LA PLACE DE LA LOGIQUE DANS L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES AU LYCEE EN FRANCE

Zoé MESNIL*

Résumé – Souvent associée au raisonnement, la logique me paraît également liée à l'apprentissage du langage mathématique. Quel rôle peut-elle avoir dans l'enseignement des mathématiques au lycée ? L'étude présentée ici a pour but de proposer des éléments de réponses à cette question à travers l'analyse écologique des programmes et des manuels de différentes époques en France. Un regard sur l'histoire de la logique me permet d'élaborer une référence par rapport à laquelle j'essaie de comprendre les processus de la transposition didactique.

Mots-clefs : logique, langage, raisonnement, transposition, écologie des savoirs

Abstract – Logic, which is often associated with reasoning, also seems to be related to the learning of mathematical language. What role could logic have in the teaching of mathematics in high school ? The present study aims at exploring possible answers to the previous question through an ecological analysis of curricula and textbooks relating to different eras in France. Looking at the history of logic allows me to elaborate a reference to which I relate the process of didactic transposition in an attempt to understand them.

Keywords: logic, language, reasoning, transposition, ecology of knowledge

I. INTRODUCTION

Le nouveau programme pour la classe de seconde (première année du lycée, 14-15 ans) de 2009[1] comporte dans son introduction un chapeau « Raisonnement et langage mathématiques », et un tableau donnant une liste d'objectifs pour le lycée concernant notamment des notions de logique. Les nouveaux manuels utilisent alors un logo pour repérer les exercices censés travailler la logique, et la plupart proposent même des pages qui en précisent le vocabulaire et les notations. Il n'est bien sûr pas question de faire un cours de logique mathématique avec définitions formelles et théorèmes. Ceci est bien rappelé dans le programme qui précise qu'il s'agit de permettre à l'élève d'acquérir « une expérience lui permettant de commencer à distinguer les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant ». Le programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 1960 proposait déjà de « poursuivre une initiation plus complète aux modes élémentaires de la pensée logique et à ses moyens d'expression ». L'acquisition d'une expérience peut être vue comme le développement d'une certaine façon de penser en fonction de cette expérience, et les deux injonctions curriculaires citées présentent ainsi une certaine continuité. Qu'est-ce qui caractérise alors cette pensée logique qu'il s'agit de développer chez les élèves ? Qu'est-ce qui, dans la pratique des mathématiques, relève de la mise en action d'une pensée logique ? Et quel est le rôle de la logique mathématique en tant que discipline mathématique dans cet apprentissage ? Les rédacteurs des programmes et les auteurs de manuels sont forcés de trouver des éléments de réponse à ces questions. Le début de mon travail de thèse en didactique des mathématiques a consisté en une analyse des notions de logique présentes dans des programmes et manuels de Seconde de différentes époques, analyse qui révèle diverses prises de positions sur ces questions.

* Laboratoire de Didactique André Revuz - Université Paris Diderot – France – zoe.mesnil@univ-paris-diderot.fr

[1] Publié au BO du 23 juillet 2009 : http://media.education.gouv.fr/file/30/52/3/programme_mathematiques_seconde_65523.pdf

© MESNIL Z. (2012) La place de la logique dans l'enseignement des mathématiques au lycée en France. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT3, pp. 457–466). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Plusieurs travaux de didactique présentent une étude épistémologique de certains concepts de la logique mathématique (Durand-Guerrier 1996, 2005; Deloustal-Jorrand 2004, pour l'implication, Chellougui 2004, pour les quantificateurs, Ben Kilani 2005, pour la négation). Ces travaux montrent la complexité du processus qui a conduit à en faire des objets de la logique mathématique moderne qui nait avec les travaux de Frege à la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle. Mais quels ont été les fins et les moyens de la logique ? Et finalement, qu'est-ce qu'on appelle aujourd'hui la logique mathématique ? Une analyse épistémologique me permet de constituer une référence par rapport à laquelle situer les choix de l'enseignement. Les outils de l'approche écologique sont ensuite utilisés pour analyser plus finement le processus de transposition et tenter de répondre à ces nouvelles questions : quel rôle programmes et auteurs de manuels attribuent-ils à la logique dans l'apprentissage des mathématiques au lycée ? Quelles sont les contraintes culturelles et institutionnelles qui pèsent sur leurs choix ? L'étude comparée de différents programmes et manuels pour la classe de Seconde depuis 1960, année qui correspond à une première introduction de notions de logique mathématique au lycée, permet de prendre en compte l'histoire de l'enseignement de la logique au lycée comme un élément éclairant ce qui est proposé actuellement.

