L'ACTIVITE DE DEFINITION : VERS UN MODE DE PENSEE SPECIFIQUE ?

Cécile OUVRIER-BUFFET*

Résumé – L'activité de définition commence à être considérée en tant que telle dans les travaux internationaux. Elle permet d'accéder aux concepts et de développer un mode de pensée spécifique, et ainsi de « penser » les concepts mathématiques. Cet article s'attachera à définir « l'activité de définition » et conduira une étude épistémologique critique de celle-ci, plaçant les définitions au centre d'une activité mathématique de construction de connaissances et de preuve. Cette critique s'appuiera sur les travaux existants sur le sujet et se penchera plus particulièrement sur les types de situations impliquant une activité de définition. De nouvelles perspectives de recherche en découleront.

Mots-clefs : activité de définition, construction de concept, définition-en-acte, zéro-définition, proof-generated definition, *concept image*, *concept definition*, cadres théoriques

Abstract – The defining activity is studied as such in recent international works in mathematics education. It gives an opportunity to deal specifically with concepts and generates a specific way of thinking. This article will define "the defining activity" and will present a critical epistemological study of it. The activity involving definitions will be considered as a part of the mathematical activity of construction of knowledge. The proposed critic will deal with existing works on the topic and will explore the kinds of situations implying a defining activity. New research perspectives will emerge from it.

Keywords: defining activity, concept construction, in-action definition, zero-definition, proof-generated definition, concept image, concept definition, theoretical backgrounds

L'expression « pensées mathématiques » évoque inévitablement le raisonnement en mathématiques. Elle questionne également les associations que l'on peut faire entre un champ des mathématiques et un (ou plusieurs) mode(s) de pensée spécifique(s), voire même entre un mode de pensée et plusieurs champs des mathématiques. Ce sont là les relations entre les concepts qui sont interrogées, tout autant que les concepts eux-mêmes, mais aussi les représentations, le traitement de celles-ci, les modélisations, les formalisations, etc. Le terme anglais *thinking*[1], tel qu'il est utilisé dans la littérature anglo-saxonne (notamment pour le *advanced mathematical thinking*), reste large dans son acception, tout comme l'est le terme « pensée ». Pourtant, il semble que les deux axent davantage sur un type de raisonnement prédéfini déjà avancé que sur un processus en cours d'élaboration. On utilisera donc dans cet article de préférence le terme « activité », à l'image de Rasmussen et al. (2005), afin de centrer le propos et d'insister sur un processus en construction, que ce soit en mathématiques ou dans des analyses didactiques.

Une distance existe sur la question des définitions lorsque celles-ci représentent l'un des produits d'un processus de construction de concepts ou lorsqu'elles viennent au commencement d'un exposé axiomatique. D'un côté se trouvent des définitions en construction marquant différents stades de la génération de concepts, de l'autre des définitions formelles finalisées inscrites au sein d'une présentation théorique. Si la place de la construction de définitions n'est pas toujours clairement située dans la génération de nouvelles connaissances (formalisation et construction axiomatique mises à part), son lien avec la preuve est souvent réducteur. En effet, la présentation lexicale et logicienne des définitions est fréquente et ne permet pas de construire des définitions (une telle présentation s'attache à proposer une dénomination appropriée – aspect lexical – et/ou une représentation

* IUFM de Créteil, UPEC – LDAR, Paris 7 – France – cecile.ouvrier-buffet@u-pec.fr

[1] Les termes en anglais seront généralement conservés et toujours écrits en italiques.

particulière qui sera un outil dans une démonstration ultérieure pour régler une inférence – aspect logicien). Cette vision se situe classiquement au sein d'une théorie mathématique déjà existante, formalisée, consistante, s'appuyant sur la structure dérivative d'une démonstration, et utilisant des définitions dites précises et techniques. La distance, entre ces définitions formelles, qui résultent de choix théoriques, et la problématique qui leur a donné naissance, est réelle. Ainsi, si l'on n'a pas accès à la génération des définitions, la compréhension des concepts que ces définitions sont sensées permettre pourrait paraître en partie compromise, de même que les liens qui peuvent exister entre définitions et preuve. Nous allons donc nous pencher plus spécifiquement sur « l'activité de définition » et explorer les possibles quant à la conception et l'analyse de situations impliquant une telle activité.

Dans cet article, l'expression « activité de définition » comprendra tout processus impliquant la construction de définitions, de l'amorce de la résolution d'un problème à la construction formelle de théories. Cela recouvre, dans la littérature internationale, les expressions suivantes : *defining, defining processes, definitional procedure, defining activity*[2]. Il s'agit donc, pour définir plus précisément l'activité de définition, d'identifier les situations conduisant à ce « mode de pensée »[3] et les processus en jeu. Les paragraphes suivants en souligneront la complexité.

