LE CHALLENGE DE LA PENSEE STRUCTURALISTE DANS L'APPRENTISSAGE DE L'ALGEBRE ABSTRAITE : UNE APPROCHE EPISTEMOLOGIQUE

Thomas HAUSBERGER*

Résumé – Cette communication fournit une première ébauche d'analyse épistémologique de la pensée structuraliste en « algèbre moderne » (selon la terminologie de van der Waerden 1930) dans l'optique d'un travail didactique destiné à élucider les difficultés liées à l'apprentissage des structures algébriques abstraites (groupes, anneaux, corps, idéaux,...). On s'intéresse à la question des origines du structuralisme mathématique, des obstacles liés à son émergence, de ses caractéristiques en tant que style nouveau et catégorie de pensée mathématique, de ses techniques dans la pratique mathématique, de ses enjeux (mathématiques, épistémologiques, philosophiques, didactiques).

Mots-clefs : algèbre (abstraite, moderne), structures algébriques, épistémologie, philosophie des concepts, enseignement supérieur

Abstract – This communication contributes to a first draft of an epistemological analysis of structuralist thought in « modern algebra » (as denominated by van der Waerden 1930) with a view towards a didactic work aiming at clarifying the difficulties connected to learning abstract algebraic structures (groups, rings, fields, ideals,...). We focus on the question of the origins of mathematical structuralism, the obstacles connected with its emergence, its characteristics as a new style and a mathematical category of thought, its techniques in mathematical practice, its scope and challenges (on a mathematical, epistemological, philosophical and didactic point of view).

Keywords: algebra (abstract, modern), algebraic structures, epistemology, philosophy of concepts, higher education

Ce travail est basé sur les analyses des historiens (Cory 2004, Grattan-Guiness 2005, Wussing 2007) et des philosophes (Cavaillès 2008, Granger 1994, Lautmann 2006, Sinaceur 2005 et 2010) ainsi que sur l'expérience professionnelle de l'auteur en tant qu'algébriste-théoricien des nombres et enseignant d'algèbre en L3 à l'Université (Guin et Hausberger 2008). Certains points restent à développer (travail en cours) : la version actuelle de ce document tient alors lieu de programme de recherches. Ce travail débouchera ultimement sur une ingénierie qui se donne pour objectif une remédiation aux difficultés identifiées au niveau des apprentissages, remédiation utilisant le « levier méta » dans l'esprit des travaux de Dorier et al. (1997) sur l'enseignement de l'algèbre linéaire. Un tel choix est justifié par l'analyse épistémologique et discuté en fin d'article.

QUESTIONNEMENT EPISTEMOLOGIQUE

1. Sources et méthodologie

La première étude sur une structure algébrique est le fait de Wussing qui publia en 1969 son travail sur la génèse de la structure abstraite de groupe (voir Wussing 2007 pour une traduction en langue anglaise). Le livre de Cory *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures*, publié en 1996, constitue la synthèse la plus complète à ce jour.

Dans l'étude de l'évolution du visage de l'algèbre au tournant du XX^{e} siècle, les grands traités d'algèbre à examiner et comparer sont ceux de Serret, Jordan, Weber et van der Waerden (les références exactes sont données en fin d'article). L'évolution de certains de ces traités au cours de leurs différentes rééditions témoigne également des transformations en

*Institut de Mathématiques et de Modélisation de Montpellier, Université Montpellier 2, Case Courrier 051, Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier Cedex – France – thomas.hausberger@univ-montp2.fr

cours au sein de ce domaine des mathématiques. L'examen du Jahrbuch est un autre indicateur de cette évolution.

La synthèse de Cory comporte les défauts habituels du panorama : histoire un peu naïve et simpliste décrivant un grand mouvement vers les structures algébriques abstraites. Or sur cette « autoroute du structuralisme », on souhaiterait observer les petits chemins de traverse révélateurs de la science en acte, que seule une historiographie fine peut révéler. C'est un travail considérable que d'appliquer à la littérature mathématique de ce vaste champ de l'algèbre au tournant du XX^{e} siècle les méthodes historiques actuelles qui visent une échelle plus fine sous la forme d'une microhistoire des textes mathématiques. Dans l'attente des premiers résultats utilisant une telle méthodologie, nous ferons notre analyse épistémologique sur la base des synthèses historiques disponibles mais nous garderons à l'esprit que des choix ont opéré, présidant à la sélection des textes. Enfin, nos motivations ne sont pas celles de l'historien. Comme le dit Bachelard :

> C'est l'effort de rationalité et de construction qui doit retenir l'attention de l'épistémologue. On peut voir ici ce qui distingue le métier de l'épistémologue de celui de l'historien des sciences. L'historien des sciences doit prendre les idées comme des faits. L'épistémologue doit prendre les faits comme des idées, en les insérant dans un système de pensées. Un fait mal interprété par une époque reste un *fait* pour l'historien. C'est au gré de l'épistémologue un *obstacle* ou une *contre-pensée*. (Bachelard 1938, p. 17)