II. APPROCHE EPISTEMOLOGIQUE

Je commencerai donc par un résumé succinct de l'histoire de la logique en faisant ressortir dans chaque période ce qui illustre différentes conceptions de la logique et de son rôle.

La logique d'Aristote, et parallèlement celle des mégariques puis des stoïciens, est une logique au service du raisonnement. À partir de certains raisonnements de base considérés comme évidents, il s'agit de se donner des méthodes permettant de justifier la validité des autres. Du point de vue du langage, la logique d'Aristote est traditionnellement décrite comme une logique des termes, alors que celle des stoïciens est une logique des propositions. C'est cette conception de la logique comme science du raisonnement qui se poursuit dans la tradition scolastique du Moyen Âge. Elle est aussi plus globalement vue comme l'une des sciences du langage, à côté de la grammaire et de la rhétorique, qui « apprend à parler véridiquement » (Blanché 1970, p 137). Vers la fin de cette période, les *moderni* tentent de dégager la logique de ses préoccupations métaphysiques, s'attachant plutôt à la forme, travail dans lequel on peut voir une anticipation de notre logique moderne.

La Renaissance est une période de mise en sommeil pour la logique, celle-ci étant délaissée au profit de la recherche d'une méthode. C'est par exemple la position de Descartes qui critique ce traitement formel des raisonnements qui n'en assure que la cohérence et pas la vérité. C'est également dans cette période qu'est rédigée la *Logique de Port-Royal* (1662) dans laquelle les schémas formels sont réduits au strict minimum au profit de nombreux exemples servant à exercer la perception. On retrouve ici une conception de la logique liée à un excès de formalisme empêchant alors le fonctionnement de l'intuition.

C'est dans les idées de Leibniz que plusieurs logiciens d'aujourd'hui s'accordent à retrouver celles de la logique moderne, même si celle-ci s'est développée dans l'ignorance des travaux de ce philosophe-mathématicien. Contrairement à Descartes, Leibniz voit dans la formalisation de la logique un moyen d'atteindre des vérités de manière indiscutablement valide. Dans le sillage de Viète et de Descartes, il apporte sa contribution aux progrès en algèbre, notamment en matière de symbolisation, avec l'ambition de constituer une algèbre de la pensée. Ceci signifie une mathématisation de la logique, par la constitution d'un langage universel permettant un *calculus ratiocinator*, c'est-à-dire un remplacement des raisonnements par un calcul.

Un siècle plus tard, Boole propose une construction formelle qui lui servira pour un traitement algébrique de la pensée. En cela, il peut être vu comme l'initiateur du développement de la logique comme discipline mathématique, mais ici ce sont les mathématiques, et plus particulièrement l'algèbre, qui viennent prêter leurs méthodes à la logique. C'est donc plutôt Frege qui est aujourd'hui considéré comme le père de la logique mathématique contemporaine. A travers un important travail de formalisation et de symbolisation, il envisage de fonder les mathématiques sur la logique. Il voit dans ce travail non pas une fin mais un moyen, nécessaire pour atteindre son but d'une parfaite rigueur. Ce but est également celui poursuivi par le courant logiciste dont fait partie Russell, mais la découverte de paradoxes rend la tâche difficile au point de provoquer ce qu’on a appelé la « crise des fondements ». Ce début du XX$^{\text{ème}}$ siècle est aussi l'époque du courant axiomatique, et du rêve de Hilbert d'un système axiomatique formel « universel » permettant pour tout énoncé de le démontrer ou de démontrer sa négation. Cet espoir est ruiné par le théorème d'incomplétude de Gödel, ce qui n'empêche pas la logique mathématique de continuer ses recherches, dégagée de cette question des fondements, comme une branche des mathématiques parmi d'autres. On retrouve dans l’œuvre du groupe de mathématiciens Bourbaki cette conception de la logique mathématique qui, associée à la théorie des ensembles, permet d’asseoir l’édifice mathématique. Sa présentation axiomatique des mathématiques et de ses structures a eu une grande influence sur les mathématiques françaises du XX$^{\text{ème}}$ siècle.

