LES AXIOMATIQUES AUTOUR DU THÉORÈME DE THALÈS DANS LES PROGRAMMES ET LES MANUELS TUNISIENS

Slim MRABET*

Résumé – Dans l'enseignement tunisien, la transition collège-lycée en géométrie est marquée par un changement de point de vue dans la résolution des problèmes : les outils traditionnels de la géométrie rencontrés au collège seront accompagnés par le nouvel outil vectoriel. A partir de l'exemple du théorème de Thalès, nous comptons soulever la question de la continuité-rupture dans le découpage actuel des programmes de l'enseignement tunisien. Un retour à l'histoire de la géométrie et de son enseignement nous a permis de dégager des axiomatiques différentes qui donnent des modèles d'agencement des connaissances, et qui nous servent de référence pour analyser l'enseignement actuel.

Mots-clefs : théorème de Thalès, axiomatique euclidienne, transformation, algèbre linéaire, vecteurs

Abstract – In the Tunisian teaching, the transition college-high school in geometry is marked by a change of point of view in the resolution of the problems: the traditional tools of the geometry met at college will be accompanied by the new vectoriel tool. From the example of Thales theorem, we plan to study the question of the continuity-break in the current division of the programs of the Tunisian teaching. A return in the history of the geometry and its teaching allowed us to have different axiomatic which give models of organization of the knowledge, and which serve us as reference to analyze the current teaching.

Keywords: Thales theorem, Euclidian axiomatic, transformation, linear algebra, vectors

INTRODUCTION

A l'intérieur d'un système scolaire, une question fondamentale se pose aux différents acteurs de ce système : comment découper le texte du savoir à enseigner ? Il s'agit de décider, dans ce découpage, d'une progression particulière parmi d'autres possibles dans l'enchaînement des connaissances. Cette progression est en gros fixée par les programmes, mais pour l'enseignant, il reste toujours des choix à faire.

Dans ce travail, nous nous interrogeons sur la cohérence dans le découpage actuel des programmes de l'enseignement tunisien. Nous nous intéressons particulièrement à la transition collège-lycée en géométrie. Cette période est marquée par un changement de point de vue dans la résolution des problèmes qui consiste en une algébrisation de plus en plus manifeste de la géométrie : les outils traditionnels de la géométrie, rencontrés au collège, seront accompagnés par le nouvel outil vectoriel ce qui suppose un changement dans la « boite à outils » disponible chez les élèves pour résoudre les problèmes. Nous tentons, par conséquent, de contribuer à l'étude de la problématique de l'enseignement de la géométrie dans cette transition en nous centrant sur un concept particulier qui caractérise ce niveau : le théorème de Thalès, ainsi que sur certains concepts qui l'entourent.

I. LES ENONCES DU THEOREME DE THALES

Pour fixer les idées, nous désignons par théorème de Thalès le théorème qui satisfait aux classifications de Brousseau (1995) ou celle de Duperret (1995). Nous nous contentons donc des énoncés plans et rappelons qu'il s'agit de deux approches essentielles : l' « homothétie » et la « projection ». Dans une figure formée de deux sécantes coupées par des parallèles, la deuxième approche se sépare en deux aspects : la « conservation des abscisses » et la

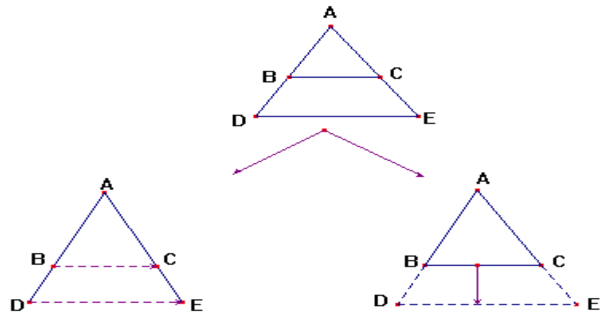
* Institut Supérieur de l'Education de la Formation Continue – Tunisie – mrabet_slim@yahoo.fr

© Mrabet S. (2012) Les axiomatiques autour du théorème de Thalès dans les programmes et les manuels tunisiens. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT3, pp. 480–491). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

« conservation du rapport de projection » suivant que, dans l'écriture de chaque rapport, nous considérons les segments choisis sur la même sécante ou sur les deux sécantes.

- Figure « triangle »

La figure caractéristique de Thalès dans un triangle semble être statique alors qu'elle cache deux dynamiques qui ont pu la faire naître (Duperret 1995) :



Approche "projection" **Approche "homothétie"**

Figure 1 *– Figure « triangle »*

L'approche "homothétie" propose des égalités de rapports relatives à deux triangles semblables : $\frac{\text{AB}}{\text{AD}} = \frac{\text{AC}}{\text{AE}} = \frac{\text{BC}}{\text{DE}}$. En écriture vectorielle, elle est définie par la relation Si $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AD}$ alors $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{DE}$.