Actuellement, l'activité de définition prend une place grandissante dans les travaux internationaux : déjà soulignée (plutôt du côté formel) par Mariotti et Fischbein en 1997[4], elle apparaît aujourd'hui comme un moyen d'appréhender les concepts mathématiques, dans une nouvelle perspective d'enseignement. Des cadres théoriques spécifiques pour l'étude de l'activité de définition commencent à émerger. L'enjeu de cet article est de proposer une étude épistémologique critique plaçant les définitions au centre d'une activité mathématique de construction de connaissances et de preuve. Il s'agit ainsi d'envisager l'activité de définition comme un mode de pensée mathématique permettant de travailler la génération de concepts, de considérer une définition comme productive, permettant d'ouvrir de nouveaux problèmes, de nouvelles façons de penser. L'aspect formel et axiomatique de l'activité de définition sera mis de côté afin de centrer le propos sur l'activité heuristique de définition. De plus, un état des lieux des travaux didactiques existants sur la question sera conduit afin d'ouvrir de nouvelles perspectives de recherche.

I. SITUER L'ACTIVITE DE DEFINITION DANS L'ACTIVITE MATHEMATIQUE

1. Du côté de l'activité du chercheur en mathématiques

Certains chercheurs en didactique se sont penchés sur la caractérisation d'heuristiques et de comportement de mathématiciens (e.g. Burton 2004; Carlson et Bloom 2005; Schoenfeld 1985). Peu d'éléments cependant concernent l'importance de l'activité de définition, sauf quand celle-ci s'inscrit dans un lien direct avec la preuve. Il est généralement admis qu'une preuve peut soulever la nécessité d'une « meilleure » définition, l'une des fonctions de la preuve étant ici l'exploration du sens d'une définition (en l'impliquant dans la rédaction d'une preuve) et/ou l'étude des implications d'une assertion (Hanna 2000). C'est effectivement une voie à explorer dans l'enseignement pour appréhender la compréhension que les étudiants ont

---

[2] Ces expressions, très semblables, pourraient être imparfaitement traduites par : définir, processus définissants, procédure définissante, activité de définition. Il en ressort une préoccupation certaine autour de « l'activité de définition ».

[3] « Mode de pensée » est ici à comprendre ainsi, en référence à l'action de « penser » : une façon de « penser », « penser » signifiant « concevoir, juger, raisonner » (dictionnaire de l'Académie Française, en ligne).

[4] "(...) learning to define is a basic problem of mathematical education." (Mariotti et Fischbein 1997, p. 219).

des définitions qui leur sont enseignées, tout comme le sont les situations permettant un enrichissement des *concepts images* des étudiants (Tall 1991 ; Vinner 1991) (cf. §II-2). Mais cela ne prend pas en compte ce qui se trouve en amont, c'est-à-dire l'activité même de recherche mathématique où co-emergent définitions et preuves, à l'image du processus continuel de révision conceptuelle de Lakatos (1961, 1976). Des pistes de recherche sur l'activité de définition se présentent ici : approfondir le processus lakatosien de définition et produire des outils théoriques permettant de mettre en œuvre et d'analyser des situations impliquant l'activité de définition, et conduire des entretiens et expérimentations avec des chercheurs en mathématiques appartenant à différents champs des mathématiques : on peut en effet faire l'hypothèse d'une dépendance de l'activité mathématique aux concepts mathématiques. La question sous-jacente est de déterminer s'il existe une façon de « penser » (concevoir, juger) les définitions, transversale aux mathématiques[5]. Les entretiens avec les chercheurs explorent en particulier certains des éléments dégagés par Peirce (1995) tels l'expression diagrammatique (centrée sur les relations et non sur les mots), l'observation, l'expérimentation, l'habituation[6], mais pas seulement. Il s'agit d'approfondir et de situer l'activité de définition dans l'activité mathématique et les liens qu'elle entretient avec la preuve (en caractérisant les types de situations propices à ce mode de raisonnement et les invariants de cette activité) et, d'une certaine façon, de mettre à l'épreuve le modèle épistémologique de Lakatos.

2. *Lakatos : un modèle épistémologique de l'activité de définition - Portée et limites*

Lakatos cherche à présenter des schémas du raisonnement mathématique en s'appuyant sur différentes conceptions épistémologiques et philosophiques traduites par les protagonistes de *Preuves et Réfutations*. Directement inspiré par Pólya et Popper, Lakatos s'appuie sur le contexte de la découverte (construction de conjectures) et de la justification (mise à l'épreuve de conjectures). Il reprend en effet une idée de Pólya (le *guessing and testing*) comme un exemple de raisonnement de type inductif en mathématiques où une conjecture naïve (antérieure à toute preuve en fait) est atteinte par la méthode de Popper des conjectures et réfutations[7]. Un processus de preuve par analyse-synthèse permet de faire disparaître la conjecture naïve au profit de *proof-generated theorems* de plus en plus complexes, de lemmes cachés etc. Une place prépondérante est donnée aux définitions, qu'elles soient *naïves*, *zéro* ou générées dans la preuve (les fameuses *proof-generated definitions*[8]), la construction de définitions apparaissant clairement comme un processus de formation de concepts[9]. Tous les concepts mathématiques ne peuvent se prêter à ce processus de preuves et réfutations (cf. la conférence de Conway citée par De Villiers (2000)), mais Lakatos l'annonce clairement dans sa thèse (1961) : il ne prétend pas faire « le » modèle de la construction de la connaissance mathématique. Revenons sur les caractéristiques de la situation et des processus de *Preuves et Réfutations* afin de déterminer la portée et les limites de ce modèle.

