LIMITE DES MÉTHODES SYNTAXIQUES EN ALGÈBRE DU SECONDAIRE

Rahim KOUKI* – Imène GHEDAMSI*

Résumé – L'apprentissage de techniques opératoires est un objectif fondamental de l'enseignement des notions d'équations, inéquations et fonctions algébriques au secondaire. Du côté des élèves, une prépondérance est accordée à une application automatique des techniques. Dans cette communication nous présentons une investigation didactique prenant appui sur un croisement de la sémantique logique avec les praxéologies mathématiques et les registres de représentations sémiotiques. Cette étude vise à montrer qu'en absence de la mobilisation de techniques sémantiques articulant différents modes d'interprétations inter-registre et intra-registres, les techniques syntaxiques de résolution s'avèrent inopérantes et mettent les apprenants en échec.

Mots-clefs : syntaxe, sémantique, algèbre élémentaire, praxéologies, registres sémiotiques

Abstract – The teaching of algebra, in the secondary school, focus on the learning of operating skills which are often automatically used by pupils without any control. In this paper, we present a didactic investigation according to logical and anthropology theories. This study aims to show that the automatic mobilization of syntactical skills, in certain cases, put students in check.

Keywords: syntax, semantic, elementary algebra, anthropology, semiotic

I. INTRODUCTION

Dans cette communication, nous essayerons de monter que la référence à la théorie sémantique de la vérité introduite par Frege (1971) et Russell (1961, 1989) et développée par Tarski (1960, 1972 et 1974) et Quine (1972), permettrait de mieux expliciter les aspects épistémologiques des notions d'égalité, d'inégalité, le statut des lettres … et pourrait enrichir les analyses didactiques autour des objets équations, inéquations et fonctions au secondaire.

Pour cela, nous avons conduit une double analyse en terme de transposition didactique des programmes et des manuels de l'enseignement secondaire en Tunisie en croisant la théorie anthropologique du didactique et en particulier la notion de praxéologies mathématiques (Chevallard 1989, 1992) avec la catégorisation syntaxe / sémantique dont nous avons montré qu'elles ne prennent pas explicitement en compte cette articulation qui relève d'un niveau métamathématique (au sens logique du terme).

Les résultats de ces analyses ont été appuyés par des entretiens semi-directifs en direction des enseignants et de questionnaire auprès d'élèves du secondaire et d'étudiants de classes préparatoires.

II. APPORTS DE LA SÉMANTIQUE LOGIQUE DANS L'INTERPRETATION DES ÉQUATIONS ET DES INÉQUATIONS

Chevallard (1989) a souligné la dialectique entre l'arithmétique et le calcul algébrique en l'interprétant en terme d'articulation syntaxe / sémantique et explique que

> Lorsqu'en classe de sixième, l'enseignant passe de l'observation que $2+3=5$ et $3+2=5$, à l'écriture de la relation générale $a+b=b+a$, il passe alors du calcul sur les nombres (entier naturel) à un calcul algébrique (à coefficient entiers naturels). En d'autres termes, un calcul algébrique, que nous ne définirons pas plus précisément ici, rend manifeste une syntaxe à laquelle le domaine de calcul associé fournit une sémantique. (Chevallard 1989, p. 50)

* Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieurs El Manar, LAMSIN-ENIT – Tunisie – kouki_ra@yahoo.fr, ighedamsi@yahoo.fr

© Kouki R., Ghedamsi I. (2012) Limite des méthodes syntaxiques en algèbre du secondaire. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT3, pp. 435–444). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Nous pensons que la question de l'articulation des deux points de vue sémantique et syntaxique est un champ vaste encore à explorer notamment dans l'enseignement de l'algèbre au secondaire[1].

Dans notre travail de recherche, nous avons montré que, d'une manière générale, la question de l'articulation des deux points de vue sémantique et syntaxique est peu prise en compte dans les travaux de recherche en didactique des mathématiques, ainsi que dans les programmes et les manuels du secondaire en ce qui concerne l'enseignement de l'algèbre au secondaire.

Nous faisons l'hypothèse, que la conception sémantique de la vérité développée dans la théorie des modèles de Tarski (1960, 1972 et 1974), en appui sur la notion de satisfaction d'une phrase ouverte par un élément, peut nous offrir un cadre de référence permettant de traiter certaines questions liées à l'articulation syntaxe / sémantique dans l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques.