La logique mathématique actuelle est une modélisation, « non pas des mathématiques, mais de ce que nous faisons lorsque nous faisons des mathématiques » (Lacombe 2007). Elle est donc une branche des mathématiques, qui s’applique aux mathématiques. Un des outils de base de la logique mathématique moderne est la formule, du calcul propositionnel ou du calcul des prédicats. Une formule peut s'interpréter par un énoncé mathématique dont elle met la structure formelle en évidence. Le langage des prédicats n’est pas devenu la langue universelle dans laquelle s’expriment les mathématiciens, mais un langage de référence, et en fonction de la nature de leur activité (recherche, rédaction d’une communication, cours...), ils se placent là où cela leurs semble nécessaire entre un langage complétement relâché et ce langage formel. La syntaxe donne les règles de formation des formules, la sémantique s'occupe de leurs interprétations. La sémantique du calcul propositionnel est basée sur l'idée de valeur de vérité, celle du calcul des prédicats y ajoute la notion de modèle, structure mathématique (un ensemble muni de relations et de fonctions) dans laquelle sont interprétées les formules. Cette sémantique permet de définir les notions de formules équivalentes et de formules universellement valides, ce qui fournit des règles de manipulation des formules, de la même manière que le font par exemple les identités remarquables pour le calcul algébrique. Ainsi, la logique mathématique ne se divise pas en un axe syntaxique et un axe sémantique séparés l'un de l'autre, mais est constituée des allers retours possibles de l'un à l'autre. R. Kouki (2008) a étudié dans sa thèse cette articulation syntaxe/sémantique dans le domaine des équations, inéquations et fonctions : cette articulation est très peu mobilisée par les élèves, voire par les professeurs.

L'étude épistémologique montre que, si la logique est fortement liée à la validité des raisonnements, il n’y a pas consensus sur les moyens nécessaires pour parvenir à la garantir. Et si une réflexion sur le langage a toujours soutenu le travail des logiciens des différentes époques, ils n'ont pas tous eu la même position sur le niveau de formalisation du langage nécessaire et suffisant pour une logique rigoureuse, puisqu'ils n'assignaient pas tous le même but à la logique. Le traitement de l’algèbre permis par le travail de symbolisation initié par Viète a donné un nouvel aspect à la dimension syntaxique de la logique, en interaction avec une sémantique qui se devait de préciser la notion de vérité en mathématiques en la dégageant de son aspect métaphysique. Aujourd'hui la logique mathématique est une branche des mathématiques, et la présence de certains de ses objets d'étude dans les programmes de mathématiques pour le lycée signifie la présence d'une transposition de ce savoir savant vers un savoir enseigné. Nous pouvons cependant douter du fait que ce savoir savant constitue une référence pour les concepteurs des programmes, la logique mathématique étant une discipline mathématique peu connue même chez les mathématiciens.

Mes questions de recherche concernent plus précisément les professeurs : le nouveau programme de mathématiques pour la classe de Seconde de 2009 leur fixe des objectifs concernant des objets de la logique mathématique (connecteurs, quantificateurs, types de raisonnement). Mais plusieurs éléments ne facilitent pas la mise en place d'un enseignement permettant d'atteindre ces objectifs ; d'abord le format proposé pour cet enseignement est inhabituel : la logique doit être enseignée sans faire de cours spécifique, à l'occasion du travail sur d'autres notions. Ensuite, il n'y a pas clairement d'objets mathématiques de référence pour cet enseignement : la formation à la logique mathématique ne fait pas partie du cursus obligatoire des professeurs, mais s'ils ne connaissent pas forcément les objets dont il est question dans le programme en tant qu'objets mathématiques définis par la logique, ils les connaissent parce qu'ils les ont manipulés dans leur activité mathématique. Auxquelles de leurs connaissances vont alors se référer les professeurs ? Quel enseignement vont-ils mettre en place pour atteindre les objectifs fixés par le programme ? Comment les éléments cités ci-dessus vont influencer leurs choix ? L'étude épistémologique permet un premier éclairage sur les réponses des professeurs à ces questions. Dans la suite de cet article je propose de la compléter par une analyse de programmes et de manuels. Les programmes (et leur évolution) agissent comme contrainte pour l'enseignant. Les manuels ont un double aspect : ils sont également une contrainte puisqu'ils font partie des ressources sur lesquelles l'enseignant peut s'appuyer, mais ils sont aussi un révélateur de choix fait par les enseignants qui les écrivent.