---

[5] Cette seconde piste est en cours de réalisation, les résultats ne sont pas encore connus lors de l'écriture de cet article mais le seront pour le colloque.

[6] « Il y a trois sortes d'exercices qui semblent particulièrement appropriés à renforcer les facultés de l'habituation. Exercices de division et de classification, exercices de définition et d'analyse logique des idées, exercices de résumés de théories, des grandes lignes d'un raisonnement. » (Peirce 1995, p. 254)

[7] Soulignons ici que Popper cherchait à traduire le progrès scientifique en développant une méthodologie, en sciences. La méthodologie des conjectures et réfutations proposée par Popper en sciences et le fait que Popper suggère de placer la découverte mathématique dans une configuration expérimentale ont inspiré Lakatos.

[8] Traduites par « définitions éprouvettes » dans la version française de *Preuves et réfutations* de Lakatos.

[9] "A definitional procedure is a procedure of concept formation." (Lakatos 1961, p. 54).

Des outils permettant de baliser une activité de définition : les trois types de définitions proposés par Lakatos (définitions naïves, zéro-définitions, *proof-generated definitions*)[10] ont pour fonctions respectives de nommer, communiquer un résultat, prouver. Une définition naïve peut être établie au début d'une recherche mais ne peut évoluer, contrairement à une zéro-définition qui marque réellement le début de l'activité de définition et du processus de recherche à proprement parler. Une zéro-définition peut être modifiée pour protéger la conjecture d'un « monstre » ou parce que le concept est modifié par la présentation d'une preuve. La construction d'un système de concepts est alors engagée, et le stade de *proof-generated definition* ne sera atteint que grâce à l'idée de la preuve. Il demeure cependant que le stade des zéro-définitions est déjà très avancé puisqu'il prend déjà en compte la preuve en jeu : il apparaît en effet comme un outil théorique permettant de conduire des analyses mathématiques et didactiques (voir §II.5). L'idée séduisante des *proof-generated definitions* réside dans le fait qu'elles tentent de relier la construction de concepts et la validation de définitions à la preuve : ce point reste à explorer plus en profondeur, car la situation proposée par Lakatos ne permet pas d'aller vers la généralisation du processus permettant de passer des zéro-définitions aux *proof-generated definitions*. De même se pose la question de l'existence d'autres processus caractérisant l'activité de définition et de preuve.

Une situation initiale très restrictive : la situation initiale[11] est en fait une situation de classification (délimitation du concept de polyèdre), comprenant une conjecture initiale (avec la formule d'Euler), une première représentation des objets mathématiques en jeu (les polyèdres sont en effet déjà connus des élèves, au moins dans une appréhension perceptive avec des définitions de travail), une nouvelle preuve (celle de Cauchy, dans le cadre de la topologie algébrique). C'est cette nouvelle preuve qui va « valider » la *zéro-définition* et lui conférer le statut de *proof-generated definition*. En fait, avant la preuve de Cauchy, la situation pourrait être considérée comme relativement pauvre. Et avec la preuve de Cauchy, il faudrait parvenir à se détacher du seul niveau de la preuve pour aller plus précisément sur la construction de concepts qui serait à requestionner en dehors de la preuve de Cauchy justement. Ces caractéristiques de la situation initiale étant fortes, se pose la question suivante : est-il possible de concevoir des situations impliquant une activité de définition et de preuve moins restrictives que celle de Lakatos ?

Un moment de l'activité mathématique (jusqu'à la formalisation mais sans prise en compte de l'axiomatisation) : Lakatos laisse de côté la première rencontre avec les objets car il s'appuie sur des objets géométriques qui ont déjà une préexistence, des prédéfinitions, et une préaxiomatique, indépendamment de la situation posée dans *Preuves et Réfutations*. Il ne prend pas non plus en charge l'aspect « construction de théorie » (bien qu'une axiomatique locale existe, mais elle provient de la géométrie importée). En fait, Lakatos ne considère pas le fait qu'une axiomatisation a aussi pour intérêt de connecter différents champs de mathématiques a priori éloignés, et que c'est elle qui aidera à dépasser le cloisonnement des différentes branches des mathématiques (cf. Corfield, 1997). En effet, on ne peut parfois faire l'économie d'une axiomatisation pour énoncer certaines conjectures. Lakatos est lui davantage du côté de la formalisation, car même s'il reconnaît que ce n'est pas une fin en soi,

[10] Reprenons l'exemple de Lakatos pour illustrer ces différents types de définition. Il propose une définition naïve (qui n'évoluera pas mais sera remplacée) de polyèdre : un solide avec des faces planes, des arêtes rectilignes. Un exemple de zéro-définition (il en existe plusieurs dans le travail de Lakatos) dans ce même contexte de construction de classe d'objets vérifiant la formule d'Euler : solide dont la surface est constituée de faces polygonales. Mais le cube creux est un contre-exemple. Donner un exemple de *proof-generated definition* est plus délicat car il faudrait expliciter une preuve et la dialectique entre cette preuve et la définition en construction. Le travail décrit dans Ouvrier-Buffet (2006) permet d'avoir une autre illustration du rôle des zéro-définitions.