Brousseau (1995) distingue deux cas dans l'aspect « projection » suivant que dans chaque rapport, on choisit les longueurs des segments d'une même droite ou celles d'une droite et de leurs images sur l'autre droite (Fig 2 et 3) :

- « La conservation des abscisses sur les sécantes»

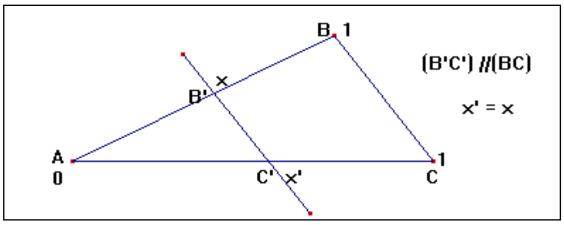


Figure 2 *– Conservation des abscisses sur les sécantes*

Nous avons $\frac{\overline{AB}}{\overline{AB'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AC'}}$; en écriture vectorielle : Si $\overrightarrow{AB'} = k\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{AC'} = k\overrightarrow{AC}$

- « La conservation du rapport de projection »

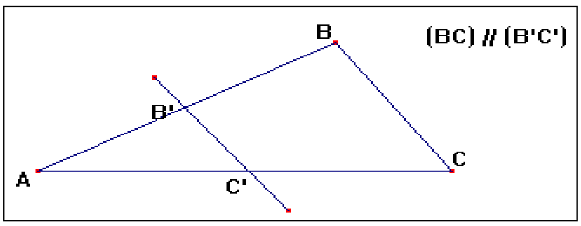


Figure 3*- Conservation du rapport de projection*

Nous avons $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$.

- Figure « parallèles et sécantes » Figure « triangle étendu »

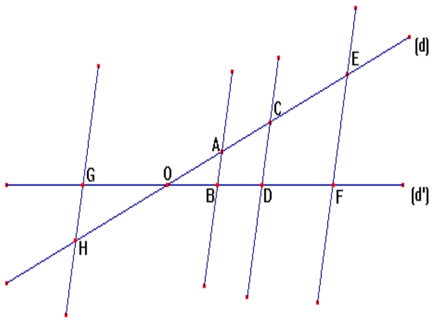


Figure 4 – *Figure "parallèles et sécantes"*

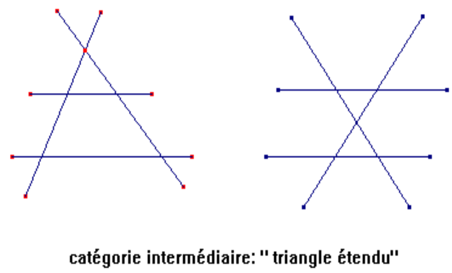


Figure 5 – *Figure "triangle étendu"*

Nous pouvons avoir des écritures de type « conservation des abscisses » ou conservation du rapport de projection.

II. LES AXIOMATIQUES AUTOUR DU THEOREME DE THALES DANS L'HISTOIRE

Dans l'histoire, le théorème de Thalès a évolué dans des niches écologiques différentes, avec des énoncés différents. Une analyse historique[1] nous a permis de dégager deux axiomatiques qui relèvent de deux types de pensée différents autour de cette notion :

1. L'axiomatique euclidienne

Cette axiomatique, adoptée depuis Euclide et jusqu'à Hadamard, est essentiellement caractérisée par la grande place qu'occupe la figure et par la dominance du raisonnement qui l'emporte sur l'aspect calculatoire. Elle est relative à la géométrie classique à laquelle est ajouté un outil qui la modernise et qui permet une nouvelle perception des figures : les transformations. L'efficacité de cet outil provient du fait que les figures qui apparaissent figées chez Euclide, et qui ne peuvent qu'être découpées, superposées ou reconstruites, vont avoir un aspect *dynamique* et sont considérées dans leur mouvement. Dans cette axiomatique nous pouvons distinguer **deux points de vue** différents :

- Le point de vue classique

L'aspect « homothétie » du théorème de Thalès est privilégié par rapport à la « projection ». L'énoncé général se base sur les triangles en montrant l'idée de passage d'un triangle à l'autre et il n'apparaît pas comme une fin en soi : le lien avec les triangles semblables qui le suivent immédiatement et plus généralement avec les figures semblables est un point caractéristique de ce point de vue.

