatrice et son réinvestissement dans les domaines particuliers sur lesquels elle s'est bâtie, avec gains manifestes. Sinon, bien sûr, le danger d'incompréhension totale par les étudiants du jeu auquel on joue est très grand.

De ce point de vue, enseignants et étudiants ne se situent pas sur le même plan : les premiers ont la possibilité de se référer à ces nombreux cas particuliers pour soutenir le sens, les seconds n'ont pas cette possibilité. C'est par exemple ce que dit F. Patras dans à propos de la géométrie des quadriques unifiée et généralisée dans diverses théories :

> Il n'est pas étonnant que les étudiants qui abordent l'étude des quadriques par l'intermédiaire de ces théories sophistiquées aient l'impression d'être confrontés à un corpus de formules et définitions dont l'esprit leur échappe. Elles font figure de thèmes imposés arbitrairement, au nom d'une cohésion architectonique qui les dépasse. (Patras 2001)

On sait bien depuis (Robert et Robinet 1989) qu'il en est de même pour l'algèbre linéaire (nous y reviendrons plus loin).

Dès lors, la question de la nécessité d'utiliser le « méta » dans l'enseignement de concepts FUGS semble incontournable. Il s'agit d'éclairer des enjeux non habituels, de changer les contrats, de faire comprendre le(les) *pourquoi* de concepts assez abstaits. Faute de bons problèmes d'introduction pouvant tenir lieu de situations fondamentales, on peut organiser des *problématiques* (les problèmes viennent avant les concepts abstraits qui les résolvent), que les étudiants ne pourront sans doute pas aborder par eux-mêmes, mais qui, moyennant un discours méta de l'enseignant et l'organisation d'activités métas pour les étudiants, peuvent *faire comprendre où on va, quels problèmes on a en vue, de quelles généralisations on a besoin, de quels changements de points de vue, quels nouveaux outils apparaissent ainsi, quels nouveaux problèmes plus difficiles on peut ainsi aborder*. Pour cet aspect, les convergences avec les interrogations de la contribution de T. Hausberger au présent groupe de travail sont patentes.

Pour plus de précisions, je renvoie au livre cité sur l'algèbre linéaire (Dorier 1997), où l'exemple de l'ingénierie de Lille, reposant sur ces idées, est traité en détail. Voir aussi Rogalski (1995) et Rogalski (2011). Pour les problèmes posés par l'enseignement « frontal » du formalisme en topologie, on peut consulter (Bridoux 2011).

IV. LA FORMALISATION PAR SIMPLIFICATION LOCALE : ABANDON D'INFORMATIONS, DIALECTIQUE PARTICULIER/GENERAL, « DENOMINATION »

1. Analyse de ce processus

Un troisième processus de formalisation, différent des deux précédents, est celui qu'on trouve dans l'activité mathématique de tous les jours, pour résoudre des « petits » problèmes (voire parfois des gros !), trop touffus, trop complexes pour être résolubles sans simplification. Ce que fait très communément le mathématicien devant un tel problème est d'*abandonner* *volontairement de l'information* ; pas n'importe laquelle, celle dont une analyse du problème montre qu'elle est inutile, voire nuisible car cachant une simplicité sous-jacente. Ce faisant, il passe à *un problème plus général*, dont la structure est plus claire, et qui est ainsi plus facile à résoudre. Et pour se donner une idée de la solution, il n'hésite pas alors à reparticulariser le problème, mais sous une forme plus simple que l'énoncé initial. Cette pratique assez répandue pourrait s'appeler *l'axiomatisation locale*. Un mathématicien comme G. Choquet était expert de cette démarche : après avoir réfléchi à un problème qu'on lui posait, il démarrait souvent par : « définissons la notion truc par… ; le problème se réécrit alors … ».