*Dans un langage formalisé, comme l*e calcul des prédicats, la sémantique logique étudie les interprétations possibles des symboles et les relations entre les diverses interprétations des formules utilisées. Elle permet d'établir la notion de vérité à partir de la notion de satisfaction d'une formule. Rivenc (1989), explique que

> (…) le concept de vérité est définissable à partir de la notion de satisfaction. En lui-même, un énoncé σ d'un langage *L* n'est ni vrai, ni faux faute de signification. Pour lui donner un sens, il faut associer aux symboles non logiques de *L* une interprétation.» (Rivenc 1989, p. 173)

L'application d'un prédicat à un terme général, ou à plusieurs termes donne ce que Quine appelle une phrase ouverte (cf. Durand-Guerrier et al 2000) ou une fonction propositionnelle (cf. Tarski 1960). Une phrase ouverte n'est pas susceptible de recevoir une valeur de vérité ; étant donné un domaine d'interprétation, elle peut être satisfaite par certains éléments et pas par d'autre ; ou éventuellement satisfaite par tous les éléments du domaine, ou par aucun. Par exemple la phrase « x *est pair* » où x est une variable libre n'a pas de valeur de vérité ; dans les entiers naturels, elle est satisfaite par 4, mais pas par 3.

Les notions de phrases ouvertes et de satisfaction permettent de dire que dans le langage de l'algèbre, une équation ou une inéquation peut ainsi avoir une définition non ambiguë de phrase ouverte, au sens de Quine (1972), pouvant comporter une ou plusieurs variables libres.

Une équation est considérée comme une phrase ouverte comportant une ou plusieurs variables libres. Étant donné un domaine d'objets, un élément de ce domaine est solution de l'équation ou de l'inéquation s'il satisfait la phrase ouverte, c'est à dire si et seulement si la proposition obtenue en assignant cet objet à la variable devient une proposition vraie dans le domaine considéré. Ainsi, résoudre une équation ou inéquation dans un domaine donné (appelé en logique univers du discours), revient à déterminer tous les objets de ce domaine qui satisfont cette phrase ouverte. Ce point de vue sur la résolution des équations est ce que l'on appelle en logique le point de vue sémantique. C'est la première définition que vont rencontrer les élèves.

D'un autre côté, le terme de syntaxe est utilisé en logique dans un sens large englobant ce qui relève de la théorie de la démonstration au sens formel du terme, en opposition avec la sémantique, qui prend en compte les interprétations.

> Carnap parle d'une syntaxe logique du langage scientifique. Par logique de la science, il entend essentiellement une théorie formelle de ce langage, c'est-à-dire l'établissement systématique des règles

[1] Selden etSelden (1995), Durand-Guerrier (1999), Durand-Guerrier et al (2000), Chellougui (2004) et Alcock (2009).

> valant pour ce langage et le développement des conséquences de ces règles. Cette théorie est formelle, elle ne considère donc ni la signification des termes, ni le sens des expressions. (Ouelbani 1992, p. 183)

Dans l'environnement équation, inéquation et fonction, on peut définir deux types d'équivalence : une équivalence sémantique : deux équations sont équivalentes si et seulement si elles sont satisfaites exactement par les mêmes éléments ; une équivalence syntaxique caractérisée par des règles de transformation algébriques. Cependant, bien que les transformations algébriques permettent de travailler essentiellement au niveau de la syntaxe au moment de conclure, il est parfois nécessaire de revenir aux objets du domaine d'interprétation. En effet, certaines transformations ne préservent pas la satisfaction, ce qui nécessite un contrôle sémantique. À titre d'exemple, l'application de certaines règles de transformations syntaxiques et en absence d'un contrôle sémantique, l'équation $x^2 - 1 = |x + 1|$ aurait pour ensemble de solutions $\{-1,0,2\}$ qui contient des éléments qui ne satisfont pas l'équation de départ. Ceci illustre la nécessité de pouvoir articuler les points de vue sémantique et syntaxique pour la résolution des équations ou inéquations.