Dans le point de vue classique de l'axiomatique euclidienne, l'idée des figures semblables est une idée intuitive qui permet de décider si deux figures sont de même forme. Chez certains auteurs, trouver une figure semblable à une figure donnée de grandeur quelconque, plus grande ou plus petite est une notion de première évidence, aussi claire que le principe par superposition : John Wallis (1656) et Lazare Carnot (1803) traitent l'idée de figures semblables comme un postulat de la géométrie euclidienne vu sa clarté et son évidence (Abdeljaouad 2001). Dans ce point de vue, la cohésion Thalès-triangles semblables prend appui sur les cas d'égalité des triangles et donc sur le principe d'égalité par superposition qui

[1] Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur à notre thèse : *Le théorème de Thalès dans l'enseignement tunisien : conceptions et pratiques des élèves, pratiques des enseignants*.

est un principe fondateur de la géométrie chez les Grecs. Ce principe qui se base sur un déplacement de figure pour assurer la superposition, fixe des critères d'égalités à partir desquels le mouvement des figures n'est plus utile :

> « Si, dans l'ouvrage d'Euclide, la démonstration du premier cas d'égalité des triangles fait appel explicitement au principe de l'égalité par superposition et par conséquent au mouvement, l'énoncé de ce premier cas d'égalité permet de se débarrasser du mouvement. » (Bkouche 2000)

- Le point de vue des transformations

Dans la deuxième moitié du XIXe siècle, la notion de « mouvement de figures » devient fondamentale et est insérée dans les démonstrations en géométrie marquant ainsi une rupture avec les traditions euclidiennes (Abdeljaouad 2001). Pour ce point de vue, une première remarque consiste en la dissociation de la cohésion Thalès–triangles semblables. Les triangles semblables sont bannis de la niche écologique du théorème de Thalès et l'approche essentielle de ce dernier est basée sur la « projection ».

Nous pouvons dire qu'une différence essentielle entre les deux points de vue réside dans le changement d'appréhension de la figure : dans la géométrie classique, nous regardons les figures comme étant des surfaces et nous les comparons en comparant leurs éléments (angles, côtés), mais ces figures sont statiques. La géométrie des transformations met en avant les droites et les points par rapport aux surfaces et favorise le mouvement et le transfert de propriétés entre des figures. Chasles définit ce point de vue comme permettant de retrouver les propriétés correspondantes à des propriétés caractéristiques d'une figure de départ par application d'une transformation :

> « Qu'on prenne une figure quelconque dans l'espace, et l'une de ses propriétés connues ; qu'on applique à cette figure l'un de ces modes de transformations, et qu'on suive les diverses modifications ou transformation qui éprouve le théorème qui exprime cette propriété, on aura une nouvelle figure et une propriété de cette figure qui correspond à celle de la première. » (Chasles 1889, p. 268)

2. *L'axiomatique de l'algèbre linéaire*

La seconde axiomatique met en avant l'aspect algébrique du théorème de Thalès. La figure perd sa place et on ne peut trouver qu'une forme unique du théorème. Dans cette axiomatique s'inscrit le traité de Dieudonné qui accentue l'algébrisation de la géométrie présente chez Choquet et qui minimise au maximum le recours aux figures.

Le traité de Dieudonné est adressé aux maîtres. L'auteur part de son inquiétude quant à la rupture flagrante qui existe entre les méthodes d'enseignement secondaire et celles du supérieur. Il se propose de renouveler l'enseignement (de son époque) en se référant aux théories récentes. Pour lui, l'enseignement secondaire, loin des résultats des recherches en mathématiques, demeure rattaché essentiellement à la géométrie d'Euclide, à l'algèbre de Viète et de Descartes avec une faible intervention du calcul infinitésimal qui est limité à la classe terminale. Cet enseignement invite les élèves à penser sur un grand nombre de notions ce qui ne leur permet pas de bien développer des techniques de pensée.

La géométrie basée sur l'algèbre linéaire se propose donc de remplacer l'ancien système d'axiomes par un système équivalent, plus simple et mieux adapté à un débutant. Avec un traité sans figures, Dieudonné se propose de planifier les thèmes d'enseignement de géométrie du collège au lycée et se centre sur les deux ou trois années terminales du lycée.

Chez Dieudonné, nous notons en particulier la **disparition du théorème de Thalès** qui est une conséquence immédiate de la distributivité de la multiplication d'un scalaire par rapport à l'addition des vecteurs : $\lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v$.

Les deux axiomatiques ainsi dégagées sont caractérisées par des types de pensée différents, suivant la place et le rôle attribués à la figure et à la rigueur. En didactique, plusieurs travaux ont montré les difficultés des élèves à distinguer entre le raisonnement dans le monde théorique et dans le monde sensible (Berthelot et Salin 1992 ; Houdement et Kuzniak 1999).

III. LE THEOREME DE THALES DANS L'ENSEIGNEMENT TUNISIEN

Nous nous proposons d'analyser l'enseignement actuel du théorème de Thalès en Tunisie, en adoptant cette construction d'axiomatiques comme référence. Nous nous intéressons à deux transitions dans l'enseignement : de la 9ème année de base (dernière année du collège) à la 1ère année secondaire (première année du lycée), puis de la 1ère année à la 2ème année secondaire, et montrons que ces transitions sont accompagnées de changement d'axiomatiques.

1. Le théorème de Thalès dans les programmes

Dans l'analyse des programmes, notre objectif est de dégager l'axiomatique sous-jacente aux choix que font les concepteurs de ces supports. Ainsi, à partir de quelques remarques générales annoncées sur l'enseignement de la géométrie, nous tentons de situer les orientations de ces programmes par rapport aux repères historiques que nous avons fixés.