Ce processus de formalisation par simplification-généralisation a très souvent recours à une *dénomination systématique* de divers éléments « concrets » du problèmes, cette dénomination permettant de voir immédiatement qu'on est passé à un problème général, que ces éléments pourraient être remplacés par d'autres du même type sans altérer la *structure* du problème. Cette procédure de dénomination va permettre de raisonner sur des symboles d'un niveau d'abstraction supérieur à ceux des objets qu'on a ainsi symbolisés.

Certaines idées générales dirigent le mathématicien engagé dans cette méthode d'axiomatisation locale pour résoudre un problème :

- un problème n'est jamais isolé, il fait partie d'une classe de problèmes ;
- il y a intérêt à concentrer une trop grande multiplicité de paramètres ;
- il est nécessaire d'alléger les représentations mentales des techniques ;
- il est plus efficace de raisonner ou de calculer sur des symboles que sur des objets « concrets » ; cela renvoie au rôle de l'écrit en mathématiques, et aux bouleversements qu’a apporté aux mathématiques la « révolution symbolique » (Serfati 2006 et 2009).

Cette démarche d'axiomatisation locale peut très bien s'articuler – par une sorte de « modélisation » - avec le processus d'unification cité précédemment, si celui-ci est déjà fait : par exemple, interpréter un problème concret comme étant la recherche des solutions d'une équation T(x) = y, dans des espaces vectoriels adéquats avec une application linéaire T adaptée, c'est utiliser les résultats d'une unification antérieure pour modéliser un problème concret dans une théorie abstraite. Voir une analyse détaillée à ce propos dans Rogalski (2001).

2. *Exemples*

Voici un exemple très simple et en même temps très frappant de ce processus de formalisation par simplification locale, au niveau de la première année d’université. Si on se propose d'étudier la suite récurrente définie par

$$u_1 = 1,\ \ u_{n+1} = [(n + \ln n)/(n + \cos n) + u_n]^{1/2},$$

l'analyse fait deviner que seul le comportement pour n grand du terme $(n + \ln n)/(n + \cos n)$ va compter, en même temps qu'elle fait prendre conscience que la forme compliquée de ce terme est un obstacle à la résolution du problème … qui n'en est plus un dès qu'on imagine que le problème aurait la même structure si on y remplaçait ce terme par une suite quelconque ayant même comportement pour n grand. Tout cela amène à *dénommer* le terme compliqué, à poser $a_n = (n + \ln n)/(n + \cos n)$, et à *étudier un problème plus général*, la suite récurrente $u_0 = 1$, $u_{n+1} = [a_n + u_n]^{1/2}$, avec l'hypothèse que a_n tend vers 1, ou même vers a, quand n tend vers l'infini. L'étude du cas particulier classique $a_n = a$ pour tout n donne l'idée de s'y ramener à partir d'un certain rang N, celui à partir duquel on a $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$, etc. On peut même *généraliser* encore plus le problème en étudiant les suites de la forme $u_{n+1} = f(a_n, u_n)$, en précisant, au fur et à mesure des études de cas particuliers, les propriétés de la fonction f à supposer.

3. Commentaires didactiques

Faire passer auprès des élèves cette méthode de formalisation simplificatrice semble indispensable, d'une part pour les rendre capables de résoudre des problèmes, de l'autre pour qu'ils acquièrent une idée raisonnable de ce que sont vraiment les pratiques en mathématiques. Nous partageons le point de vue de Patras dans lorsqu'il écrit :

> Pour que les mathématiques vivent, il faut qu'elles puissent être facilement communiquées aux novices […]. En d'autre termes, le savoir mathématique est aussi pour beaucoup un savoir faire dont les règles sont celles d'une technique tout autant que d'une connaissance formelle. Les manuels conçus selon les règles de la méthode d'exposition structuraliste laissent souvent un sentiment d'incomplétude : le lecteur a bien compris les ressorts de la méthode, mais serait bien incapable de la faire fonctionner dans l'étude de situations concrètes. (Patras 2001)