III. CROISEMENT DES PRAXÉOLOGIES MATHÉMATIQUES ET DE LA DIALECTIQUE SYNTAXE / SÉMANTIQUE : RÉSULTATS SUCCINTS D'UNE ÉTUDE DU PROGRAMME ET DE MANUELS TUNISIENS

Le modèle d'analyse praxéologique (Chevallard 1998) décrit une organisation pouvant se construire en classe de mathématique. Le bloc (tâche, technique) représente le savoir faire et ce dernier fait appel au savoir restreint formé par une technologie justifiant la technique, qui à son tour est éclairée par une théorie, ce qui constitue le bloc (technologie, théorie).

Afin de s'inscrire dans le cadre de notre problématique, nous avons procédé à l'étude des programmes et des manuels scolaires[2] dans l'environnement équation, inéquation et fonction, en articulant l'analyse praxéologique avec les dimensions syntaxe / sémantique, registres de représentations sémiotiques (Duval 1991) et le niveau de mise en fonctionnement des connaissances (Robert 1998).

Ce qui nous a conduit à utiliser une grille d'analyse bidimensionnelle, telle que présentée ci- dessous.

Technique /Tâche[3] ***NMFK***[4]	***Sémantique***	***Syntaxique***	***Mixte***[5]
Elémentaire	Vérifier/ numérique-graphique	Factoriser/algébrique	Résoudre/numérique-algébrique
Mobilisable	Interpréter/graphique-algébrique	Montrer/graphique	Etudier et représenter / algébrique-analytique-graphique
Disponible	Existence/analytique-graphique	Discuter/algébrique	Conjecturer/numérique-algébrique-graphique

Tableau 1 *– Grille d'analyse*

---

[2] Remarquons qu'il n'y a qu'un seul manuel pour chaque section d'un niveau d'enseignement.
[3] Nous entendons par type de technique correspondant à un type de tâche bien déterminé.
[4] Niveau de mise en fonctionnement des connaissances.
[5] Les techniques sont supposées mixtes lorsqu'elles mobilisent, dans le traitement des objets mathématiques, à la fois les deux points de vue syntaxique et sémantique.

En dépit du fait que le bloc (technologie, théorie) n'apparaît pas explicitement dans cette grille, nous avons fait le choix de l'entendre comme étant un ensemble de résultats généraux permettant de justifier et d'entreprendre le contrôle sémantique.

A l'issus de l'étude, il s'avère que :

- Le traitement des équations, inéquations dans les rubriques exercice d'application et problèmes de synthèse, sollicite le plus souvent l'usage de techniques d'ordre syntaxique. En revanche, les activités d'introduction (souvent données sous forme de problèmes de modélisation ou de situations graphiques) prennent en compte d'une façon quasi-totale, l'articulation syntaxe/sémantique.
- L'articulation entre équation d'une courbe / représentation graphique et notion de fonction $y = f(x)$ / Courbe associée à f d'une part, et la notion de relation $R(x, y) = 0$ / conique, d'autre part n'est pas clairement explicitée. On pourrait se demander si les élèves seront en mesure de procéder, d'une manière autonome, au contrôle sémantique souhaité dans l'exemple introductif.
- L'introduction des fonctions s'appuie sur des techniques d'ordre sémantique de substitution, interprétation, etc. (Chevallard 1989)

IV. COMPLEMENT D'INVESTIGATION

Afin de tenter de mieux cerner le rapport implicite des enseignants et des élèves à l'articulation syntaxe / sémantique, nous avons conduit une étude du terrain via d'une part, des entretiens semi-directifs en direction des enseignants et d'autre part, d'un questionnaire[6] à destination d'élèves du secondaire et d'étudiants des classes préparatoires.

1. Entretiens avec des enseignants

Une partie des entretiens semi-directifs, réalisée avec six enseignants[7], vise à dégager ce que les enseignants pensent de la mobilisation des points de vue sémantiques et syntaxiques dans le processus enseignement et apprentissage des savoirs mathématiques dans l'environnement équation, inéquation et fonction.

Les questions posées dans cette partie des entretiens étaient d'ordre professionnel et ont été construites à partir des résultats de l'analyse des programmes et des manuels scolaires pour voir ce que les enseignants utilisent comme outils pour traiter les équations du premier et du second degré.