III. HISTOIRE DE L'ENSEIGNEMENT DE LA LOGIQUE MATHEMATIQUE AU LYCEE EN FRANCE DES PROGRAMMES DE 1960 A CEUX DE 2008

Je commencerai par souligner une ressemblance frappante entre les programmes de 1960 et ceux de 2008. On trouve dans le programme de 1960, sous le titre « L'initiation au raisonnement logique » :

> C'est donc à l'enseignant du second cycle qu'incombe la tâche d'entreprendre et de poursuivre une initiation plus complète aux modes élémentaires de la pensée logique et à ses moyens d'expression, étant bien entendu que ces notions ne doivent pas faire l'objet d'un exposé systématique, théorique et abstrait; elles doivent être dégagées et précisées peu à peu, puis être mises à l'épreuve à l'occasion de l'étude méthodique et réfléchie des diverses théories et des nombreux problèmes que comporte chacune d'elles.

Et dans ceux de 2008, sous le titre « Raisonnement et langage mathématiques » :

> Le développement de l'argumentation et **l'entraînement à la logique** font partie intégrante des exigences des classes de lycée. A l'issue de la seconde, l'élève devra avoir acquis une expérience lui permettant de commencer à détacher les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant, et, par exemple, à dissocier implication mathématique et causalité. Les concepts et méthodes relevant de la logique mathématique **ne doivent pas faire l'objet de cours spécifiques** mais doivent prendre place naturellement dans tous les chapitres du programme.

Mais derrière cette ressemblance il y a deux contextes d'enseignement très différents.

Le programme de 1960 marque le début de la présence de la logique mathématique dans l'enseignement mathématique au lycée. Elle n'est pas explicitement mentionnée, mais est présente à travers l'introduction des flèches d'implication et d'équivalence, et des symboles des quantificateurs. Ces symboles sont déjà utilisés dans les mathématiques universitaires, les instructions du 19 juillet 1960 incitent à la plus grande prudence quant à leur utilisation au lycée:

> Cependant, qu'il s'agisse du vocabulaire ou des symboles, il faut toujours prendre garde au double danger du verbalisme et du formalisme, aux méfaits que l'un et l'autre peuvent commettre ; les mots et les signes et, particulièrement, ceux qui ont, pour le néophyte, l'attrait de la nouveauté ou du pittoresque, risquent souvent de masquer la pensée.

Pour les partisans des mathématiques modernes, il faut enseigner aux élèves un langage mathématique spécifique permettant de proposer une vision unifiée de la mathématique qui joue ainsi « un rôle privilégié pour l'intelligence de ce que nous nommons le réel, réel physique comme réel social » (rapport préliminaire de la commission ministérielle 1967[2]). La logique, associée à la théorie des ensembles, est un élément essentiel de l'apprentissage de ce langage et les programmes de 1969 comportent un chapitre intitulé « Langage des ensembles » dont la première partie étudie le vocabulaire de la logique, et qui demande de faire le lien entre le langage des ensembles et le langage de la logique. Des instructions parues en 1970 proposent un rapide cours concernant ces notions qui sont nouvelles pour beaucoup de professeurs ayant eu une formation universitaire « classique ».

Le programme de la contre-réforme de 1981 pour la classe de seconde prend une position radicalement opposée : « Il convient de souligner les formes diverses de *raisonnement* mathématique mises en jeu dans les situations étudiées; mais *on évitera tout exposé de logique mathématique*. ». L'activité de l'élève est mise au cœur de l'enseignement, celui-ci doit être acteur de ses apprentissages. C'en est donc fini de « l'illusion langagière » (Bkouche, 1992) associée aux mathématiques modernes. On peut voir des traces de la logique aristotélicienne dans l'étude des formes de raisonnements, mais la logique mathématique a été rejetée avec tout ce qui paraissait trop formel et trop abstrait dans les mathématiques modernes. Ce bannissement perdure dans le programme de 1990, qui précise que tout exposé de logique est exclu.

C'est dans le programme de 2001 que l'on voit une timide réapparition de la logique :

> A l'issue de la seconde, l'élève devra avoir acquis une expérience lui permettant de commencer à détacher les principes de la logique formelle de ceux de la logique du langage courant, et, par exemple, à dissocier implication mathématique et causalité.