- Le programme de 9$^{\text{ème}}$ B

Commençons par préciser la place de la leçon sur le théorème de Thalès dans les programmes officiels : dans la partie « géométrie », la leçon sur le théorème de Thalès est précédée des leçons sur la projection et sur le repérage dans le plan, et suivie des leçons sur les applications du théorème de Thalès, sur les parallélogrammes, les triangles et les relations métriques dans un triangle rectangle.

Dans les objectifs de l'enseignement du théorème de Thalès, nous trouvons :

- Utiliser le théorème de Thalès et ses applications pour :
  - écrire des proportions
  - calculer des distances dans une figure donnée
  - diviser un segment de droite en un nombre fixé de parties égales
  - préciser la position d'un point divisant un segment dans une proportion donnée

Dans les « recommandations », il est demandé d'appliquer le théorème de Thalès dans le triangle, dans le trapèze et dans la division d'un segment de droite en des segments proportionnels à des longueurs données.

Remarquons qu'aucune indication sur les types de figures n'est mentionnée, mais à partir des applications concernant la division d'un segment, nous pouvons dire qu'une figure ayant un faisceau de parallèles est visée par les programmes.

Ce programme, peu détaillé, ne donne aucune indication explicite quant aux types d'énoncés à enseigner. Mais nous pouvons conclure à partir des objectifs cités et de l'environnement mathématique dans lequel le théorème de Thalès prend place, la tendance des programmes du collège à adopter l'axiomatique euclidienne autour du théorème de Thalès avec ses deux points de vue. En effet, dire que le théorème de Thalès doit être appliqué dans le triangle laisse supposer que les deux points de vue : « classique » et « des transformations » sont visés et que le premier est une application du second et nous pouvons déduire que la catégorie de figure « parallèles et sécantes » sera utilisée dans l'énoncé principal, et la catégorie « triangle » vient en application.

- Le programme de 1ère année secondaire

En 1ère année secondaire, l'enseignement des mathématiques n'est plus organisé sous forme d'objectifs que l'enseignant tente d'atteindre mais il vise plutôt l'acquisition d'un certain nombre de compétences dont chacune inclut plusieurs thèmes à la fois ; le savoir lié à ces compétences est très peu détaillé.

Pour le thème qui nous intéresse, nous relevons les principaux points suivants relatifs à ce concept :

- Ils [les élèves] trouvent une quatrième proportionnelle.
- Ils partagent un segment en parties isométriques.
- Ils construisent un segment dont la longueur est la quatrième proportionnelle à trois longueurs données.
- Ils déterminent l'effet de la multiplication de chaque dimension d'un solide par un nombre donné sur son aire ou son volume.
- Ils mesurent des angles en utilisant les rapports trigonométriques dans un triangle rectangle, le théorème de Thalès et sa réciproque, le théorème de Pythagore et sa réciproque.

Peu détaillé autour du théorème de Thalès, le programme n'annonce pas clairement la forme de l'énoncé demandé, ni l'axiomatique suivie autour de cet énoncé.

- Le programme de 2ème année secondaire

Avec l'introduction des vecteurs, en 2ème S, un changement d'axiomatiques est fait : les éléments de la géométrie classique disparaissent ainsi que les théorèmes et propriétés qui leur sont liés. La puissance du calcul vectoriel remplace le recours à la figure, qui est un point fondamental de la géométrie d'Euclide.

Le contenu disciplinaire à enseigner relatif aux vecteurs indique d'enseigner :

- Le calcul vectoriel
- Le barycentre de deux ou trois points pondérés.
- les translations, homothéties, rotations d'angles dont une mesure appartient à $[0,\pi]$

Dans ce programme, l'accent est mis sur les propriétés du calcul vectoriel dans lesquelles le théorème de Thalès ne semble pas intervenir, et sur l'axiomatique classique selon le point de vue des transformations, par la recherche de l'image d'une figure par une transformation. Nous lisons (p. 23) :

Les élèves mobilisent une technique ou une procédure dans des activités géométriques pour :

- calculer et simplifier une expression vectorielle en utilisant les règles du calcul vectoriel.

Les élèves mobilisent une procédure lors d'activités géométriques pour :

- reconnaître l'image d'une figure par une translation ou une homothétie ou une rotation dont une mesure appartient à $[0,\pi]$.
- reconnaître les éléments de symétrie d'une figure plane.

Dans ce programme, nous pensons qu'à deux moments, on pourrait faire le lien avec le théorème de Thalès :

- dans la construction du barycentre de deux ou trois points pondérés.
- dans l'introduction de l'homothétie.

