LES RESISTANCES DES ENSEIGNANTS FACE A L'APPROXIMATION[1]

Carlo MARCHINI – Groupe de Recherche ZEROALLAZERO[*]

Résumé – Il s'agit d'analyser les caractéristiques importantes de l'approximation en tant que sujet prévu par les programmes italiens à partir de 2007. Nous avons voulu constater, à l'aide d'un questionnaire, si aujourd'hui ce thème a la place qu'il mérite dans l'enseignement. Nous avons perçu une certaine résistance face à l'argument, surtout chez les professeurs du collège et du lycée. À notre avis, cela peut être une conséquence du manque de connaissance à ce sujet chez les professeurs et de la nécessité de changer de 'point de vue', dans le sens de Vandebrouck (2011).

Mots-clefs : Approximation, croyances, aires, point de vue local, point de vue ponctuel

Abstract – The features of approximation as a topic of Italian programmes from 2007 on are presented and their relevance is emphasised. For investigating if today the topic is customary we administered a questionnaire. It showed us that the topic is not 'popular' mainly among teachers of higher secondary school. We suppose that it is a consequence of a teachers' scarce knowledge the topic and the necessity of a change of 'point of view' in the meaning of Vandebrouck (2011).

Keywords: Approximation, beliefs, areas, local point of view, punctual point of view

I. INTRODUCTION

Dans les documents officiels de l'école italienne du premier cycle : c'est-à-dire les élèves de 3 à 13 ans (MPI 2007), une place importante est donnée à l'approximation. Il s'agit d'une nouveauté qui est présentée dans les textes officiels mais aujourd'hui la culture des enseignants ne semble pas permettre de la gérer en classe. Nous pensons que le Ministère Italien de l'Education a inséré l'approximation dans les programmes à cause de la présence significative de ce thème dans les programmes des autres pays, par exemple en France (Kahane 2002) et à Singapour (Dindyal 2005), et aussi en raison des tendances vers une école plus attentive aux nécessités sociales.

Nous avons essayé, en publiant des articles scientifiques et des ouvrages (cf. références), d'introduire cette « culture de l'approximation », mais la pénétration des idées chez les maîtres ne semble pas avoir abouti à des résultats positifs. Des rencontres avec les enseignants titulaires dans des stages de formation continue nous ont confirmé, à l'aide d'un questionnaire, cet état des choses par rapport à l'approximation. Nous allons présenter un choix des questions et de réponses au questionnaire en appui à cette thèse.

II. LES RAISONS DE L'APPROXIMATION

Nous voyons dans l'approximation des aspects importants pour l'enseignement des mathématiques. En effet, si l'on voit dans les concepts de nombre réel et de limite un but de la culture mathématique et de ses applications pour le lycée, comme c'est le cas dans de nombreux pays, il nous semble que c'est une erreur de traiter ces sujets seulement dans les

---

[1] Recherche soutenue par le projet Prin 2008PBBWNT auprès de l'Unité Locale de Recherche en Didactique des Mathématiques de l'Université de Parme.

[*] Carlo Marchini, Département de Mathématiques de l'Université de Parme – Italie - carlo.marchini@unipr.it

Le Groupe de Recherche ZEROALLAZERO est un collectif d'enseignants (et instituteurs) qui couvre tous les niveaux scolaires, du cours préparatoire à l'université. Il est né au début de l'année 1996 pour montrer la possibilité de construire un parcours vertical sur les concepts d'approximation et de limite. Au fil du temps, sa composition a changé. Les plus 'résistants' d'aujourd'hui sont: M.F. Andriani, C. Bisso, S. Foglia, S. Gregori, L. Grugnetti, A. Maffini, C. Marchini, M. Rapuano, A. Rizza, A. Speroni, V. Vannucci.

---

dernières années d'école, car on a la possibilité de les introduire graduellement (Andriani et al. 2009) par l'approximation qui est considérée (dans les programmes officiels) à la portée des élèves de l'école primaire. D'autre part, la première approche de l'approximation donne une bonne possibilité d'activer la discussion mathématique en classe (Diakoumopoulos, 2010, p. 1126) ; de plus Kouropatov et Dreyfus suggèrent :

> Approximation is […] a complex, multi-faceted issue. It does relate to the definite integral, but it also relates many other notions in mathematics such as differentiation, estimation of large numbers, probability and measurement. Hence, approximation is, in our opinion, an excellent candidate to start with. […] The process-nature of approximation (e.g., calculating the area of a circle by using circumscribed polygons with progressively more sides) and the concept (object)-nature of approximation (e.g., an area estimate for the circle) seem to be intuitively clear for students. The idea of approximation allows for developing didactical tools, with which a student's work may become observable. (Kouropatov et Dreyfus 2011, pp. 3-98)