Il y a là un enjeu « méta » dans l'enseignement, qui tourne autour de l'enseignement de méthodes et l'utilisation de problèmes suffisamment riches, donc difficiles, pour apprendre quelque chose aux élèves. Des idées générales de résolution existent dans les pratiques expertes des mathématiciens, il est certainement nécessaire d'en faire passer un peu aux élèves si on veut qu'ils soient en mesure d'aborder des problèmes intéressants. La question de l'enseignement de méthodes de résolution a donc un rapport étroit avec ce troisième processus de formalisation. Pour les problèmes soulevés par l'enseignement de méthodes, je renvoie à Robert, Rogalski et Samurcay (1987), au chapitre correspondant de CI2U (1990) et à Schoenfeld (1980).

De même, les démarches générales de changement de cadres, de registres, de points de vue, développées par R. Douady, R. Duval et présentées dans Rogalski (2001) sont au cœur des activités de formalisations locales dans la résolution de problèmes.

Mais les programmes actuels du second degré, et plus encore les commentaires qui les accompagnent, vont à l'encontre de cet objectif : il est interdit de généraliser, de formaliser, de mettre des paramètres ! Quant au supérieur, la position extrêmement fréquente des enseignants est de ne pas dire un mot de ces choses : seuls les bons étudiants finiront par deviner tout seuls qu'il y a en mathématiques des démarches privilégiées extrêmement fructueuses.

Ainsi, il y a une réflexion *a posteriori* à faire sur les difficultés rencontrées et les méthodes de résolution qui ont marché dans les exercices ou problèmes. Comment organiser cette réflexion des élèves, identifier les raisons pour lesquelles ils ne la font pas spontanément, savoir pourquoi les maîtres la mettent rarement en scène, sont de vrais problèmes didactiques.

On trouvera dans Mac Aleese et al. (2009) un essai d'aborder ces problèmes à travers la formation des moniteurs de mathématiques : formation à l'enseignement des mathématiques à l'université pour des étudiants en thèse qui ont 64 heures de travaux dirigés à assurer. On met en évidence avec eux, à travers des réflexions sur divers exercices, l'importance qu'il y a à faire passer auprès des étudiants (et quel discours tenir, quels types d'exercices choisir, pour ce faire – et aussi quelle gestion, mais c'est un autre problème) certaines idées générales sur l'activité de résolution de problèmes, dont certaines s'appuient sur ce thème des formalisations locales : donner des noms ; changer de cadre ; changer de niveau de conceptualisation, reconnaître des structures générales, des analogies, effectuer des transferts ; traduire des propriétés ; dégager des méthodes ; etc.

V. CONCLUSION

La prise en compte dans l'enseignement de moments de formalisation, soit pour résoudre des problèmes présents, par simplification locale ou par élucidation du vague de notions trop communes, soit pour développer une culture d'unification et de simplification qui donne de nouveaux outils de résolution, est nécessaire à une bonne formation mathématique. Un travail didactique à ce propos ne peut éviter de se pencher sur les pratiques expertes des mathématiciens et étudier de possibles transpositions.

De plus, cette question de la formalisation ne peut manquer d'avoir des retombées du côté de la preuve et de la rigueur. On peut motiver la précision nouvelle à donner à une notion qui semblait aller de soi par une interrogation sur l'exactitude d'une preuve dont elle paraît être un maillon faible. Inversement, la formalisation d'un calcul, d'un raisonnement, est aussi un moyen de contrôle en résolution de problème, par l'analyse de leurs formes : on peut voir qu'on a démontré trop - la même preuve, sur des objets différents, donnerait un résultat qu'on sait être faux. Comme il est constaté dans Durand-Guerrier et Arsac (2003), c’est souvent par leurs connaissances mathématiques que les mathématiciens contrôlent leurs preuves ; ce moyen de contrôle, à travers un certain type de formalisation, pourrait être, au moins dans certains cas, aussi dévolué aux étudiants.

REFERENCES

Arsac G. (1987) L’origine de la démonstration : essai d’épistémologie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 8(3), 267-312.