Nous présentons ci-dessous des extraits de réponses, aux différentes questions posées aux enseignants interviewés[8].

[6] Ce questionnaire a été élaboré dans le cadre d'une recherche que nous avons conduit dans notre travail de thèse et a été proposé à 105 élèves du secondaire et à 38 étudiants des classes préparatoires aux études d'ingénieurs (Kouki, 2008).

[7] Ces entretiens ont été réalisés au laboratoire de l'audio-visuel, à l'Institut Supérieur de l'Education et de la Formation Continue à Tunis, qui nous semble être un lieu qui permet de préserver la convivialité et la confidentialité.

[8] Les enseignants étaient interviewés suivant un guide d'entretiens dont la première partie vise à dégager le point de vue du praticien sur les enjeux et les spécificités d'une situation d'enseignement proposée à un groupe d'élèves et qui ne fait pas partie de l'objet de cette communication.

Question / *Enseignant*	**Quelles sont les règles de résolutions que vous énoncez aux élèves ?**	**Comment introduisez-vous le second degré ?**	**Comment amener les élèves à ne pas se lancer automatiquement dans un travail algorithmique ?**	**Explicitez-vous les vérifications ?**
Ens 1	*… avant tout, il faut chercher le domaine de validité*	*… des équations du second degré qu'on factorise … faire la forme canonique pour delta*	*…dans l'exemple $x^2 - 5 = 0$ ce n'est pas la peine de faire delta*	*…bien sûr ils doivent vérifier !*
Ens 2	*… s'assurer que chaque solution est bien dans le domaine*	*… je ne peux pas vous répondre*	*… à la fin euh ! la vérification…*	*… ah ! oui, oui*
Ens 3	*… il faudra ramener l'équation au type $ax = b$ par exemple …*	*… écrire sous la forme canonique pour delta*	*… phrases mathématiques avec sens*	*… pas tout le temps*
Ens 4	*… ne pas apprendre des algorithmes*	*… il vaut mieux le faire à l'aide de cas particuliers*	*… lorsqu'on donne $\|x-5\| = -2$ là on travaille sur le sens de l'équation*	*… logiquement c'est à la dernière étape*
Ens 5	*… savoir comment manipuler les techniques de résolution !*	*… introduit le second degré en en utilisant la factorisation…*	*… des problèmes de la vie courante*	*… vérifier à la fin de la résolution*
Ens 6	*… faire attention à l'univers*	*… on introduit par exemple la surface d'un rectangle dont les côtés vérifient une relation bien particulière.*	*… interpréter correctement*	*… pas de manière systématique*

Tableau 2 – *Extraits de réponses des enseignants*

Nous pouvons dire que certains enseignants favorisent l'outil syntaxique de résolution au profit de l'outil sémantique. Ces enseignants déclarent recourir aux techniques de contrôle et de vérification qu'ils appliquent parfois à la fin de la résolution. D'autres, appuient la mobilisation de l'outil sémantique et son articulation avec le syntaxique, dans les résolutions. Ces derniers ont soulevé les questions d'interprétation des écritures mathématiques et de l'univers du discours, cette interprétation pouvant faire appel à un travail dans un ou plusieurs registres.

La question de sens semble être une notion assez complexe et les réponses des enseignants sont totalement différentes. En effet, il y a ceux qui pensent que le sens est intra-mathématique et se justifie par un travail sur la vérification, contrôle, contres exemples etc. D'un autre côté, il y a ceux qui pensent que le sens se donne aux objets mathématiques en travaillant dans un niveau extra-mathématiques par l'introduction de situations faisant intervenir des savoirs issus d'autres champs disciplinaires.

2. *Cas de résolution d'une inéquation produit*

Afin de dégager dans quelle mesure les deux aspects syntaxique et sémantique cohabitent, lorsque les élèves du secondaire et les étudiants de classes préparatoires sont en situation de résolution, nous avons proposé un questionnaire[9] dans lequel nous avons introduit quatre exercices faisant référence à des objets mathématiques croisant des écritures fonctionnelles et équationnelles, des résolutions graphiques et numériques.

L'analyse mathématique et didactique des différentes stratégies de résolution, dans le traitement des tâches proposées, s'est appuyée sur la grille mentionnée précédemment, aussi bien au niveau a priori qu'a posteriori.