Le groupe Zeroallazero a proposé des activités de classe sur l'approximation à tous les niveaux scolaires, puisqu'il est certain que si un élève travaille sur un sujet à l'école primaire et qu'il le retrouve seulement à la fin du cycle de ses études, il lui sera bien difficile de reconnaître les liens entre ce qu'il a vu à des périodes aussi distantes l'une de l'autre (par exemple, entre approximation et nombres réels ou entre estimation d'une aire par quadrillage et intégration). Donc, notre avis est qu'on doit donner une place à l'approximation dans l'enseignement et la proposition de ces activités peut attirer l'attention des maitres puisque :

> if teachers are not confident in their mathematical knowledge, they may find it difficult to ensure that their students gain confidence and competence. (Southwell et Penglase 2005, pp. 4-209)

Les raisons qui conduisent à recommander aux enseignants la familiarité avec le sujet et aux étudiants l'apprentissage de l'approximation, outre l'intérêt pour l'enseignement des mathématiques, résident aussi dans les exigences de la société et de la vie pratique et tout cela se rencontre aussi dans Kahane (2002). On trouve chez Kahane l'hypothèse qu'une des résistances à l'adoption de l'approximation est l'idée que le calcul exact est plus 'noble' que celui approximé, mais ce point de vue peut avoir seulement pour effet de séparer la culture de l'école de celle de la vie.

Dans Girnat nous trouvons une affirmation semblable très explicite d'une professeure, qui dit :

> Mrs. D. - The beauty of mathematics is the fact that everything is logical and dignified. […] Everywhere else, there are approximations, but not in mathematics. There is everything in this status it has ideally to be in. (Girnat 2011, p. 632)

Une des nouveautés les plus importantes des programmes scolaires italiens (à partir de 2007) est qu'ils attribuent à l'approximation le rôle d'une notion ayant des aspects (et des effets) métacognitifs qu'ils recommandent. Ils suggèrent qu'à l'école primaire (élèves de 6 à 10 ans), l'habitude d'estimer les résultats des opérations, de choisir des représentations significatives de relations et de données (avec aussi des logiciels) incite l'élève à en tirer des indications, à formuler des jugements et à prendre des décisions. Ils suggèrent des tâches sur la mesure de figures 'irrégulières' et des problèmes numériques.

Pour le collège (élèves de 11 à 13 ans), les mêmes programmes affirment que le sujet de l'approximation peut aider l'élève à développer la conscience des avantages et des désavantages de ses choix par rapport aux objectifs que l'on considère. Et nous retrouvons ici ce que Haspekian et Bruillard (2010, p. 523) appellent « experimental mathematical culture ».

Nous ne trouvons pas, dans d'autres sujets présentés par les programmes italiens du premier cycle, ces caractéristiques métacognitives ; l'approximation joue ainsi un rôle particulier, qui n'est pas seulement celui de donner des nouvelles informations.

En outre, dans les indications pour le lycée italien nous retrouvons le même sujet (en peu de mots et sans références aux aspects métacognitifs) en montrant ainsi qu'il devient une sorte de fil rouge de tout le parcours didactique.

Tout cela donne à l'approximation le statut d'une activité qui se poursuit au fur et à mesure du développement des connaissances mathématiques nécessaires pour obtenir des résultats avec différents degrés de précision. Ce sujet présente des aspects que l'on peut assimiler à une sorte d'expérimentation « continue ». Et l'expérimentation en classe est considérée (Papadopoulos et Iatridou 2010 p. 209) comme une aide valable pour impliquer les élèves dans la construction du savoir.

Finalement, Kouropatov et Dreyfus posent deux questions :

> Question 1. What is the structure of the approximation concept in terms of elements of knowledge and what are suitable operational definitions for these elements that allow the researcher to identify concept construction? Question 2. How does the process of knowledge construction occur during an instructional intervention? (Kouropatov et Dreyfus 2011, pp. 3-98)

Pour enrichir la proposition de Kouropatov et Dreyfus qu'une solution aux problèmes de l'approximation soit de gérer le cadre du « Abstraction in Content », nous ajoutons que l'on peut accorder aussi à l'apprentissage de l'approximation la nécessité d'un changement de point de vue, de ponctuel à local. Vandebrouck introduit ces notions à propos des fonctions :

> Indeed, the balance from conceptual embodied world to the formal axiomatic one is accompanied by the development of local properties about functions: limit, continuity, derivability, equivalent expressions, Taylor' s local expansions near some points which are the basic notions of calculus. We claim that working at university level on functions implies that students can adopt a local point of view on functions whereas only the punctual and global points of view are constructed at the secondary school. (Vanderbrouck 2011, p. 2095)

Du point de vue ponctuel

> […] functions are considered as correspondences between two sets of real numbers, an element of the first set being associated with a unique element of the second set. […]. At this level, functions are represented by arithmetic formulas that operate as a program for calculation, such as calculus programming. (Op. cité, p. 2095)

Notre proposition est que cette théorie des points de vue s'applique très bien aussi à la gestion des résultats numériques et aussi à l'école. Nous pouvons établir une sorte de parallèle entre le couple calcul 'noble' - calcul approché de Kahane avec ce que Vandebrouck suggère entre les points de vue ponctuel - local. L'enjeu de ce dernier point de vue est d'approcher graduellement tous les concepts qui sont intrinsèquement locaux et l'approximation est parmi eux. La familiarité avec ce point de vue et avec l'approximation pourrait être valable pour l'apprentissage des nombres réels (González-Martín et al. 2011, p. 2-453).