De nouveau, la logique est utilisée pour éclaircir des spécificités de la pratique des mathématiques. Il ne s'agit cependant pas, comme au temps des mathématiques modernes, d'utiliser les définitions et les théorèmes de la logique mathématique pour la mise en place d'un langage, mais plutôt d'attribuer à la logique un rôle dans l'apprentissage du raisonnement parce que c'est elle qui en donne les principes.

Le programme de 2008 reprend ces intentions, mais va plus loin en affichant des objectifs en matière de notations et raisonnement (figure 2) :

---

[2] Commission ministérielle chargée de réfléchir à la modernisation de l'enseignement des mathématiques, connue sous le nom de commission Lichnérowicz.

Notations et raisonnement mathématiques (objectifs pour le lycée)

Cette rubrique, consacrée à l'apprentissage des notations mathématiques et à la logique, ne doit pas faire l'objet de séances de cours spécifiques mais doit être répartie sur toute l'année scolaire.

Notations mathématiques

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondant : $\in$, $\subset$, $\cup$, $\cap$ ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.

Pour le complémentaire d'un ensemble A, on utilise la notation des probabilités $\overline{A}$.

Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés, sur des exemples :

- à utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leur sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ;
- à utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles $\forall$, $\exists$ ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;
- à distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;
- à utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- à formuler la négation d'une proposition ;
- à utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- à reconnaître et à utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

Figure 2 *– extrait du programme de seconde de 2008*

Par l'utilisation d'un certain vocabulaire relevant de son champ d'étude, la logique mathématique pourrait constituer ici une référence savante. Mais elle n'a comme fonction que de fournir des outils pour l'expression et le raisonnement dont les professeurs doivent apprendre le maniement à leurs élèves.

L'enseignement de la logique au lycée aujourd'hui n'est donc pas le produit d'une réflexion continue depuis les années 1960, mais vient à la suite de deux positions extrêmes : elle est présente comme une base nécessaire à l'apprentissage des mathématiques de 1969 à 1981, mais est ensuite exclue de 1981 à 2001 avant de revenir timidement. Comme au cours de l'histoire, c'est sur l'aspect formel de la logique que se focalisent les controverses : il est vu comme permettant de garantir aux mathématiques un fonctionnement simple et clair puisqu'explicitement décrit ou au contraire comme entravant une compréhension du sens des mathématiques.

Ce regard, nourri par l'analyse épistémologique, sur l'histoire de l'enseignement de la logique au lycée permet d'en préciser le contexte actuel. Il donne un premier aperçu des enjeux d'un tel enseignement, en reliant la logique à l'apprentissage de l'expression et du raisonnement en mathématiques. Je vais maintenant préciser ces enjeux, et ajouter à l'analyse des programmes celle de manuels car, ceux-ci constituant une référence pour les professeurs, leurs choix de contenus sont déterminants.

IV. APPROCHE ECOLOGIQUE

Les outils de l'analyse écologique me permettent d'étudier les contraintes qui pèsent sur les rédacteurs des manuels, puis comment les choix qu'ils font influent à leur tour sur les activités proposées par les professeurs dans leurs classes. Voici comment Michèle Artaud propose de procéder pour cette étude :

> … un objet ne pouvant pas vivre isolé, il sera nécessaire de faire vivre un complexe d'objets autour [de lui]. Il convient donc d'examiner les différents lieux où on [le] trouve et les objets avec lesquels [il] entre

> en association, ce qu'on appellera les habitats. Puis regarder en chacun de leurs habitats, la niche écologique qu'[il] occupe, c'est-à-dire en quelque sorte, la fonction qui est la [sienne]. Nous pourrons alors envisager la transposition de ces complexes d'objets dans l'enseignement secondaire. (Artaud, 1997)

J'ai d'abord étudié les textes des programmes afin d'examiner niches et habitats de la logique d'une manière générale. J'ai ensuite dressé une liste des objets présents dans l'enseignement des mathématiques au lycée et appartenant au domaine de la logique mathématique - les variables, les propositions, les connecteurs logiques, les quantificateurs - et regardé comment ils étaient présentés dans les manuels, en classant les propos selon qu'ils relèvent d'un aspect syntaxique ou sémantique.