Dans le cadre de cette communication, nous avons fait le choix de se limiter à présenter les résultats concernant l'exercice n°4.

Cet exercice vise à déterminer l'ensemble des solutions de l'inéquation produit de deux variables réelles $(y-x)(y-x^2+3x)>0$, dont voici l'énoncé détaillé.

Soient f et g les fonctions définies sur IR par : $f(x)=x$ et $g(x)=x^2-3x$.

Soient Γ_f et Γ_g les courbes représentatives de f et g dans un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Représenter Γ_f et Γ_g dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2) Déterminer le signe de $h(x,y)=(y-x)(y-x^2+3x)$ dans chacun des cas suivants :

$$(x,y)=(2,1);(x,y)=(1,3);(x,y)=(5,4);(x,y)=(-2,-1);(x,y)=(-1,-2);(x,y)=(6,7)$$

3) Placer, dans $(O,\vec{i},\vec{j})$, les points A,B,C,D et F de coordonnées respectives : $(2,1)$, $(1,3)$, $(5,4)$, $(-2,-1)$, $(-1,-2)$ et $(6,7)$.

4) Déterminer, par le calcul ou graphiquement, l'ensemble des solutions de l'inéquation : $(y-x)(y-x^2+3x)>0$.

Seules les questions 1 et 4 ont été proposées aux étudiants des classes préparatoires. Effet, les question 2 et 3 visent à enrichir le milieu matériel des élèves du secondaire par des éléments indicateurs qui pourraient les conduire à changer du registre algébrique au registre graphique afin de visualiser les différentes régions du plan déterminées par les deux représentations graphiques Γ_f et Γ_g d'un côté, et d'interpréter la masse des différents points A,B,C,D et F dans chaque région du plan considéré afin de répondre à la quatrième question, d'un autre côté. Par ailleurs, les étudiants des classes préparatoires, nous estimons qu'ils disposent d'acquis leurs permettant de résoudre l'inéquation en s'appuyant uniquement sur les graphes Γ_f et Γ_g qui partagent le plan considéré.

L'analyse a priori des trois premières questions montre que les élèves peuvent mobiliser différents types de techniques articulant différents registres algébriques, analytiques numériques et graphiques pour répondre aux tâches intermédiaires.

Cependant, la réponse à la quatrième question, soit la résolution de l'inéquation $(y-x)(y-x^2+3x)>0$ ne peut se faire qu'en associant les équations de droite $y-x=0$ et de la parabole $y-x^2+3x=0$ aux graphes Γ_f et Γ_g (ces graphes se coupant à l'origine du repère orthonormée $(O,\vec{i},\vec{j})$ et au point de coordonnées $(4,4)$).

[9] Ce questionnaire d'une durée d'une heure et demie a été réalisé dans quatre établissements de l'enseignement secondaire tunisien et un institut préparatoire aux études d'ingénieurs.

La droite d'équation $y-x=0$ partage le plan en deux demi-plans dont le demi plan ouvert supérieur est celui des points $M(x,y)$ tels que : $y-x>0$ et l'intérieur de la parabole est l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $y-x^2+3x>0$. Le signe de la relation $(y-x)(y-x^2+3x)$ est déterminé dans la figure ci-dessous.

Régions	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
$y-x$	-	-	$+$	$+$	$+$
$y-x^2+3x$	-	$+$	$+$	-	-
$(y-x)(y-x^2+3x)$	$+$	-	$+$	-	-

Signe de $(y-x)(y-x^2+3x)$ dans différentes régions du plan

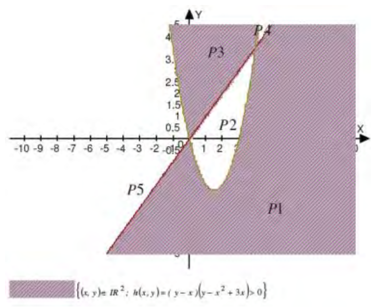

***Figure 1** – Ensemble des solutions*

En conclusion, l'ensemble des solutions de l'inéquation est la région $P_1 \cup P_3$ (Figure 1).