[11] Lakatos repris une situation historique déjà proposée par Pólya.

il affirme que ce processus est à questionner, notamment en interrogeant ce qu'il ne contient pas.

Une représentation partielle de la construction de concepts - des contre-exemples prédominants : Lakatos pourrait donner l'illusion que la construction de concepts se fait uniquement par modification de la conjecture initiale via des contre-exemples. Il ne faudrait pas croire non plus que seuls les contre-exemples permettent l'examen critique d'une preuve. Pour la situation choisie, il faut tenir compte des éléments donnés au départ et de la gestion du maître, loin d'être neutre. Par ailleurs, Lakatos n'utilise qu'un seul type de preuve[12], ce qui montre son attachement à la structure logique et créé un décalage avec sa volonté de montrer des mathématiques informelles.

Une gestion de la situation par le maître non neutre et fondamentale : une modélisation épistémologique avec certaines conceptions (telles celle d'Aristote et Popper) permet de cerner en partie la gestion de la situation, afin de faire ressortir ce qui relève spécifiquement de l'apport de Lakatos (cf. Ouvrier-Buffet 2006). Cette gestion a été pensée par Lakatos pour représenter différents courants mathématiques et philosophiques : la transposition à la classe requiert un travail spécifique du côté de l'identification des leviers que le maître peut utiliser pour catalyser le travail sur la définition (ces éléments ont été décrits dans Ouvrier-Buffet, 2004). On retrouve l'importance des discussions dans la classe dans l'expérimentation de Mariotti-Fischbein (1997) où l'activité de définition ne se fait pas sans discussion collective.

Une réécriture de l'histoire inévitablement artificielle : il a fallu un siècle (1750-1850)[13] pour qu'hypothèses, définitions et preuve de la relation d'Euler soient correctement formulées. Ce contexte historique est certes très favorable au travail de conjectures, preuves et réfutations et à l'instrumentation des contre-exemples, mais ce qui n'est pas toujours le cas (a priori) en mathématiques.

II. DU COTE DE LA RECHERCHE EN DIDACTIQUE : DES SITUATIONS IMPLIQUANT UNE ACTIVITE DE DEFINITION

Nous allons retenir ici les travaux en didactique des mathématiques conduits sur l'activité de définition et questionner les types de situations propices à l'activité de définition, les objets mathématiques retenus, ainsi que les cadres théoriques utilisés pour analyser la construction de concepts.

1. *Freudenthal : redéfinir pour systématiser ou générer des connaissances (connaissances déjà partiellement connues ou données)*

Certains chercheurs ont souligné la nécessité d'impliquer les élèves dans un processus de recherche proche de celui du mathématicien, et ce, souvent dans le vaste cadre du *problem-solving*. Freudenthal (1973) en particulier s'est penché sur les définitions en géométrie et sur leur aspect arbitraire qu'il souhaite contourner en rendant les élèves acteurs de la classification des quadrilatères notamment. Il distingue deux types d'activité de définition :

- le *descriptive (a posteriori) defining* qui consiste en une systématisation d'une connaissance existante, que l'on pourrait qualifier de caractérisation, mettant en

[12] $\forall$ x (A(x) $\rightarrow$ B(x))

[13] Pour une mise en perspective de cette histoire, le lecteur pourra se référer à l'ouvrage de Pont J.-C. (1974) *La topologie algébrique des origines à Poincaré*. PUF.

évidence les invariants d'une classe d'objets ou d'actions déjà connus (ce n'est donc pas une « première rencontre ») ; les définitions produites dans ce cadre ont pour vocation d'être des conditions nécessaires et suffisantes (il s'agit d'aboutir à des définitions minimales, nous sommes donc du côté « logicien » de l'activité de définition, sans pour autant entrer dans la formalisation ou dans une axiomatique) ;

- et le *constructive (a priori) defining* qui s'intéresse à la génération d'une nouvelle connaissance. Repris par De Villiers (1998)[14], le *constructive defining* est effectif quand une définition connue et/ou donnée est modifiée[15]. Il peut s'agir, par exemple, d'inclure ou d'exclure une propriété, tout dépendra de la situation et du concept proposés.

En réalité, on pourrait encore élargir le *constructive defining* et l'étudier comme un changement de cadre (par exemple avec la définition de triangles sur la sphère) : les élèves connaissent déjà l'objet mathématique, ils le redéfinissent dans un nouveau système de contraintes. Dans ce genre de processus, générer des exemples et contre-exemples est particulièrement intéressant et moteur dans l'activité de définition.

2. « Concept image » et « concept definition » : une reconstruction de concepts

Vinner a également souligné l'importance de construire des définitions[16]. L'étude des concepts (et des *concepts images*) se fait par rapport à une vision formelle, celle du *concept definition*[17]. On retrouve cet aspect formel de manière forte dans la présentation de trois mondes de pensée (*worlds of thinking*) de Tall (2004)[18].