L'étude épistémologique présentée en première partie montre que l'habitat de la logique mathématique est l'ensemble des mathématiques. Cet habitat diffus correspond à une volonté institutionnelle bien marquée dans les programmes de 1960 et de 2008 qui préconisent de travailler la logique à travers l'étude des différents chapitres du programme, mais aussi dans celui de 1969 qui précise que le chapitre « langage des ensembles » « fera beaucoup moins l'objet d'un préambule dogmatique que d'une insertion pratique, *à tout moment*, dans la suite du cours ». Ceci agit comme une contrainte institutionnelle forte : les concepts relevant de la logique mathématique sont des outils destinés à être disponibles à tout moment de l'activité mathématique. En 1969, ces concepts sont également liés à des objets dont les propriétés sont étudiées. Cela est beaucoup moins vrai dans les programmes actuels.

L'analyse comparative des programmes des années 1960, 1969, et 2008 permet d'identifier deux niches principales pour la logique mathématique au lycée :

- une niche langage : la logique mathématique sert à travailler sur les énoncés mathématiques et leurs formulations.
- une niche raisonnement : la logique sert à travailler sur les démonstrations et leur validité.

Mais ces deux niches sont complètement imbriquées. D'une part parce que le raisonnement est indissociable de la manière dont il est exprimé. Nous retrouvons ainsi cette imbrication dans des phrases telles que « poursuivre une initiation plus complète aux modes élémentaires de la pensée logique et à ses moyens d'expressions. » (programme de 1960), « exprimer les raisonnements et les résultats dans une présentation plus méthodique » (programmes de 1969). Cette volonté de raisonnements bien mis en forme ne se retrouve que plus discrètement dans le programme actuel, l'objectif fixé par celui-ci étant de rendre les élèves capables de « conduire un raisonnement, une démonstration » sans préciser d'exigences de forme. Réciproquement, conclure sur la valeur de vérité d'un énoncé demande bien sûr d'abord de le comprendre, mais aussi ensuite de démontrer ce que l'on affirme concernant sa vérité ou sa fausseté, c'est-à-dire produire un raisonnement.

D'autre part, l'imbrication des deux niches se fait autour de ce qui est parfois appelé « logique naturelle », logique qui se dégage des raisonnements que nous sommes amenés à faire dans des situations de la vie courante et que des élèves appliquent parfois dans des activités de mathématiques. C'est elle qui est évoquée dans les instructions de 1970 :

> Les élèves qui arrivent en Seconde ont déjà fait bien des raisonnements et appliqué ainsi des règles de logique, d'une manière peut-être plus spontanée que réfléchie; il convient de leur apprendre désormais, sur des exemples, à exprimer les raisonnements et les résultats dans une présentation plus méthodique.

Il y a un basculement de cette conception d'une certaine continuité entre la logique naturelle et la logique mathématique, à l'idée qu'il peut y avoir au contraire des obstacles dus à la confusion entre ces deux cadres de raisonnement puisque l'élève de 2008 doit « apprendre à distinguer les principes de la logique mathématique de ceux de la logique du langage courant ».

Cet habitat diffus et ces niches imbriquées agissent comme contraintes institutionnelles complexes sur les rédacteurs des manuels. J'examine ce que les manuels proposent dans leurs pages de logique en posant en particulier deux questions : dans quelle niche situer les fonctions occupées par les notions de logique qui sont présentées ? Dans quelles mesures sont présents leurs deux aspects syntaxiques et sémantiques ? Je présente ici les résultats de l'analyse comparée de trois manuels de 1969 et des dix manuels sortis en 2010.

Le programme de 1969, parce qu'il place les connaissances relatives à la logique mathématique à l'intérieur d'un chapitre du programme, impose ainsi une certaine unité dans l'organisation de la présentation de celles-ci : les manuels de cette époque commencent tous par un chapitre « langage des ensembles » qui commence lui-même par une partie logique. Dans les manuels de 2010 on trouve chez certains des pages concernant la logique mathématique en début ou en fin de livre, pages traitant uniquement de raisonnement ou également du vocabulaire ensembliste, chez d'autres des pages ou des encarts disséminés tout au long du livre, cette dernière organisation répondant mieux à la contrainte d'étudier la logique à travers tous les chapitres.