L'analyse a priori de la quatrième question montre que les élèves et les étudiants disposent de trois types de techniques :

- La première technique t_1 du type mixte consiste à interpréter graphiquement le signe des deux expressions algébriques $y-x$ et $y-x^2+3x$ et à conclure que le produit est strictement positif dans la région $P_1 \cup P_3$.
- La deuxième technique t_2 du type sémantique articulant les registres graphique et algébrique consiste à affecter le signe de $h(x,y)$ à chaque point placé dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ et de déduire par la suite qu'ils sont les points de la région $P_1 \cup P_3$.
- La troisième technique t_3 est une technique purement syntaxique du registre algébrique qui consiste à faire des tentatives de développement et de transformation de la forme de l'inéquation $(y-x)(y-x^2+3x)>0$ qui s'avère inopérantes.

L'analyse du corpus formé de 105 copies d'élèves montre que dans les trois premières questions, les élèves ont recours à différents types de techniques sémantiques, syntaxiques et mixtes dans les registres algébrique, graphique et numérique. Ceci montre qu'une bonne partie des élèves articulent les objets fonction linéaire, fonction trinôme et courbe.

D'un autre côté, la quasi-totalité des 38 copies d'étudiants présentent des réponses correctes à la première question.

Concernant la réponse à la dernière question, les résultats du dépouillement montrent que 76 copies, soit environ 53,1% de la population n'ont pas donné de réponses. En particulier, les élèves qui mobilisent prioritairement des techniques syntaxiques ne donnent le plus souvent pas de réponses.

Les techniques syntaxiques du registre algébrique sont majoritairement dominantes avec 28 réponses parmi 67 et ne contiennent aucune réponse exacte. Les techniques du type sémantique du registre graphique sont au nombre de 18 et contiennent 4 bonnes réponses et les deux techniques mixtes mobilisées étaient correctes. Enfin les réponses qui n'ont aucun lien avec l'exercice sont classées dans les autres types de réponses.

Le travail sur les trois exercices conforte ces résultats et montre que les élèves mobilisent les techniques syntaxiques de résolution dès qu'elles sont disponibles même si le milieu est enrichi par des questions intermédiaires faisant appel à des traitements graphiques ou numériques du type sémantique. D'autre part, nous avons remarqué qu'un pourcentage assez élevé d'élèves et d'étudiants ne mobilise l'outil sémantique de résolution que si le type de tâche demandé l'impose. D'un autre côté, une différence assez remarquable entre les procédures de résolution des exercices du questionnaire entre les élèves du même niveau nous fait penser qu'elle pourrait être liée à la pratique des enseignants en classe.

V. CONCLUSION

L'approche logique via la référence à la notion de phrase ouverte et sa satisfaction permet de cerner les difficultés que pourraient rencontrer les élèves dans l'environnement équation, inéquation et fonction.

Les analyses didactiques ont montré, du côté institutionnel, la pertinence de la prise en compte de l'articulation entre le point de vue sémantique et syntaxique, qui relève d'un niveau logico-mathématique, pour enrichir les catégorisations d'analyse proposées par Chevallard d'une part, et la place du point de vue sémantique dans des situations où le raisonnement purement syntaxique est inopérant.

L'articulation entre les équations, courbes et fonctions, étant un moyen de prendre en charge la nécessité du recours sémantique, n'est pas explicitement pris en charge par les programmes, les manuels.

Une étude articulant les éléments de notre réflexion en didactique, et principalement en matière de raisonnement mathématique, avec les pratiques enseignantes pourrait nous renseigner davantage sur les priorités des apprentissages, les manques ainsi que les opportunités qui pourraient s'offrir.

Enfin, nous pensons que l'investigation des mêmes notions d'équation, inéquation et fonction dans des domaines autres que le domaine numérique, qui apparaissent dans l'avancée du cursus serait prometteuse pour les analyses didactiques. Nous faisons l'hypothèse que les difficultés s'amplifient au niveau de l'université (Ghedamsi, 2008), où le travail algébrique sur les fonctions, développements limités, équations différentielles se complexifient. À ce niveau d'enseignement, la pensée sémantique et la rationalité mathématique occupent une place importante pour réussir le traitement des objets mathématiques.

RÉFÉRENCES

Akkus O., Cakiroglu E. (2010) The effects of multiple representations-based instruction on seventh grade students' algebra performance. *Proceedings CERME* 6, 420 – 429.