L'histoire des structures algébriques est sans conteste une histoire de concepts (groupes, anneaux, corps,...), les notions se situent dans une élaboration théorique standardisée au sein des manuels. Les questions que l'on se pose naturellement sont :

- Quels problèmes ou classes de problèmes ont présidé à l'élaboration de ces concepts ? Quels objets concrets et quelles méthodes sont liés à ces concepts ?
- Comment ces concepts ont-ils évolué ? Quels obstacles éventuels a-t-il fallu franchir ?
- Comment s'articulent-ils avec les concepts voisins ? Quelle place ont-ils au sein de l'élaboration théorique dans laquelle ils se situent ?

On peut alors espérer cerner la dynamique historique et la dynamique interne du domaine. Cependant, l'histoire des structures algébriques est une histoire de concepts à double titre : il s'agit d'une « mathématique conceptuelle » selon les termes des mathématiciens eux-mêmes qui font preuve d'un recul réflexif et prônent un nouveau mode de pensée pour aborder les problèmes. En définitive, il s'agira également d'aborder les questions suivantes :

- Qu'est-ce qui caractérise ce mode d'élaboration théorique ? En quoi est-il nouveau ? Quelles sont ses origines et qu'est-ce qui a motivé sa mise en place ?
- Quelle est la place et la portée effective de la pensée structuraliste dans la pratique mathématique ?

2. *Quelques repères historiques et épistémologiques sur les structures algébriques*

L'algèbre désigne traditionnellement un ensemble d'idées et de techniques mathématiques associés à la manipulation formelle de symboles abstraits, en lien avec la résolution des équations. L'algèbre moderne est née de ce terreau mais se caractérise par un changement de perspective (de paradigme ?) qui se traduit par une restructuration-refondation mathématique de son champ et une diffusion de ses méthodes à d'autres branches des mathématiques. Ces dernières se trouvent ainsi unifiées et participent de la filiation de l'algèbre moderne (arithmétique et géométrie notamment, plus tardivement en topologie). C'est le résultat d'un processus d'abstraction qui historiquement présente différentes étapes identifiables.

Les groupes de substitution apparaissent comme des outils pour décider de la résolubilité par radicaux des équations et mettre en œuvre cette résolution par extraction successive de racines (travaux de Galois). Le premier emploi du mot groupe est proche de son sens commun de regroupement d'éléments, aucune définition n'est donnée. Les groupes s'autonomisent progressivement en tant qu'objets d'étude indépendamment du contexte de la résolution des équations, mais un grand nombre de notions de théorie des groupes (groupe distingué, groupe simple, suite de décomposition) sont directement reliés à cette application. Pour Jordan, les groupes de substitution et leurs quotients ne font pas partie de la même théorie (c'est Hölder qui mettra au point les groupes quotients et montrera que les groupes distingués sont la bonne notion pour faire des quotients, aboutissant au résultat connu actuellement sous la dénomination « théorème de Jordan-Hölder »).

L'origine des groupes abéliens se situe en arithmétique avec les travaux de Gauss sur la composition des formes présentés dans ses *Disquisitiones arithmeticae*. Une chaine logique de développement conduit jusqu'à l'axiomatisation (implicite) par Kronecker des groupes abéliens finis (sans prononcer le mot groupe, Kronecker ne faisant pas le lien avec les groupes de substitutions ; cependant, cela ne tardera pas et sera réalisé par son étudiant Netto) et la démonstration de leur théorème de structure.

L'évolution historique du concept de groupe s'est faite en relation avec ses domaines d'application. La communauté mathématique ne s'est emparée du concept de groupe abstrait, issu des travaux de Cayley autour de la notion de générateur, qu'après l'apparition des groupes dans d'autres contextes : outre en arithmétique, celle des groupes de transformation et la reconnaissance du rôle des groupes dans l'unification des géométries (programme d'Erlangen de Klein). Un facteur favorable est à trouver dans les papiers de Boole sur l'algèbre formelle qui contribue à installer un point de vue abstrait sur l'algèbre. L'idée que deux groupes isomorphes sont essentiellement les mêmes a pu alors émerger et van Dyck met au point la présentation par générateurs et relations (en quotientant le groupe libre) dans le but d'unifier les trois sources historiques des groupes autour d'une même présentation. La reconnaissance de son rôle central en mathématiques a permis le développement de la structure de groupe, première structure algébrique abstraite, ceci avant le début du XX^{e} siècle.