Avec l'arrivée des « activités dans un repère », le travail géométrique devient purement analytique. Le calcul vectoriel l'emporte par rapport aux configurations classiques qui deviennent peu citées. La seule mention qui pourrait aider à la transition entre les axiomatiques classique et vectorielle est la suivante :

> « Les élèves modélisent des situations réelles menant aux figures de base du plan et de l'espace. »

Dans la transition 1ère S – 2ème S, les programmes montrent un changement d'axiomatiques : la géométrie ponctuelle classique qui caractérise le travail géométrique tout au long du collège disparaît au profit des transformations et du calcul vectoriel. Le théorème de Thalès ne semble pas avoir un rôle explicite dans cette transition. L'analyse des manuels pourrait éclairer davantage cette idée.

2. *Le théorème de Thalès dans les manuels*

- Le manuel de 9ème année de base

Le premier énoncé du théorème de Thalès est le suivant : (page 137) :

> « Soient deux droites du plan D et D'' et A, B et C trois points distincts de D. Si A', B' et C' sont respectivement les projetés de A, B et C sur D' selon une direction différente de celle de D et de celle de D', alors on a : $\frac{AB}{AC}=\frac{A'B'}{A'C'}$. »

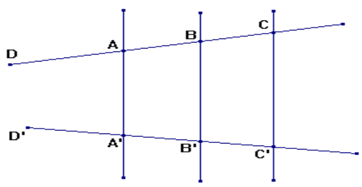


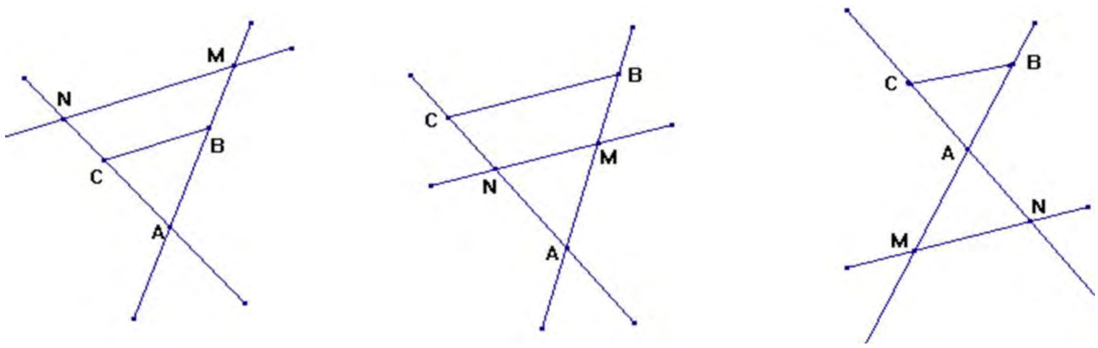
Figure 6 *– Manuel 9eB*

Un deuxième énoncé est proposé (p. 138) :

> « Soient deux droites du plan D et D'' et A, B et C trois points distincts de D. Si A', B' et C' sont respectivement les projetés de A, B et C sur D' selon une direction différente de celle de D et de celle de D', alors on a : $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}$. »

Les hypothèses sont les mêmes, mais la conclusion a changé.

Le théorème de Thalès appliqué au triangle est introduit par la suite à l'aide d'une nouvelle activité. Il est énoncé comme suit (p. 140) :



> « Si ABC est un triangle et M est un point de (AB) et N est un point de (AC) tel que (MN) est parallèle à (BC), alors on a: $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$. »

Dans le manuel de 9ème B, il existe trois énoncés du théorème de Thalès qui relèvent de l'axiomatique euclidienne mais avec deux points de vue différents. Dans la partie « cours » le point de vue des transformations est dominant alors que dans les « exercices » c'est le point de vue euclidien qui est le plus utilisé avec un énoncé de type « homothétie ». Les différents types de figures coexistent mais les énoncés de type « conservation des abscisses » ou « conservation du rapport de projection » n'apparaissent qu'avec des figures de type « parallèles et sécantes » et profitent de la notion de projection sur une droite selon une direction donnée qui apparaît au chapitre 10 intitulé « Repérage dans le plan ». Au triangle n'est associé que l'énoncé de type « homothétie ». Il est clair que dans ce manuel, le couple (énoncé, figure) traduit un point de vue spécifique.

- Le manuel de 1ère S

  - Le théorème de Thalès dans le sens direct

Par rapport au manuel de 9ème B, le manuel de 1ère S de 2003 redonne vie à l'approche « homothétie » dans le sens direct du théorème de Thalès. D'ailleurs, nous pouvons dire que, c'est quasiment la seule approche mobilisée dans les activités, dans la partie relative aux énoncés des théorèmes et dans les exercices de fin de chapitre, soit partiellement par l'utilisation de l'égalité qui coïncide avec la conservation des abscisses, soit par l'utilisation des côtés parallèles.