Au sein du cadre théorique du *concept image* et du *concept definition*, Vinner cherche des situations où le *concept image* des étudiants comporte des lacunes afin de les engager dans un processus de reconstruction du *concept definition*. Ce type de situation est l'un de ceux proposés par Borasi qui décrit trois façons de concevoir des activités de définition (Borasi, 1992, p. 155) :

- une analyse approfondie d'une liste de définitions incorrectes d'un concept donné (ce que l'on pourrait rapprocher du *descriptive defining*) ;
- l'utilisation de définitions dans des problèmes impliquant des preuves (à la Lakatos) ;
- l'étude du devenir d'une définition familière (et donc d'un concept familier) dans un contexte différent (ce que propose également Duchet (1995) avec des carrés sur la sphère, ou Ouvrier-Buffet (2006) avec des droites discrètes). La notion de *concept image* peut ici entrer en jeu.

[14] Dans les deux cas, Freudenthal et De Villiers se penchent sur des concepts issus de la géométrie, soulignant l'importance de l'activité de définition dans la pensée géométrique (*geometric thinking*).
[15] "(...) a given definition of a concept is changed through the exclusion, generalization, specialization, replacement or addition of properties to the definition so that a new concept is constructed in the process. In other words, a new concept is defined 'into being'." (De Villiers 1998, p. 250)
[16] "The ability to construct a formal definition is for us a possible indication of deep understanding." (Vinner 1991, p. 79)
[17] Dans la structure cognitive, Vinner affirme l'existence de deux pôles en interactions mutuelles : le *concept definition* (définition formelle d'un concept) et le *concept image* (non verbal, de type image mentale).
[18] Tall cherche à donner une vision globale de la croissance mathématique. Son cadre laisse peu, voire pas, de place à l'activité heuristique de définition : il ne considère en effet que les définitions formelles dans le monde formel (*formal world)*, et les caractérisations des deux autres mondes (*embodied world* et *proceptual world*) ne sont pas appropriées pour l'appréhension de concepts en construction.

Ce dernier type de situation peut impliquer des activités de définition se plaçant à des niveaux différents quant au point de vue axiomatique. Il s'agira en effet d'une recherche extrinsèque ou intrinsèque :

- une recherche extrinsèque si la géométrie euclidienne est considérée comme un outil d'investigation avec un travail de transposition de définitions existantes (on cherche à conserver une axiomatique existante avec des objets connus placés dans un autre cadre) ;
- une recherche intrinsèque si l'on construit une « autre » géométrie en cherchant de nouveaux principes applicables au nouveau cadre (on abandonne l'axiomatique connue au profit de la construction d'une nouvelle, locale).

3. Un exemple d'activité de définition « opportune »

Balacheff (1987) a tenté de proposer une situation « à la Lakatos » non pas en concevant une situation initiale telle celle de Lakatos, mais en observant comment la question de la nature des objets en jeu est posée lors d'une réfutation par un contre-exemple. La consigne donnée à des élèves de 13 ans dans le cadre de son expérimentation était la suivante : « Déterminer un moyen pour calculer le nombre de diagonales connaissant le nombre de sommets d'un polygone ». L'activité de définition ne peut émerger que si les élèves posent la question de savoir ce qu'est un polygone, une diagonale, deux concepts qui leur sont familiers. C'est là que « le problème de la définition a ensuite joué un rôle essentiel à la fois dans la résolution du problème et dans leur démarche de validation » (Balacheff 1987, p. 188). Les définitions apparaissent alors comme des bases communes pour la résolution du problème et représentent une forme d'institutionnalisation des connaissances en jeu. De son expérimentation, Balacheff conclut que le fait de fournir une information de référence (définition essentiellement précisant les objets en jeu) « ne modifie pas sensiblement (dans le cadre de [son] expérience) les processus de preuve. » (Balacheff 1987, p. 192). Ainsi, le travail sur la définition est possible, ici il était opportun et s'est inscrit dans une logique locale de réfutations les élèves cherchant à sauver leur conjecture en ne retenant que les objets pour lesquels elle était valide.

4. Les travaux de Larsen, Zandieh, et Rasmussen : de Lakatos à la réinvention

Larsen et Zandieh (2005, 2008) ont centré leurs travaux dans une perspective de preuves et réfutations, plaçant l'activité de conjecture et de preuve au sein de l'activité de définition. Leurs expérimentations impliquent des concepts de géométrie et d'algèbre à l'université. Ils concluent que le rôle de la preuve dans l'activité de définition consiste à :

> 1) tell you what job the definition needs to do
>
> 2) suggest what the definition ought to look like in order to do that job and
>
> 3) to let you determine whether it actually does the job it supposed to do. (Larsen et Zandieh 2005)[19]

Dans leur réflexion, la preuve est présentée simultanément comme une motivation pour l'activité de définition, mais aussi comme un guide et une façon de légitimer la définition. On retrouve ici partiellement la vision classique du rôle des définitions dans la structuration de la preuve, pour régler des inférences logiques. L'apport du travail de Larsen et Zandieh réside dans leur analyse de processus de réinvention avec les outils proposés par Lakatos. Ils montrent en effet la pertinence de ces outils, dans des situations appropriées, c'est-à-dire

[19] « 1) dire quel rôle la définition doit jouer ; 2) suggérer l'aspect que la définition doit avoir afin de pouvoir jouer ce rôle ; et 3) permettre de déterminer si la définition tient effectivement le rôle qu'elle est censée avoir. » (traduit par nos soins).

suivant les critères des situations de Lakatos, y compris dans la gestion par l'enseignant. Cela étant, les concepts en jeu sont déjà connus des étudiants et il s'agit d'une reconstruction de définitions, mais, comme nous l'avons souligné dans le paragraphe I.2., les « élèves » de Lakatos sont en fait dans une situation similaire. Revenons plus précisément sur les caractéristiques des situations proposées par Larsen et Zandieh (2005, 2008) et les concepts retenus.