Alcock L. (2009) Teaching Proof to Undergraduates: Semantic and Syntactic Approaches. *ICMI Study* 19, 29-35.

Back R.-J., Mannila L., Wallin, S. (2010) Student justifications in high school mathematics. *Proceedings CERME* 6, 291-300.

Chellougui F. (2004) *L'utilisation des quantificateurs universel et existentiel en première année universitaire entre l'explicite et l'implicite*. Thèse de doctorat. Université Lyon 1.

Chevallard Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège – deuxième partie : perspectives curriculaires : La notion de modélisation. *Petit x* 12, 43-72.

Chevallard Y. (1992) Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 12 (1), 73-112.

Chevallard Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. In Noirfalise R. (Ed.) (pp. 91-120) *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques* – Acte de l'Université d'été de la Rochelle. Ed IREM de Clermont-Ferrand.

Durand-Guerrier V. (1999) L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit x* 50, 57-79.

Durand-Guerrier V. et al. (2000) *Le statut logique des énoncés dans la classe de mathématiques : éléments d'analyse pour les enseignants*. Lyon : IREM.

Durand-Guerrier V., Arsac G. (2003) Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Spécificité de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherche en didactique des mathématiques* 23(3), 295-342.

Durand-Guerrier V., Arsac G. (2005) An epistemological and didactic study of a specific calculus reasoning rule. *Educational Studies in Mathematics* 60 (2), 149-172.

Durand-Guerrier V. (2008) Truth versus validity in mathematical proof. *ZDM The International Journal on Mathematics Education* 40/3, 373-384.

Duval R. (1991) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives* 5, 37-65.

Duval R. (1998) Écarts sémantiques et cohérence mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 1, 7-25.

Frege G. (1971) *Ecrits de logique et philosophiques*. Paris : Seuil.

Ghedamsi I. (2008) *Enseignement du début de l'analyse réelle à l'entrée à l'université : Articuler contrôles pragmatique et formel dans des situations à dimension a-didactique.* Thèse de doctorat. Université Bordeaux 2.

Kouki R. (2006) L'articulation syntaxe / sémantique au cœur des analyses didactique au niveau de l'algèbre élémentaire. In Bedard N., Mary C. (Eds) (cédérom) *L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés.* Sherbrooke: Éditions du CRP.

Kouki R. (2006) Équations et inéquations au secondaire entre syntaxe et sémantique. *Petit x* 71, 7-28.

Kouki R. (2008) *Enseignement et apprentissage des équations, inéquations et fonctions au secondaire : entre syntaxe et sémantique*. Thèse de doctorat. Université Claude Bernard Lyon1.

Kouki R. (2009) Le raisonnement logique pour assurer un enseignement de la pensée mathématique : Le cas des équations et des fonctions algébriques. In Kuzniak A, Sokhna M (Eds.) (pp. 1221-1240) *Enseignement des mathématiques et développement: enjeux de société et de formation*. Dakar : Revue internationale francophone.

Ouelbani M. (1992) *Le projet constructionniste de Carnap*. Tunis : Faculté des Sciences Humaines et Sociales de Tunis.

Quine W. V. O. (1972) *Methods of logic*. New York : Harvard University Press.

Quine W. V. O. (1977) *Le mot et la chose*. Paris : Flammarion.

Rivenc F. (1989) *Introduction à la logique*. Paris : Payot.

Robert A. (1998) Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 18 (2), 139-190.

Russell B. (1961) *Histoire de mes idées philosophiques*. Paris: Gallimard.

Selden J., Selden A. (1995) Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics* 29, 123-151.

Selden J., Selden A. (2011) The role of procedural knowledge in mathematical reasoning. In *Proceedings PME* 35 (Ed.) (pp. 145-152).

Tarski A. (1960) *Introduction à la logique*. Paris : Gauthier-Villars.

Tarski A. (1972) *Logique, sémantique, mathématique* : 1923-1944 (vol. 1). Paris : Armand Colin.

Tarski A. (1974) *Logique, sémantique, mathématique* : 1923-1944 (vol. 2). Paris : Armand Colin.

Vanderbrouck F. (2011) Students' conceptions of functions at the transition between secondary school and university. In *Proceedings CERME* 7 (sous presse).