Dans l'histoire des mathématiques nous trouvons des exemples d'approximation à propos des questions de mesure des grandeurs. Archimède dans *La mesure du cercle* dit :

> Proposition 2. Un cercle est au carré construit sur son diamètre, à très peu de chose près, comme 11 est à 14.
>
> Proposition 3. La circonférence d'un cercle quelconque est égale au triple du diamètre réuni à une certaine portion du diamètre, qui est plus petite que le septième de ce diamètre, et plus grande que les 10/71^{e} de ce même diamètre.

Ici le Syracusain semble affirmer qu'il y a une 'vraie' valeur qu'il connait d'une façon approximée.

Une affirmation claire (et un exemple important) de ce qu'est l'approximation (en latin *latitudo*) se trouve dans l'œuvre de Jacob Bernoulli (1654 – 1705), *Ars Conjectandi* (1713) :

> Mais pour que cela ne soit pas compris autrement qu'il ne convient, il faut bien noter ce qui suit ; je voudrais que le rapport entre les nombres de cas, que nous entreprenons de déterminer expérimentalement, ne fût pas pris de façon nette et sans partage (car ainsi c'est tout le contraire qui arriverait et il deviendrait d'autant moins probable de découvrir le vrai rapport qu'on ferait de plus nombreuses observations), mais je voudrais que le rapport fût admis avec une certaine latitude, c'est-à-dire compris entre une paire de limites, pouvant être prises aussi approchées qu'on voudra.

Dans cette citation, donc, Bernoulli propose un théorème dans lequel une donnée qui n'appartient pas au domaine de la géométrie, ni de l'algèbre, est connue seulement d'une façon approximée, c'est-à-dire, qu'elle se trouve entre deux bornes. Et la démonstration réside justement dans l'identification de ces limites et dans la probabilité que la donnée se trouve justement entre eux. Bernoulli montre, ainsi, un exemple conscient du point de vue local.

Nous pouvons remarquer que le point de vue ponctuel l'emporte souvent dans les classes. Deux exemples : dans le cas de l'aire d'une figure dessinée sur un quadrillage, cf. figure 2, les élèves souvent comptent le nombre de carrés contenus et le nombre de ceux qui sont partiellement contenus. L'aire est donnée par la somme du nombre de carrés du premier type et la moitié du nombre de ceux du second type. Du point de vue local, l'aire est le couple du nombre des carrés contenus et la somme des nombres des carrés du premier et second type, en préparant, de cette façon, la théorie de l'intégration selon Riemann. Deuxième exemple : dans la recherche d'une limite d'une fonction, habituellement les élèves calculent la fonction sur le point d'accumulation même si la fonction n'est pas continue, si le point d'accumulation n'appartient pas au domaine de la fonction et aussi s'il s'agit d'un infini. Et il s'avère que souvent les exercices d'analyse sont posés d'une telle manière que cette approche suggère les solutions correctes, cache la nécessité du point de vue locale avec les conséquences dont parle Vandebrouck.

Les expériences du groupe de recherche Zeroallazero (cf. références) montrent néanmoins que les élèves portent une attention à l'approximation.

III. LA RECHERCHE

Notre recherche a pour but de voir si dans l'enseignement l'approximation a trouvé la place que les programmes prévoient et que selon nous elle mérite. Le modèle des praxéologies selon Castela (2008) nous procure un outil pour évaluer quels aspects de l'approximation sont présents dans l'enseignement. Chevallard (1999) introduit pour toute activité humaine une praxéologie dénotée par $[T, \tau, \theta, \Theta]$ où T est un type de tâches, τ est une technique, θ est une technologie et Θ est une théorie. La proposition de Castela d'une organisation praxéologique mathématique (OM) vise à mieux articuler la praxéologie dans le cas spécifique d'un apprentissage en mathématiques. Elle propose d'y reconnaitre deux types de technologie : la composante pratique θ^p et, la composante théorique θ^{th} de la technologie. Pour l'approximation, on peut indiquer une organisation praxéologique mathématique dans la quelle T sont des questions relatives à « L'aire d'une figure (La longueur d'une courbe) » ou bien à « Calcul approximé avec des données expérimentales » (qui sont indiqué dans les programmes). Les techniques dépendent du problème spécifique mais sont liées, en tous cas, à l'acquisition de données qui s'adaptent mieux aux problèmes. La technologie a une composante pratique θ^p, celle des logiciels ou d'un 'arpenteur/constructeur' [2] et une composante théorique θ^{th} liée à la théorie des suites (convergence) et de l'intégration. La théorie est celle des nombres réels et de la mesure.