Les manuels de 1969 commencent tous par définir ce qu'est une proposition : c'est une affirmation de faits concernant des objets, qui peut être vraie ou fausse. Cette notion de proposition est essentielle à un travail d'analyse d'un énoncé mathématique articulant syntaxe et sémantique : être capable d'analyser la structure d'un énoncé permet de dégager les propositions élémentaires (ne pouvant être scindées) à partir desquelles il est construit, puis de déduire sa valeur de vérité de celles de ces propositions élémentaires. Dans les manuels de 2010, seuls trois manuels sur les dix étudiés définissent ce qu'est une proposition, quatre autres utilisent ce terme sans le définir. La dimension syntaxique d'opérateur sur les propositions des connecteurs est alors beaucoup moins présente dans les manuels actuels. De plus, si les manuel de 1969 énonçaient les règles qui régissent les manipulations formelles des énoncés (lois de Morgan, négation des énoncés quantifiés, forme disjonctive d'une implication et même en exercice la délicate question de sa négation, ces règles sont données sous formes de lois logiques ou de propositions équivalentes), ceux de 2010, sous la contrainte de ne pas faire de cours spécifiques, soit ne parlent pas de ces énoncés équivalents, soit ne donne pas à ces résultats le statut de propriété. Tout un travail de nature syntaxique, qui ancre la logique dans sa niche langage, proposé dans les manuels de 1969, est donc absent des manuels de 2010 pour lesquels le travail sur les énoncés se situe directement à l'intersection des niches langage et raisonnement. Ceci est encore renforcé par l'utilisation massive des symboles dans les manuels de 1969, qui par exemple oblige à séparer la quantification de la proposition ouverte sur laquelle elle porte. En 2010, seul un manuel utilise les symboles de quantificateurs.

C'est autour de l'implication que les deux niches langage et raisonnement sont les plus imbriquées. Dans deux des trois manuels de 1969 que j'ai étudiés, l'implication est présentée comme connecteur. Le troisième manuel de 1969 propose comme définition de l'implication : « écrire $h \Longrightarrow t$, c'est dire que, quand h se produit (quand h est vrai), t se produit (t est vrai) ». C'est cette approche que l'on retrouve dans les manuels de 2010, approche qui place l'implication dans la niche raisonnement, car l'énoncé « si A alors B » est alors lu comme « lorsque A est vrai, alors B est vrai », et réduit à son utilisation dans un raisonnement pour déduire B de A. Cela n'est jamais explicité, mais il s'agit là de l'implication universellement quantifiée, puisque les valeurs de vérité de A et de B varient. Mais un autre aspect du travail autour de l'implication se situe plutôt dans la niche langage : deux manuels de 2010 évoquent les implications « masquées » sous d'autres formulations, réciproque et contraposée sont présentées à partir de leurs formes par rapport à une implication « si P alors Q ». L'implication est également présente dans la niche raisonnement à travers la règle du modus-ponens (elle est aussi parfois appelée règle d'élimination de $\Rightarrow$), mais il est essentiel de distinguer les deux énoncés « si P alors Q » et « P donc Q ». On trouve malheureusement certains manuels de 2010 présentant ces deux expressions comme synonymes. Les règles du modus-ponens et du modus-tollens sont explicitées dans les manuels de 1969, elles sont associées à des schémas de raisonnement. Mais l'analyse de la structure d'un raisonnement montre que bien d'autres règles de déductions sont utilisées, notamment concernant les quantificateurs. Dans les manuels de 2010, aucune règle de déduction n'est explicitement mentionnée.

Ainsi, si les programmes affichent une volonté d'inscrire la logique mathématique dans une niche raisonnement, ce que l'on trouve à son propos dans les pages « logique » des manuels c'est essentiellement une présentation des différents types de raisonnement, présentation qui ne fait pas vraiment de lien avec la logique mathématique. Ceci n’est pas étonnant car si l’on peut considérer que variables, connecteurs, quantificateurs sont des objets que le mathématicien peut identifier dans sa pratique comme appartenant à un langage formel qui lui sert de référence, il associe rarement les déductions qu’il fait à des règles formalisées dans un système mais plutôt à un ensemble de savoir-faire. La logique est également présente dans les programmes et manuels dans une niche langage mais pour ce qui est des programmes et manuels actuels, l'absence des notions de variable et de propositions empêche une articulation des dimensions syntaxiques et sémantiques du travail sur les énoncés.