Bridoux S. (2011) *Enseignement des premières notions de topologie à l’université – Une étude de cas*. Thèse doctorat. Université Paris – Diderot.

CI2U (1990) *Enseigner autrement les mathématiques en Deug A première année*. Brochure de la Commission Inter-IREM Université, IREM de Lyon et de Paris 7.

Dorier J.-L. (Ed.) (1997) *L’enseignement de l’algèbre linéaire en question*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Durand-Guerre V., Arsac G. (2003) Méthodes de raisonnement et leurs modèles logiques. Spécificité de l’analyse. Quelles implications didactiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 23(3), 295-342.

Lakatos I. (1976) *Preuves et réfutations*. Paris : Hermann.

Lebesgue H. (1915) *La mesure des grandeurs*. (Nouvelle édition 1975). Paris : Albert Blanchard.

Legrand M. (1990) Un changement de point de vue sur l'enseignement de l'intégrale. In Commission Inter-IREM université CI2U (Ed.) (pp. 205-220) *Enseigner autrement les mathématiques en Deug A première année.* IREM de Lyon et de Paris 7.

Lehmann D. (1989) *Communication au GREM*. Note multigraphiée.

Mac Aleese J., Pian J., Robert A., Rogalski M., Viennot L.(2009) *Propositions pour une formation des moniteurs en mathématiques. Indications sur la formation des moniteurs de physique*. Document pour la formation des enseignants, Paris : Irem de l’Université Paris-Diderot

Ouvrier-Buffet C. (2003) *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques*. Thèse de doctorat. Laboratoire Leibniz, Grenoble. http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00005515/en/

Ouvrier-Buffet C. (2006) Exploring mathematical definition construction processes. *Educational Studies in Mathematics* 63(3), 259-282.

Patras F. (2001) *La pensée mathématique contemporaine*. Paris : PUF

Polya G. (1965) *Comment poser et résoudre un problème* (2e édition 1965) Nouveau tirage 2007.

Robert A., Robinet J. (1989) Quelques résultats sur l'apprentissage de l'algèbre linéaire en première année de Deug. *Cahiers de didactique des mathématiques* 53. IREM de Paris 7.

Robert A., Rogalski J., Samurcay R. (1987) Enseigner des méthodes. *Cahiers de didactique des mathématiques 38*. IREM de Paris 7.

Rogalski M. (1995) Que faire quand on veut enseigner un type de connaissances tel que la dialectique outil-objet ne semble pas marcher, et qu'il n'y ait apparemment pas de situation fondamentale ? L'exemple de l'algèbre linéaire. *Séminaire Didatech* 169, 127-162. Grenoble : Université Joseph Fourier.

Rogalski M. (1997) Les processus de formalisation en mathématiques, problèmes didactiques. *La Lettre de la Preuve*. www.lettredelapreuve.it

Rogalski M. et al. (2001) *Carrefours entre analyse algèbre géométrie*. Paris : Ellipses.

Rogalski M. (2001) Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres de Régine Douady. *Actes de la journée en hommage à Régine Douady* (juin 2001), Publication de l'IREM de Paris 7.

Rogalski M. (2011) *Une expérience d'enseignement de l'algèbre linéaire s'appuyant sur les analyses épistémologiques et didactiques des difficultés de cet enseignement*. Séminaire de formation de l'Université Fédérale de Sergipe, Brazil.

Schoenfeld A. H. (1980) Teaching Problem-Solving Skills. *American Mathematical Monthly* 87(10), 794-805.

Serfati M. (2006) La constitution de l'écriture symbolique mathématique. Symbolique et invention. *Gazette des Mathématiciens* 108, 101-118.

Serfati M. (2009) La constitution de la pensée symbolique mathématique. Une étude épistémologique. *Actes du Colloque Espace Mathématique Francophone* 2009.

Verley J.-L. (1986) La controverse des logarithmes des nombres négatifs et imaginaires. *Fragments d'histoire des mathématiques, tome 1*. Paris : Publication de l'APMEP 041.