Dans la rubrique « Retenir » (p. 28) où sont regroupés les différents objets de savoir institutionnalisés, apparaît un seul énoncé du théorème de Thalès intitulé : théorème de Thalès dans un triangle. La figure associée est de catégorie « triangle étendu », alors que le choix des segments est conforme à l'« homothétie ». Dans ce manuel, aux deux catégories de figure « triangle » et « triangle étendu » sont attribués les mêmes énoncés. Dans les activités relatives au sens direct, l'énoncé utilisé est de type « homothétie » dans une catégorie de figure : « triangle ». La mise en avant du passage d'un triangle à l'autre est claire dans certaines activités par l'utilisation de deux couleurs différentes pour les deux « triangles de Thalès ».

Dans les applications du théorème de Thalès relatives a cet énoncé, nous trouvons : la construction d'un point M d'une droite (AB) telle que $AM = KAB$ où $K \in \Re^*$, le partage d'un segment dans une proportion donnée. Par ailleurs, les auteurs du manuel proposent de nouveaux genres de problèmes qui paraissent plus importants puisqu'ils figurent aussi bien dans le cours que dans les exercices de fin de chapitre et qui concernent les problèmes d'agrandissement et de réduction. Ce nouveau champ d'applications constitue une bonne occasion pour mieux montrer l'aspect utilitaire du théorème de Thalès en précisant les relations entre deux objets ayant « la même forme », et permet d'introduire et de travailler la notion d'échelle. Ceci marque un retour implicite aux triangles semblables qui ont été, dans l'histoire, constamment associés au théorème de Thalès et en ont constitué une application immédiate. Le phénomène d'« agrandissement-réduction » permet également d'établir ce que A. et C. Massot (1995) appellent : la propriété des $(k ; k^2)$: "dans un phénomène d' « agrandissement-réduction », quand les longueurs sont multipliées par un réel k, [les périmètres le sont et] les aires le sont par k^2".

L'environnement mathématique ainsi fixé autour du théorème de Thalès confirme que le choix du point de vue classique de l'axiomatique euclidienne est mis en avant dans ce manuel. Les énoncés relatifs à l'approche « projection » interviennent implicitement dans les applications de partage d'un segment dans une proportion donnée sans qu'une référence explicite, au niveau des énoncés, ne leur soit attribuée.

Dans le passage de la 9ème B à la 1ère S, il y a un changement de point de vue à l’intérieur d’une même axiomatique (euclidienne) autour du théorème de Thalès. Dans ce changement, il y a une rupture au niveau des énoncés et des figures de Thalès. La difficulté de transition entre ces deux points de vue est passée sous silence.

- La réciproque du théorème de Thalès

Pour analyser l’énoncé de la réciproque du théorème de Thalès dans le manuel de 1ère S de 2003, nous comptons le comparer à celui du manuel de 1ère S de 2002. Dans ce dernier, la réciproque du théorème de Thalès est proposée avec un seul énoncé qui s’inscrit dans la logique du point de vue des transformations de l’axiomatique euclidienne, et qui se sert des mesures algébriques et d’une figure de catégorie « parallèles et sécantes ».

Dans la figure suivante, l’énoncé stipule que :

« si (AA’) est parallèle à (BB’) et si $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$
alors la droite (CC’) est parallèle à (AA’) et à (BB’). »

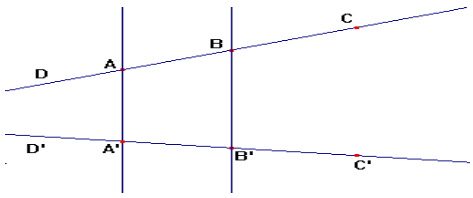


Figure 8 *– Réciproque-manuel 2002*

Dans le manuel de 2003, l’énoncé de la réciproque, marqué par l’absence des mesures algébriques, est proposé suivant trois cas de figure différents. Le voici :

Réciproque du théorème de Thalès dans le manuel de 1ère S de 2003 (p. 28)

« Soient deux droites (AB) et (AC) sécantes en A. Soient M un point de [AB] et N un point de [AC] tous deux distincts de A.

Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

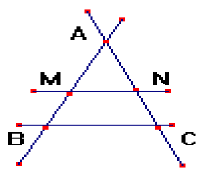


Figure 9 *– Réciproque 1-manuel 2002*

Soient deux droites (AB) et (AC) sécantes en A. Soient M un point de (AB) et N un point de (AC) tous deux distincts de A tels que B appartient à [AM] et C appartient à [AN]

Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles.