V. CONCLUSION

Les pistes que j’ai décrites ici constituent pour moi une base théorique permettant de mieux cerner les enjeux d’un enseignement de la logique mathématique au lycée. Si la logique est depuis toujours liée au raisonnement, son utilisation pour l’apprentissage de celui-ci n’a rien d’évident et c’est plutôt en liaison avec le langage que les manuels présentent les objets de la logique mathématique. Par ailleurs, les auteurs des manuels actuels doivent composer avec la contrainte de ne surtout pas faire de cours spécifiques. Cette contrainte a été légèrement allégée dans les programmes pour la classe de première d’août 2010 puisque ceux-ci conviennent que l’on peut prévoir des « temps de synthèse ». Cette étude des programmes et des manuels est un élément à prendre en compte dans ma recherche centrée sur les professeurs. Quelles sont les pratiques des professeurs de lycée par rapport à l’enseignement de la logique ? Comment tiennent-ils compte dans leur enseignement des prescriptions du programme ? Trouvent-ils dans leur formation initiale un bagage suffisant pour se constituer un savoir de référence pour l’enseignement de la logique au lycée ? Quels peuvent être les effets de quelques jours de formation continue ? La suite de mon travail consiste à mettre en place des observations me permettant de répondre à ces questions.

Par ailleurs, les analyses présentées ici montre la complexité d'un enseignement de ce qui relève de la pensée logique. Tous les mathématiciens semblent capables de mettre en œuvre cette pensée logique, montrant ainsi qu'ils ont su se forger les connaissances en logique nécessaires à leur activité. Que pourrait leurs apporter en plus des connaissances en logique mathématique ? Et pour des élèves dont on constate les difficultés de raisonnement et d'expression, la logique mathématique peut-elle participer au développement de leur pensée logique et de sa mise en action dans leur activité mathématique ?

REFERENCES

Artaud M. (1997) Introduction à l'approche écologique du didactique. L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. *Actes de la IX[e] école d'été de didactique des mathématiques*, 101-139

Ben Kilani I. (2005) *Les effets didactiques des différences de fonctionnement de la négation dans la langue arabe, la langue française et le langage mathématique.* Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.

Bkouche R. (1992) L'enseignement scientifique entre l'illusion langagière et l'activisme pédagogique. *Repères-IREM* 9, 5-14.

Blanché R. (1970) *La logique et son histoire.* Paris : Armand Colin.

Chellougui F. (2004) *L'utilisation des quantificateurs universels et existentiels en première année universitaire entre l'explicite et l'implicite.* Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.

Deloustal-Jorrand V. (2004) *L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique.* Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier Grenoble I.

Durand-Guerrier V. (1996) *Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication.* Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon 1.

Durand-Guerrier V. (2005) *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique.* Habilitation à diriger des recherches. Université Claude Bernard Lyon 1.

Kouki R. (2008) *Enseignement et apprentissage des équations, inéquations et fonctions au secondaire : entre syntaxe et sémantique.* Thèse de doctorat. Université Claude Bernard-Lyon 1.

Lacombe D. (2007) *Tout ce que vous avez toujours voulu savoir sur la logique et qu'on n'a jamais voulu vous révéler.* Conférence au séminaire de l'IREM de Paris 7.

MANUELS SCOLAIRES

Programme de 1969 :

Algèbre, 2e ACT, collection ALEPH'0, Classiques Hachette, 1969.

Mathématique 2e CT, collection QUEYSANNE-REVUZ, Fernand Nathan, 1969.

Mathématique, 2e A, V.LESPINARD, André Desvigne, 1969.

Programme de 2009 :

Maths 2nd, collection Indice, BORDAS, 2009.

Mathématiques 2nd, collection Hyperbole, NATHAN, 2010.

2nd, collection Math'x, DIDER, 2010.

Maths 2nd repères, HACHETTE EDUCATION, 2010.

Math 2nd, Travailler en confiance, NATHAN, 2010.

Odyssée mathématiques 2nd, HATIER, 2010.

Transmath 2nd, NATHAN, 2010.

Symbole maths 2nd, BELIN, 2010.

Déclic, Mathématiques 2nd, HACHETTE EDUCATION, 2010.

Maths 2nd , collection Pixel, BORDAS, 2010.