[2] Arpenteur :Mesurer les bords d'une surface sur un terrain ou sur un dessin. Constructeur : Décomposer une forme en traces constructibles à l'aide d'un instrument (Duval 2005, p. 9 – Figure 1).

À l'occasion de stages de formation, nous avons eu la possibilité de proposer aux enseignants qui y participaient de brefs questionnaires ouverts, sous forme écrite, pour vérifier quels aspects de l'organisation praxéologique mathématique - approximation étaient acceptés. Nous avons présenté une question ouverte générale sur les programmes d'enseignement (QP) et quatre questions qualitatives ouvertes sur l'approximation (QA1 – QA4).

La proposition de QP analyse si l'organisation mathématique de l'approximation est présente et comprise dans ses aspects et ses effets sur les enseignants de l'échantillon.

Les questions QA sont en rapport avec la technique τ et les technologies θ de l'organisation mathématique, sous la forme d'interrogations indirectes, du genre « Selon votre expérience, quelles pourraient être les réactions de vos élèves face à…. », au lieu de demander « Comment faites vous ? ». Notre proposition est le résultat d'un choix : nous pensons que les enseignants ont répondu personnellement sur la base de leurs croyances (beliefs) à propos de l'approximation. Les « beliefs » des enseignants peuvent être identifiées de façons différentes, nous acceptons ici ce que Phillip propose :

> psychologically held understandings, premises, or propositions about the world that are thought to be true. (Phillip 2007, p. 259)

Une partie du système de croyances abouti à la création d'un programme personnel (personal curriculum) qui se substitue au curriculum officiel et qui

> it is used to structure lessons and to guide the instructional practice through various steps of contents and methods to goals of education. (Girnat 2011, p. 628)

Pour cela les « beliefs » peuvent prévaloir sur le texte des programmes officiels et déterminer la didactique. Nous considérons que les réponses à nos questions reflètent les représentations de l'enseignant de ses buts et des résultats de son travail. En effet, les QA peuvent être considérées comme étant proches des questions directes : « Comment agiriez-vous s'il fallait présenter la notion … ? » et l'escamotage consistant à se référer à des réponses d'élèves a constitué une sorte d'écran sur lequel chaque enseignant a projeté ses croyances.

En adoptant ce point de vue, nous pouvons tirer des indications intéressantes sur le thème de l'approximation, puisque ce que les enseignantes présentent comme réponses possibles des élèves sont pour partie les effets de la didactique mise en œuvre par eux-mêmes.

On a proposé dans les QA l'utilisation de la connaissance commune du contenu (« CCK » dans le sens de Ball, Thames et Phelps (2008)), puisque les mêmes QA avaient été employées pour des expériences en classe et nous avions choisi un langage et des contenus présentés de façon élémentaire. Nous avons eu aussi la possibilité de comparer les réponses des enseignants avec celles des élèves que nous avions collectées dans des expériences précédentes.

Notre échantillon était composé de 45 instituteurs et professeurs des différents stages. Ce petit nombre ne peut pas être considéré comme représentatif du point de vue statistique ; donc il faut plutôt parler d'une étude de cas. Les participants aux stages n'étaient pas préparés à cela et ils ont eu peu de temps pour répondre à chaque question. La limitation du temps pourrait avoir un effet positif sur les réponses, dans le sens qu'on peut considérer que la « répartie » est la première chose (donc la plus immédiate) à laquelle on a pensé.

IV. LES QUESTIONS ET LEUR REPONSES

Nous avons eu la « preuve », par les questionnaires, que, généralement, l'approximation n'est pas prise en considération par les enseignants (de notre échantillon).

Le but de cette section est descriptif. Ici, nous présentons QP, QA1 et QA2 et nos analyses des réponses que nous avons obtenues pendant les stages. Les questions QA étaient associées à une présentation pour les introduire d'une façon opportune. Les autres questions QA3 et QA4 ne changent pas le panorama des réponses ; nous avons donc décidé de les omettre ici par manque de place.

1. QP

La QP est : « Dans votre expérience, indiquez une notion mathématique pour laquelle vous pensez que l'élève aurait envie de prendre à sa charge son apprentissage (Indiquez à quelle classe vous vous référez) ».

Il s'agit d'une question très (ou trop) générique. Une bonne connaissance des programmes de 2007 et de l'organisation mathématique – approximation aurait pu aider à répondre, étant donné le rôle unique que le sujet a dans les documents officiels. Nous avons cependant une variété de réponses. Remarquons que le titre du stage ne parlait pas d'approximation, mais suggérait que l'on parle de stratégies didactiques pour impliquer les élèves dans leur propre construction du savoir. Étant donné ce que disent les programmes, nous avions estimé que le sujet pouvait être clair. Nous avons tiré de cette question des réponses qui indiquent surtout le « problem solving » comme le sujet le plus cité pour impliquer les élèves. Cette proposition n'est pas surprenante, mais on peut considérer le « problem solving » une méthodologie, plutôt qu'une notion mathématique.