Il s'agit en fait de situations « à la Lakatos » avec une conjecture de départ et une preuve qui est donnée : tout dépend de cette situation initiale. Le rôle des contre-exemples est central : l'émergence d'un contre-exemple global et l'analyse de la preuve sont là pour avancer dans l'étude de la conjecture et de *proof-generated* concepts. Les concepts retenus par Larsen et Zandieh se prêtent à ce schéma : ils reprennent en effet les notions de convergence uniforme et de séries de fonctions (comme Lakatos) et choisissent également le cadre de la théorie des groupes afin de calquer le modèle de situation de Lakatos. A cet effet, le questionnement consiste à rechercher le plus petit nombre de conditions suffisantes pour qu'un sous-ensemble d'un groupe soit un sous-groupe, les définitions de groupe et de sous-groupe étant données. Si le travail attendu des étudiants réside dans la production de conjectures et de contre-exemples, il n'en demeure pas moins que le rôle de l'enseignant dans la gestion reste majeur (en particulier, il fournira les contre-exemples). La production finale est un théorème[20] (et non pas une définition ou une *proof-generated definition*) issu du travail sur la preuve fournie. En définitive, « the typical outcome of monster-barring activity is a modification or clarification of a definition » (Larsen et Zandieh 2008, p. 208) : pour ces auteurs, l'activité de définition intervient essentiellement au niveau de la relégation des monstres (au sens de Lakatos) dans une dialectique entre contre-exemple et définition. La prise en compte des exceptions impacte sur la conjecture et l'analyse de la preuve également, sans forcément aboutir à des *proof-generated concepts*.

Dans le prolongement des travaux de Larsen et Zandieh (2005, 2008), un cadre théorique a été affiné par Zandieh et Rasmussen (2010) : celui de la DMA (*Defining as a Mathematical Activity*) qui s'appuie sur la RME (*Realistic Mathematics Education*) et les notions de *concept image* / *concept definition*. Ce cadre décrit quatre niveaux de l'activité mathématique[21] autour de la définition, qui traduisent en fait une progression du pragmatique vers le théorique (ou de l'heuristique vers l'axiomatique)[22] et qui renforcent les liens entre *concept image* et *concept definition* :

- créer un *concept definition* à partir d'un *concept image* (il suffit pour cela d'avoir une « bonne » représentation et fréquentation du concept en jeu) ;
- créer un *concept image* à partir d'un *concept definition* (il s'agit en fait d'un changement de cadre d'un concept connu : par exemple, définir « triangle » sur la sphère, connaissant déjà les triangles dans le plan) ;
- créer des *concept images* et des *concept definitions* (ce niveau a pour but de détacher les définitions de la situation initiale qui leur a donné naissance ; on pourrait le rapprocher de la formalisation) ;
- utiliser des *concept images* et *concept definitions* déjà établis.

Ce cadre permet de distinguer différents types de situations et de proposer une progression au sein de celles-ci pour accompagner les étudiants dans l'activité de définition. Il serait

[20] "Non empty finite closed subset of a subgroup is a subgroup." (Larsen et Zandieh 2005).
[21] Dans la continuité des travaux de Gravemeijer (1999), d'un niveau « informel » à un niveau « formel ».
[22] Les auteurs qualifient ces activités avec des termes finalement très généraux qui ne caractérisent pas à aux seuls les types de cas retenus (*situational, referential, general, formal*).

intéressant d'évaluer la reproductibilité de cet outil théorique pour analyser d'autres situations impliquant notamment des concepts non familiers des étudiants, car dans ce cas, le problème reste entier (le premier niveau s'appuyant en effet sur des concepts « partiellement connus » des étudiants).

5. *Un modèle épistémologique pour la conception et l'analyse de situations de construction de définitions*