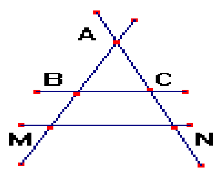


Figure 10 *– Réciproque 2-2002*

Soient deux droites (AB) et (AC) sécantes en A. Soient M un point de (AB) et N un point de (AC) tous deux distincts de A tels que A appartient à [BM] et A appartient à [CN]

Si $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$ alors les droites (BC) et (MN) sont parallèles. »

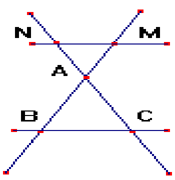


Figure 11 *– Réciproque 3-2002*

En 2003, la réciproque du théorème de Thalès est proposée dans une nouvelle version. A l'instar du sens direct, le sens réciproque marque un retour au point de vue euclidien. Ainsi, l'approche « homothétie » est encore dominante dans le choix des segments, mais la figure associée est de catégorie « triangle étendu ». La suppression des mesures algébriques dans le manuel de 2003 permet de remédier aux difficultés découvertes dans l'ancien manuel et qui consistent en la difficulté chez les élèves d'attribuer trois figures différentes a un même énoncé. Mais cette nouvelle situation a suscité un traitement particulier de la figure. Dans l'ancien manuel, les mesures algébriques ont l'avantage d'éviter l'ordre des points. Avec une formulation de la réciproque à l'aide des distances, dans l'écriture $\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}$, il devient nécessaire de soulever cette condition et de préciser que la position de M par rapport à A et B est la même que celle de N par rapport à A et C. Il est à noter que le graphique n'exclut pas le côté abstractif de l'énoncé qui, à chaque fois, précise la position de M par rapport à A et B et celle de N par rapport à A et C.

- Le manuel de 2ème S (de 2004)

En deuxième année secondaire, nous avons parcouru les chapitres du manuel pour voir les moments éventuels d'utilisation du théorème de Thalès. Nous avons regardé en particulier la façon d'introduire la propriété $\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$ du produit d'un vecteur par un réel, qui, dans certains traités historiques, fait appel au théorème de Thalès. Au chapitre 5 (tome 1), l'activité 13 p. 71 traite cette propriété dans un cas particulier : $\alpha=2$. L'activité demande de construire des points représentant les vecteurs $2\vec{u}$, $2\vec{v}$ et $2(\vec{u}+\vec{v})$ et de déduire directement la relation : $2(\vec{u}+\vec{v})=2\vec{u}+2\vec{v}$. Pour y arriver nous pouvons utiliser par exemple les propriétés de la droite des milieux, mais nous ne pouvons vraiment pas trancher de la pertinence de cet outil selon l'intention des concepteurs du manuel. Dans le même chapitre, nous trouvons une forme vectorielle du théorème de Thalès au chapitre 5 (tome 1). L'activité 42 (p. 80) permet d'introduire le théorème de Thalès dans un triangle sous une nouvelle forme. La figure associée est de type « triangle étendu ».

Voici son énoncé :

Activité 42 – Soient ABC un triangle et M un point de (AB), distinct de A. La parallèle à (BC) passant par M coupe (AC) en N.

On pose $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AB}$

1) Soit P le point tel que $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AC}$

Montrer que (MP) est parallèle à (BC). En déduire que $\overrightarrow{AN}=x\overrightarrow{AC}$

2) On suppose dans cette question que M est le milieu de [AB]. Exprimer $\overrightarrow{AN}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$. »

L'activité suivante (activité 43) est donnée sous le titre : « Théorème de la projection ». Il s'agit d'une situation analogue à celle de l'activité 42, mais dans une figure de catégorie « parallèles et sécantes ».

Activité 43 p. 81

« Dans la figure ci-contre, les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles.

La parallèle à D passant par A coupe (BB') en M et (CC') en N.

On pose $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AC}$. Exprimer AM en fonction de AN puis montrer que $\overrightarrow{A'B'} = x\overrightarrow{A'C'}$ »

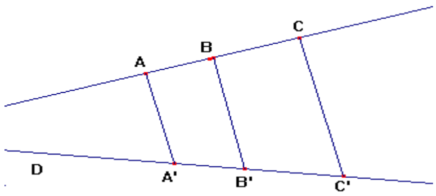


Figure 12 *– Thalès-2^e^S*

L'activité 42 intitulée « Forme vectorielle du théorème de Thalès » est « insérée » dans un chapitre de calcul vectoriel, et demande une reconnaissance d'un élément de la « boîte à outils » de l'élève vu sous une nouvelle forme.

L'énoncé proposé dans cette activité est de type vectoriel et renvoie ainsi à une nouvelle axiomatique : celle de la géométrie analytique. La figure associée est de catégorie « triangle étendu » alors que celle de l'activité 43 est de type « parallèles et sécantes ». Nous pouvons ainsi dire qu'à un même énoncé vectoriel, deux catégories de figures peuvent être associées.

Dans cette activité, il n'est nulle part indiqué comment faire le lien avec l'énoncé de type « homothétie » vu en $1^{ère}$ S. Il est laissé à la charge de l'enseignant d'établir le passage de l'ancienne forme du théorème de Thalès formulée avec des distances à la nouvelle forme formulée avec des vecteurs. Dans le choix des vecteurs, nous pouvons dire que l'approche choisie dans la première question est à la fois de type « homothétie » et « conservation des abscisses », puisque seuls les vecteurs sur les sécantes sont concernés. Les vecteurs sur les côtés parallèles n'apparaissent que dans la deuxième question et dans un cas particulier, celui de la droite des milieux.