A côté de cette réponse il y a une liste de notions scolaires, qui indiquent, à la fois, des praxéologies ou des types de problèmes ou de techniques. Par exemple :

- compléter la table de multiplication
- trouver les aires latérales et totales des solides
- exponentielles et logarithmes
- les graphiques des fonctions
- application du théorème de Pythagore
- transformations géométriques
- constructions géométriques
- calcul des probabilités
- usage de l'Euro.

Peut-être que le temps laissé pour répondre n'a pas permis d'obtenir une argumentation plus articulée des enseignants. Nous avons pu interroger oralement une professeure qui nous a expliqué que sa suggestion des constructions géométriques voulait indiquer que l'utilisation des outils graphiques classiques ou bien des ordinateurs (technologies) place les élèves dans une situation d'expérimentation qui présente les aspects de motivation qu'on avait demandés.

Notre question se rapportait à des notions mathématiques, mais nous avons reçu aussi des indications méthodologiques ou psychologiques, par exemple sur

- la correction des devoirs en classe,
- l'aide aux camarades d'école en difficulté.

D'autres réponses suggèrent que pour certains enseignants il n'est pas possible de trouver une notion répondant à notre première question ; ce qui laisse penser à une sorte de « défaite scolaire ». Par exemple, des enseignantes (de l'école primaire et de l'école secondaire) ont écrit que les seules choses qui intéressent leurs élèves sont :

- les images de joueurs de football
- les bracelets et colliers de petites perles

- une chanson des 'Muse'.

Parmi toutes ces réponses, nous remarquons que personne n'a indiqué l'approximation comme thème possible, même si elle représente une nouveauté dont la présence est importante et continuelle dans les programmes scolaires (depuis 2007). Notre conclusion est que les enseignants ne tiennent pas compte des changements des programmes de manière visible ou consciente, ou bien n'ont pas perçu les aspects métacognitifs de ce thème. On peut aussi penser que l'approximation soit vécue comment un objet nouveau.

En plus il est possible que dans leur formation professionnelle, les enseignants de l'école secondaire même s'ils ont eu une expérience du point de vue local à l'Université, n'ont pas eu l'occasion de réfléchir sur ces aspects et que leur pratique professionnelle dans le cadre du programme précédent (sans l'approximation) joue le rôle le plus important dans la construction du curriculum personnel, dans le sens de Girnat.

Après avoir ramassé les copies de réponses à la QP, nous avons présenté le texte des programmes italiens du premier cycle, là où on parle d'approximation et aussi les propositions des programmes français et de Singapour. Cette présentation a provoqué une sorte de réprobation. Une enseignante a pris la parole et a affirmé que c'était, encore une fois, un amas de bonnes intentions qui n'auront pas d'effets sur l'école. Tout cela parce qu'il n'y a pas d'instruments permettant de les faire passer dans la réalité. Cette réponse nous a confirmé que l'organisation mathématique de l'approximation, même si la théorie sur laquelle elle se base peut être connue, rencontre des difficultés de pénétration dans le système de croyances des enseignants présents.

2. *QA1 – Le petit lac*

Pour montrer qu'on disposait déjà d'éléments suggérant une voie d'approche du thème, nous avons commencé à poser des problèmes sur l'approximation à partir de QA1. Ce problème est emprunté à Falcade et Rizza (2003), donc antérieur aux programmes du MPI (2007).

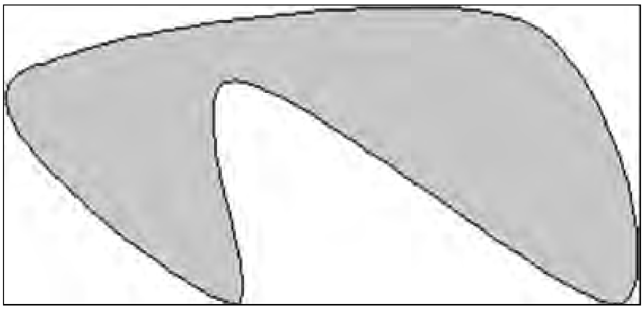


Figure 1 *– Le petit lac*

L'énoncé du problème est le suivant :

> « Imagine un petit lac de montagne vu du dessus tel qu'il est dessiné en Figure 1. Peux-tu mesurer l'aire de la part grise ? Si oui, comment ? Si non, pourquoi ? »

QA1 pour les enseignants est « Selon votre expérience quelles pourraient être les réactions de vos élèves face au problème du petit lac ?».