Ouvrier-Buffet (2003, 2006) a proposé un modèle épistémologique prenant en compte plusieurs conceptions complémentaires (celles d'Aristote, Popper, et Lakatos) permettant de décrire une activité de définition suivant des aspects logiques, langagiers, heuristiques, et axiomatiques. Les conceptions sont dégagées des travaux des auteurs cités, mais pas seulement : elles ressortent d'une étude épistémologique plus large et sont décontextualisées des exemples proposés par les auteurs étudiés pour être effectivement opérationnelles. La majeure partie des situations étudiées implique des concepts discrets et des situations de classification. L'activité de définition y est caractérisée notamment par plusieurs opérateurs : une définition peut évoluer pour des raisons liées à l'élaboration d'une théorie (conception poppérienne), pour répondre à des critères logiques (conception artistotélicienne avec l'aspect récurrent de la non-redondance d'une définition) ou encore pendant la génération d'une preuve (conception lakatosienne où la validation d'une définition de travail initiale est effective dans son inscription dans une preuve). Les travaux d'Ouvrier-Buffet ont montré la pertinence des analyses mathématiques de situations impliquant une activité de définition via les notions de zéro-définitions et *proof-generated definitions*. Ils ont également mis en évidence la capacité des étudiants à faire évoluer une zéro-définition et à la considérer comme aboutie lorsque les contre-exemples manquent et lorsque son utilisation dans une preuve est effective. La nécessité d'introduire un autre niveau de définitions dans l'activité de définition, celui des définitions-en-acte[23], est quant à lui illustrée dans Ouvrier-Buffet (2011) dans une situation impliquant des concepts non familiers des étudiants. Une définition-en-acte est définie de la façon suivante : il s'agit d'un énoncé utilisé comme un outil (et non comme objet) permettant aux étudiants d'être opérationnels dans l'avancée d'un problème, sans avoir recours à une définition explicite. Ce niveau de définition vient avant celui des zéro-définitions et pourra même peser contre une zéro-définition. De la même façon que les définitions dépendent des propositions, les définitions-en-acte sont en lien avec des propositions-en-acte.

6. *Des situations impliquant une activité de définition : résumé*

Le tableau ci-dessous a pour but de situer les travaux existants portant sur l'activité de définition. Il ressort clairement une prépondérance des concepts de géométrie, certes très accessibles par leurs représentations, mais aussi de concepts issus de mathématiques discrètes. Ces derniers ont l'avantage de proposer une problématisation naturelle et peu fortement axiomatisée, ainsi qu'un accès aux concepts par leurs représentations, mais aussi une interface avec les mathématiques contemporaines, donc « en construction ». La place accordée aux concepts non familiers est faible (cf. les travaux d'Ouvrier-Buffet). Ce n'est donc pas un hasard si les cadres théoriques mobilisés impliquent largement les heuristiques de Lakatos, et les notions de *concept image* et *concept definition*.

[23] Les définitions-en-acte et propositions-en-acte sont une extension des concepts-en-acte et des théorèmes-en-acte de Vergnaud (1991).

Types de situations impliquant une activité de définition	Concepts mathématiques en jeu	Outils théoriques
Classification, à partir de représentations de concept, d’exemples et de contre-exemples (ou non-exemples)	• Quadrilatères (Freudenthal 1973 ; De Villiers 1998) • Polyèdres (Mariotti et Fischbein 1997) • Convexité (Fletcher 1964 ; Ouvrier-Buffet 2005) • Arbres, droites discrètes (Ouvrier-Buffet 2003 et 2006)	Niveaux de Van Hiele Conceptions (dont celle de Lakatos)
Redéfinir un concept familier : • à partir de représentations de celui-ci • ou à partir d’une liste de définitions incorrectes • redéfinir dans un cadre différent Généraliser un concept (élargir des définitions connues)	• Fonction / triangles (Vinner) • Cercle (Borasi 1992) • Taxicab géométrie (Borasi 1992) / Objets sur la sphère (Duchet 1995 ; Larsen et Zandieh 2005 ; Zandieh et Rasmussen 2010) • Puissance d’un nombre (Borasi, 1992)	*Concept image* et *concept definition* Heuristiques de Lakatos ; DMA
Situation “à la Lakatos“ • avec des concepts familiers • avec des concepts non familiers	• Situation de reinvention en théorie des groupes (Larsen et Zandieh, 2008) • Polygones (Borasi, 1992) • Diagonales et polygones (Balacheff, 1987) • Générateur, minimalité (Duchet, 1994 ; Ouvrier-Buffet, 2011)	Heuristiques de Lakatos

Tableau 1 *– Différents types de situations impliquant une activité de définition*

III. DE NOUVELLES PERSPECTIVES DE RECHERCHE

De l’analyse épistémologique précédente et des critiques des travaux existants, il ressort plusieurs perspectives de recherche, dont certaines sont en cours d’étude.

La validité des cadres théoriques existants (notamment ceux de Ouvrier-Buffet et Larsen ainsi que Zandieh et Rasmussen) et leur efficience sont encore à tester, notamment sur des concepts non familiers des étudiants (ou élèves) (travail en cours, cf. Ouvrier-Buffet 2011). Il s’agit également de prendre en charge la gestion par l’enseignant de situations impliquant l’activité de définition, et, en amont, la dévolution de cette activité aux enseignants peu familiers avec ce type de travail en classe. La complexité de ces questions réside déjà dans le choix de situations et de concepts permettant une activité réelle de définition.

L'une des pistes à explorer encore, en relation avec la précédente, est d'impliquer plus fortement l'activité de définition dans la perspective d'un travail sur la preuve (ce qui générera sans doute de nouveaux outils d'analyse). En effet, les travaux existants partent généralement, pour de telles situations, sur le modèle de Lakatos, c'est-à-dire avec des contraintes fortes comprenant la donnée initiale de concepts, de conjecture et surtout de preuve à analyser. Il reste à ouvrir les situations de Lakatos en particulier du côté de la preuve, cette dernière étant porteuse de la connaissance mathématique, tout autant que le sont les définitions. C'est là que la construction de concepts peut être balisée.