L'énoncé de la forme vectorielle du théorème de Thalès figure plus loin dans le chapitre, dans la rubrique « Synthèse » avec des modifications par rapport aux résultats de l'activité : la relation vectorielle concernant les côtés parallèles apparaît dans le cas général et non pas dans le cas de la droite des milieux. Voici l'énoncé qui apparaît p. 87 :

« Soit ABC un triangle et M un point de (AB), distinct de A.

La parallèle à (BC) passant par M coupe (AC) en N.

si $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$ alors $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{MN} = x\overrightarrow{BC}$.»

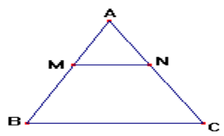


Figure 5 *– Réciproque 2-2^e^S*

L'activité 43 semble généraliser la précédente et étend le résultat établi dans un « triangle étendu » au cas de deux droites sécantes coupées par trois parallèles. L'énoncé est formulé avec des vecteurs dans une catégorie de figure « parallèles et sécantes » et correspond à l'organisation mathématique de la géométrie analytique. La question demande d'exprimer $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{AN}$ puis de montrer que $\overrightarrow{A'B'} = x\overrightarrow{A'C'}$.

Dans le manuel tunisien de $2^{ème}$ S, il y a un changement d'axiomatique : les moyens de résolution de certains types de problèmes changent. Ainsi sont traitées en utilisant les vecteurs les situations qui utilisaient le théorème de Thalès formulé avec des distances. Ce théorème est introduit dans un cadre vectoriel, sans faire le lien avec les énoncés étudiés en $9^{ème}$ B et en $1^{ère}$ S. Dans ce nouveau cadre, cet énoncé n'a pas de vie ultérieure, et en particulier, il ne contribue pas à élaborer les propriétés du calcul vectoriel.

CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons montré que la transition collège – lycée est accompagnée d'un changement d'axiomatiques et d'un changement de points de vue à l'intérieur d'une même axiomatique. Nous avons aussi soulevé la question du lien entre deux moyens de résolution des problèmes et la façon dont ce changement est fait, et avons montré que de la 9ème année de base à la 2ème année secondaire, les manuels scolaires proposent trois énoncés du théorème de Thalès qui reflètent trois points de vue différents : le point de vue des transformations (en 9ème B) et le point de vue euclidien (en 1ère S) et la forme vectorielle (en 2ème S). Le rôle du théorème de Thalès dans la transition des distances, qui dominent au collège, aux vecteurs, qui dominent au lycée, est caché et n'est pas considéré comme un point qui mérite d'être soulevé. Une question s'impose : quel est l'impact de ces changements d'axiomatique sur l'apprentissage des élèves ? Nous pensons que cette piste mérite d'être explorée.

REFERENCES

Abdeljaouad M. (2001) Les triangles semblables…ces mal aimés, *Miftah al Hissab* 96-97, Tunis.

Berthelot R., Salin M.-H. (2001) L'enseignement de la géométrie au début du collège. Comment peut-on concevoir le passage de la géométrie du constat à la géométrie déductive ? *Petit x* 56, 5-34.

Bkouche R. (2000) Quelques remarques autour des cas d'égalité des triangles. *Bulletin de l'APMEP* 430.

Brousseau G. (1995) Promenade avec Thalès, de la Maternelle à l'Université. *Bulletin Inter-IREM, Commission premier cycle - Autour de Thalès*. 87-124.

Chasles M. (1889) *Aperçu historique des méthodes en géométrie*. Paris : Gauthier-Villars.

Dieudonné J. (1964) *Algèbre linéaire et géométrie élémentaire*. Paris : Hermann.

Duperret J.-C. (1995) Pour un Thalès dynamique. *Bulletin Inter-IREM, Commission premier cycle - Autour de Thalès*, 125-144.

Houdement C., Kuzniak A. (1999) Géométrie et paradigmes géométriques. *Petit x* 51, 5-21.

Massot A. (1995) Agrandissement-Réduction : un chemin pour Thalès *Bulletin Inter-IREM, Commission premier cycle - Autour de Thalès*, 169-90.

Mrabet S. (2010) *Le théorème de Thalès dans l'enseignement tunisien : conceptions et pratiques des élèves, pratiques des enseignants*. Thèse de doctorat. Université Virtuelle de Tunis, Université Paris Diderot (Paris 7).

Manuel Tunisien (2004) Mathématiques, 2ème année de l'enseignement secondaire, Tome 1, Centre National Pédagogique.

Manuel Tunisien (2003) Mathématiques, 1ère année de l'enseignement secondaire, Centre National Pédagogique.

Manuel Tunisien (1999) Mathématiques, 9ème année de base. Centre National Pédagogique.

TUNISIE 2003, Programmes Mathématiques 1ère année et 2ème année secondaire, Ministère de l'Education et de la formation. Direction des programmes et des manuels scolaires, Tunis.

TUNISIE 1997, Programmes officiels du second cycle de l'enseignement de base, Complément mathématiques.