Dans la question il n'y a pas de mesures de longueur, c'est plutôt de s'interroger sur l'existence de l'aire et non pas sur l'existence des formules 'exactes' pour la calculer, donc une question de la théorie de la mesure Θ. Il s'agit aussi de la technique τ qui est liée à θ^p, la composante pratique de la technologie : les approches à la mesure sur le dessin par quadrillage ou par décomposition en polygones. Mais son résultat n'est pas possible en gardant le point de vue ponctuel, on doit le changer en adoptant le point de vue local, comme couples d'aires des raffinage obtenus par décompositions intérieures et extérieures, donc en prenant en compte la technologie théorique θ^{th} des suites.

Les réponses des enseignants sont cohérentes avec les réponses des élèves qui ont été récoltées dans l'expérience de Falcade et Rizza (2003) et sont en majorité négatives : *non, je ne peux pas mesurer, parce que je n'ai pas de formule qui convient*. De plus, une institutrice a observé que les enfants imaginent que le maître connaît **la** réponse. Cette observation est importante, du point du vue du contrat didactique, mais l'usage de l'article défini, comme la « chasse à la formule » précédente, révèle la présence d'un point de vue ponctuel. La plupart des personnes interrogées ont confirmé ce point de vue.

Très peu d'entre eux (surtout les instituteurs) ont répondu que leurs élèves utiliseraient des quadrillages.

3. QA2 – La belle figure.

La question QA2 est plus explicite dans la direction de l'approximation puisque elle suggère une technique τ appuyée sur le quadrillage, la composante pratique θ^{p} de la technologie pratique. Elle est empruntée à Dalla Noce et al. (2000), mais, ici, nous la présentons dans la traduction de Andriani *et al*. (2009). Dans ce dernier texte, on trouve l'analyse a posteriori de cette expérience de caractère diagnostique.

Lors du stage, nous avons présenté le problème

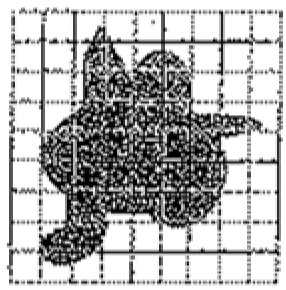
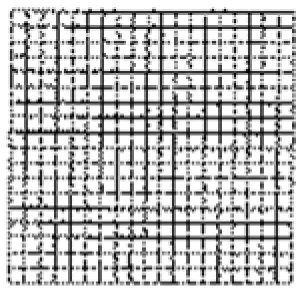
Quelle belle figure ! Mario et Giovanna doivent trouver l'aire de cette figure :	
Mario propose de mesurer l'aire avec du papier quadrillé de ce type :	
Giovanna avec du papier quadrillé de ce type : Et toi, que ferais-tu ? As-tu d'autres idées ? Combien mesure la figure d'après toi ? Explique comment tu as trouvé.	

***Figure 2** – Quelle belle figure !*

La question pour les enseignants est : « En vous aidant de votre expérience quelles pourraient être les réactions de vos élèves face au problème la belle figure ? ».

Dans le problème la théorie de la mesure Θ est évidente, de même la proposition de la technologie pratique θ^p, par quadrillage, mais la présence du second quadrillage introduit la technologie théorique θ^{th} avec la possibilité d'améliorer les résultats par raffinages. La technique est toujours le comptage, avec l'idée de continuité. En tout cas le point de vue ponctuel n'est pas gagnant. Donc nous avons demandé de comparer deux méthodes ; tous les deux s'appuient à la technique τ, mais leur comparaison fait appel à la technologie théorique θ^{th} et au point de vue local.

La réaction de 15 personnes interrogées sur 35 a été dans le sens que Giovanna propose une solution plus approchée, mais seulement deux (une pour les classes terminale de l'école secondaire et une pour l'école moyenne) ont parlé de deux bornes. L'expression « plus approchée » n'a pas été expliquée. Une seule réponse a proposé une décomposition avec d'autres polygones. Pour les autres, les réactions passent de la complète indifférence à la gêne. En particulier chez les professeurs (qui enseignent l'analyse mathématique) :

- S'ils répondaient, je pense qu'ils opteraient pour Giovanna.
- Ils répondraient « Giovanna » mais après ils ne continueraient pas.
- Dans la classe de terminale, les lycéens diraient que les deux choix sont indifférents, puisque l'aire ne change pas.
- Les élèves de l'école supérieure ne seraient pas particulièrement intéressés puisque le problème a peu d'importance pratique.
- D'accord sur l'usage d'un problème concret, mais un problème de ce type susciterait beaucoup d'hilarité.

Donc, quand on est aux prises avec l'intégration, on fait preuve de suffisance et d'incompréhension pour un problème proche de l'intégration et qui mêle continuité et limite. Dans ces réponses on perçoit avec une certaine évidence l'apport du professeur et le cadre de ses croyances.