Les questionnaires en cours des mathématiciens (cf. §I.1.) apporteront par ailleurs des éclairages quant au processus même de définition, en particulier ses caractéristiques dans la recherche contemporaine en mathématiques, domaine non encore exploité à ce jour. Peut-on caractériser un mode de penser transversal aux mathématiques concernant l'activité de définition ? Est-il implémentable de manière pertinente dans l'enseignement, et si oui, avec quels objectifs ? La perspective de travail sur la preuve sera également enrichie suite à cette recherche et permettra vraisemblablement d'envisager de nouveaux types de situations impliquant l'activité de définition.

REFERENCES

Balacheff N. (1987) Les définitions comme outils dans la résolution de problème. *XI^{e} Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Montréal.

Borasi R. (1992) *Learning mathematics through inquiry*. New Hampshire: Heinemann.

Burton L. (2004) *Mathematicians as enquirers: Learning about learning mathematics*. Berlin: Springer.

Carlson M. P., Bloom I. (2005) The cyclic nature of problem solving. *Educational Studies in Mathematics* 58(1), 45-75.

Corfield D. (1997) Assaying Lakatos's Philosophy of Mathematics. *Studies in History and Philosophy of Science* Vol. 28, n°1, 99-121.

De Villiers M. (1998) To teach definitions in geometry or to teach to define? In Olivier A., Newstead K. (Eds) (pp. 248-255) *Proceedings of PME 22* vol. 2. Stellenbosch : RSA.

De Villiers M. (2000) A Fibonacci Generalization: a Lakatosian Example. *Mathematics in College* 10-29.

Duchet P. (1994) Communication sur une grille. *Actes MATh.en.JEANS* (pp. 45-50). Paris : MATh.en.JEANS. http://www.mathenjeans.fr.st/edition/actes/actespdf/94045050.pdf

Duchet P. (1995) Paris et New York sont-ils les sommets d'un carré ? *Actes MATh.en.JEANS* (pp. 95-103). Paris : MATh.en.JEANS. http://www.mathenjeans.fr.st/edition/actes/actespdf/95095103.pdf

Fletcher T. J. (1964) *Some lessons in Mathematics*. Cambridge : Cambridge University Press.

Freudenthal H. (1973) *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht : Reidel.

Gravemeijer K. (1999) How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and Learning* 1, 155-177.

Hanna G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics* 44 (1-2), 5-23.

Lakatos I. (1961) *Essays in the Logic of Mathematical Discovery*. Thèse de doctorat. Cambridge : Cambridge University Library.

Lakatos I. (1976) *Proofs and refutations.* Cambridge : Cambridge University Library.

Larsen S., Zandieh M. (2005) Conjecturing and Proving as Part of the Process of Defining. In Lloyd G. M., Wilson M., Wilkins J. L. M., Behm S. L. (Eds.) *Proceedings of the 27th PME-NA*. Colombus, OH: ERIC.

Larsen S., Zandieh M. (2008) Proofs and Refutations in the Undergraduate Mathematics Classroom. *Educational Studies in Mathematics* 67, 205-216.

Mariotti M. A. et Fischbein E. (1997) Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics* 34, 219-248.

Ouvrier-Buffet C. (2003) *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définitions en mathématiques*. Thèse de doctorat. Laboratoire Leibniz, Grenoble. http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00005515/en/

Ouvrier-Buffet C. (2004) Dévolution et gestion de situations de construction de définitions en mathématiques. *Symposium « Travail du professeur et dévolution dans les classes ordinaires ». Congrès de l'AECSE*. Paris.

Ouvrier-Buffet C. (2005) Activités de classification et construction de définitions à l'école élémentaire. *Colloque de la COPIRELEM*. Strasbourg. France.

Ouvrier-Buffet C. (2006) Exploring mathematical definition construction processes. *Educational Studies in Mathematics* 63(3), 259-282.

Ouvrier-Buffet C. (2011) A mathematical experience involving defining processes: in-action definitions and zero-definitions. *Educational Studies in Mathematics* 76(2), 165-182.

Peirce C.S. (1995) *Le raisonnement et la logique des choses, les conférences de Cambridge 1898*. Paris : Cerf.

Rasmussen C., Zandieh M., King K., Teppo A. (2005) Advancing mathematical activity: A view of advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning* 7, 51-73.

Schoenfeld A. H. (1985) *Mathematical problem solving*. San Diego : Academic.

Tall D. O. (Ed.) (1991) *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht : Kluwer.

Tall D. O. (2004) Thinking through three worlds of mathematics. *28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* Vol 4, 281-288. Bergen. Norway.

Vergnaud G. (1991) La théorie des champs conceptuels. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 10/2.3, 133-169.

Vinner S. (1991) The Role of Definitions in Teaching and Learning of Mathematics. In Tall D. O. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht : Kluwer.

Zandieh M., Rasmussen C. (2010) Defining as a mathematical activity: A framework for characterizing progress from informal to more formal ways of reasoning. *Journal of Mathematical Behavior* 29, 57-75.