On peut aussi comparer ces réponses avec celles des instituteurs :

- Mes élèves (de 8 ans), bien qu'ils n'aient pas abordé ce sujet, choisiraient probablement le quadrillage du second type.
- Les élèves de (8 à 10 ans) ne montreraient pas de réactions particulières, ils essaieraient de compter les petits carrés internes (avec le quadrillage plus grand) et ensuite, compteraient les « moitiés », mais ils rencontreraient des difficultés avec les lignes courbes.

Dans ces mots, on fait confiance à l'intuition des petits et l'on considère qu'une activité de ce genre est possible et importante à l'école primaire (et d'autres réponses disent qu'elle est possible aussi au collège). Les plus petits présentent

> the ability to create wealthy images that individuals can handle mentally, can pass through different representations of the concept and, if necessary, can provide the mathematic ideas on a paper or computer screen (Lois et Milevicich 2010, p. 1060)

Les réponses des professeurs semblent dire que ce sujet n'est pas adapté aux dernières années de scolarité. Nous supposons que cette réponse soit motivée par la nécessité d'utiliser une technique de comptage qui semble peu mathématique. Ceci met en évidence un hiatus profond entre les différents niveaux scolaires, avec la possible perte de l'intuition.

Cependant, la majorité des personnes interrogées adoptent un point de vue ponctuel car il n'est pas question de couple du nombre des carrés contenus et du nombre des carrés contenants.

V. CONCLUSIONS

Les réponses à nos questions font apparaître une mésestimation générale des documents officiels italiens qui sont considérés comme étant éloignés de l'école réelle (italienne) et de ses problèmes et, aussi, la force de l'expérience de ceux qui se sont formés avant la promulgation des nouveaux programmes et qui risquent de continuer à gérer l'école loin des exigences d'aujourd'hui.

Il n'y a pas le 'courage' d'aborder « les tâches où la technique est mise en œuvre avec des objets nouveaux » (Castela 2008). À notre avis, il est évident que le processus de formation des enseignants n'avait pas pu tenir compte des changements introduits par les programmes et que les enseignants manifestaient une simple réalité : sans formation, il est difficile de s'adapter aux changements, même s'ils sont profitables. Les efforts des groupes de recherche et des sociétés scientifiques peuvent donner des suggestions valables au gouvernement, à propos de l'école, mais elles n'atteignent qu'une minorité d'enseignants dans leur formation en service pour changer, avec le temps les paradigmes reçus en formation initiale.

En Italie, il y a eu peu de changements de programmes scolaires et tous sont « tombés du ciel » sur la tête des enseignants. Les efforts pour une diffusion préalable de nouveaux contenus parmi les enseignants titulaires et en formation, n'ont pas été suffisants. Ils ne peuvent pas être seulement des épisodes, mais ils doivent faire partie d'un processus durable. Nous savons que toute cette évolution se heurte aux difficultés économiques, à la sous-estimation de la culture, etc. c'est-à-dire, à tout ce qui paraît une des réponses caractéristiques de notre pays à ce moment historique.

Pour revenir à l'approximation, notre avis est qu'il faut que les enseignants se familiarisent avec les techniques et technologies de l'organisation mathématique approximation et aussi qu'ils changent de point de vue de ponctuel à local. Actuellement, quelque chose semble arriver (peut-être) seulement au niveau de l'enseignement des dernières années de scolarité avec des sujets qui demandent intrinsèquement un point de vue local, mais il serait important que ce sujet soit préparé graduellement à partir de l'école primaire. Nos recherches dans ce domaine nous confortent dans cette idée et nous disent qu'il y a des intuitions chez les élèves de l'école primaire qui doivent être valorisées et exploitées ensuite au niveau de toute la scolarité.

REFERENCES

Alberti N., Andriani M. F., Bedulli M., Dallanoce S., Falcade R., Foglia S., Gregori S., Grugnetti L., Marchini C., Molinari F., Pezzi F., Rizza A., Valenti C. (2001) Sulle difficoltà di apprendimento del concetto di limite. *Riv. Mat. Univ. Parm,* (6) 3*, 1-21.

Andriani M.F, Dallanoce S., Falcade R., Foglia S., Gregori S., Grugnetti L., Maffini A., Marchini C., Rizza A., Vannucci V. (2009) *Au-delà de toute limite - Parcours didactiques pour enseignants audacieux*. Nivelles: CREM a.s.b.l.

Archimède (1807) *Oeuvres* (traduction F. Peyrard). Paris : François Buisson.http://remacle.org/bloodwolf/erudits/archimede/cercle.htm.

Ball D. L., Thames M.H., Phelps G. (2008) Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education* 59, 389-408. http://jte.sagepub.com/content/59/5/389 DOI: 10.1177/0022487108324554.

.Bernoulli Jacob (1713) *Ars conjectandi*. Basileæ : Thurnisiorum Fratrum (traduction en Français dans Meusnier N. (1987) *Jacques Bernoulli et l'ars conjectandi*. Rouen : IREM).

Bisso C., Foglia S., Grugnetti L., Maffini A., Marchini C., Rapuano M., Rizza A., Vannucci V. (2009) *Il sogno di Cirillo e la sfida della Tartaruga*. Bologna: Pitagora Editrice.

Bisso C., Grugnetti L., Maffini C., Marchini C., Rapuano M., Speroni A., Vannucci V., ARMT. (2011) *Alla ricerca del segmento perduto*. Bologna: Pitagora Editrice.

Castela C. (2008) Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 28(2), 135-182.

Chevallard Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 19(2), 221-226.

Dallanoce S., Grugnetti L., Molinari F., Rizza A., Andriani M.F., Foglia S., Gregori S., Marchini C., Pezzi F. (2000) A cognitive cooperation across different sectors of education, In Ahmed A., Kraemer J. M., Williams H. (Eds.) (pp. 297-303) *Proceedings of CIEAEM 5.* Chichester: Horwood Publishing

Diakoumopoulos D. I. (2010) How can digital artefacts enhance mathematical analysis teaching and learning. In Durand-Guerrier V., Soury-Lavergne S., Arzarell F. (Eds.) (pp. 1121-1130) *Proceedings of CERME 6, January 28th-February 1st 2009.* Lyon: INRP.

Dindyal J. (2005) An overview of the Singapore mathematics curriculum framework and the NCTM Standards. Paper presented at Topic Study Group 3 at the *Third East Asia Regional Conference on Mathematics Education, Shangai, Nanjing, and Hangzhou, China* http://math.ecnu.edu.cn/earcome3/TSG3.htm.

Duval R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la Géométrie : développement de la visualisation, Différenciation des raisonnements et coordination de leurs fonctionnements. *Annales de Didactique et Sciences cognitives* 10, 5-53.

Falcade R., Rizza A. (2003) Approccio intuitivo al concetto di limite/Approche intuitive du concept de limite. *L'educazione Matematica* Anno XXIV, Serie VII, 1(2), 15-37.

Girnat B. (2011) Geometry as propaedeutic to model building – a reflection on secondary school teachers' beliefs. In Pytlak M., Rowland T., Swoboda E. (Eds.) (pp. 628-637) *Proceedings CERME 7*. Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.

González-Martín A.S., Giraldo V., Souto A.M. (2011) Representations and tasks involving real numbers in school textbooks. In Ubuz B. (Ed.) (pp. 449-456) *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Ankara, Turquie: PME 2.

Grugnetti L., Rizza A., Marchini C. (2007) A lengthy process for the establishment of the concept of limit starting from pupils' pre-conceptions. *Far East Journal of Mathematical Education* 1(1), 1-32.

Grugnetti L., Maffini A., Marchini C., Groupe Zeroallazero (2006) Activités didactiques à caractère vertical pour la construction du concept de limite. *Annales de didactique et de Sciences cognitives* 11, 229-250.

Haspekian M., Bruillard E. (2010) Behind students' spreadsheet competencies: their achievement in algebra? A case study in a French vocational school. In Durand-Guerrier V., Soury-Lavergne S., Arzarello F. (Eds.) (pp. 519-528) *Proceedings of CERME 6, January 28th-February 1st 2009.* Lyon: INRP.

Kahane J.-P. (2003) *Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques – La formation des maîtres en mathématiques*. http://www.cfem.asso.fr/Formation_maitres.pdf

Kouropatov A., Dreyfus T. (2011) Constructing the concept of approximation. In Ubuz, B. (Ed.). (pp. 97-104) *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Ankara, Turkey : PME 3.

Lois A., Milevicich L. (2010) The impact of technological tools in the teaching and learning of integral calculus. In Durand-Guerrier V., Soury-Lavergne S., Arzarello F. (Eds.) (pp. 1060–1068) *Proceedings of CERME 6, January 28th-February 1st 2009*. Lyon: INRP.

MPI (2007) *Indicazioni per il curricolo per la scuola dell'infanzia e per il primo ciclo d'istruzione*. Roma : Ministero della Pubblica Istruzione.

Papadopoulos I., Iatridou M. (2010) Systematic approaches to experimentation: The case of Pick's theorem. *Journal of Mathematical Behavior* 29. 207-217.

Philipp R. A. (2007) Mathematics Teachers' Beliefs and Affect. In F. K. Lester (Ed.) (pp. 257-315) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. Charlotte: Information Age Publishing.

Southwell B., Penglase M. (2005) Mathematical knowledge of pre-service primary teachers. In Chick H. L., Vincent J. L. (Eds.) (pp. 209-216) *Proceedings 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Melbourne: PME 4.

Vandebrouck F. (2011) Students conceptions of functions at the transition between secondary school and university. In Pytlak M., Rowland T., Swoboda E. (Eds.) (pp. 2093-2102) *Proceedings CERME 7*. Rzeszów, Poland: University of Rzeszów.