Cette transition vers la structure abstraite de groupe est l'une des causes et également l'une des conséquences de la méthode axiomatique en mathématiques prônée par Hilbert : d'une part, l'acceptation de la présentation axiomatique des mathématiques en relation avec la question des fondements, la théorie des ensembles fournissant la base de l'édifice ; d'autre part, l'utilisation de l'axiomatique comme un outil pour une présentation plus commode et intelligible d'un contenu structuré, à même d'isoler de l'ensemble des propriétés des objets étudiés celles qui découlent du fait que ces derniers vérifient les axiomes de groupe. Kronecker n'a pas fait le lien entre les groupes de permutation et sa présentation des classes modulo un entier car il ne poursuivait pas un tel objectif.

L'unification produite a lieu sous différents niveaux : au premier niveau une même théorie (la théorie des groupes) s'applique à des objets de nature différentes. A un niveau supérieur, la présentation axiomatique des structures algébriques permet un traitement unifié de ces différentes structures, mettant en avant les ponts entre ces structures, sans même développer une méta-théorie de ces structures. C'est le point de vue novateur du traité de van der Waerden, par rapport aux traités antérieurs, hérité du style de Emmy Noether. C'est ce traitement unifié des structures qui marque l'avènement de la pensée structuraliste et transforme l'algèbre en une discipline dédiée à l'investigation de ces structures (à propos desquelles l'on se pose le même type de questions que l'on cherche à résoudre avec le même type d'outils. Les origines de la pensée structuraliste remontent à Galois, dont la mise en forme des idées a été l'un des moteurs comme le montre le traité de Weber. Cependant, sa mise en forme jusqu'à la présentation actuelle est le fruit d'un long processus de conceptualisation.

« Mathématique conceptuelle » est le terme utilisé par un certain nombre de mathématiciens allemands des XIX^{e} et XX^{e} siècles (Riemann, Hasse, Dedekind, Hilbert, Emmy Noether) pour caractériser leur méthode de travail, focalisée sur les formations de concept, et que certains historiens font remonter à Gauss. La pensée structuraliste se caractérise donc, plus que par le type d'objet étudié, par une méthodologie et un style spécifique, qui font école (d'où également des aspects sociologiques) à Göttingen autour de Noether. Sinaceur (2010) montre que l'œuvre d'Emmy Noether remplit les critères, formulés par Hacking, d'un style au sens des historiens et philosophes. Cette école change la manière de prouver en privilégiant les preuves générales limitant les calculs et mettant en avant les concepts. Définir des concepts a pour objectif de reconstruire un domaine sur une nouvelle base, sur la base de concepts plus fondamentaux, plus généraux et plus « simples ».

> Il faut s'appliquer à réduire un domaine mathématique à ses concepts fondamentaux les plus généraux, donc les plus simples, puis à construire et à reconstruire à l'aide de ces seuls concepts. (Hasse 1930)

Il s'agit donc d'une refondation mathématique (et non philosophique). Cette reconstruction apporte une vision nouvelle de la matière mathématique et ouvre la voie à des constructions inédites, de nouveaux objets. Ces concepts permettent de constituer la théorie d'un domaine, c'est-à-dire de distinguer les propriétés transférables ou généralisables à d'autres domaines de celles qui ne le sont pas. Sous la plume de Noether, concepts et structures souvent se confondent. Les structures algébriques sont donc le fruit d'un projet mené par des mathématiciens portant une conception particulière des mathématiques adoptée suite à une réflexion sur leur propre activité. La pensée structuraliste va de paire avec un questionnement méta-mathématique, dont l'on peut trouver des traces, outre au sein des correspondances entre mathématiciens, au niveau des préfaces des traités et manuels[1].

Le mot corps apparaît pour la première fois sous la plume de Dedekind (consulter Dedekind 2008, *Sur la Théorie des nombres entiers algébriques*), pour désigner un corps de nombres, c'est-à-dire une extension finie des rationnels, simultanément avec la définition axiomatique d'un idéal. Il prolonge ainsi les travaux de Kummer qui a introduit des « nombres idéaux » afin de pallier la non-unicité de la décomposition en produit de nombres premiers dans le cas de certaines extensions cyclotomiques. Dedekind montre et souligne le parallèle avec le concept de coupure. Les corps finis ont une origine, double, de provenances très différentes : d'une part les congruences polynomiales de Gauss et d'autre part les travaux de Galois (d'où la notation GF pour Galois Fields). C'est Weber qui en 1891 fait le premier le

---

[1] Ceux de l'époque, bien sûr, les manuels actuels ont en général totalement naturalisé le style bourbakiste et se gardent de tout commentaire méta-mathématique. A propos de ce que les mathématiciens laissent transparaitre des idées non formelles ou formalisées qui guident parfois leurs démarches, il est intéressant de citer André Weil, un des membres fondateurs de Bourbaki : « Les lois non écrites de la mathématique moderne interdisent en effet de publier des vues métaphysiques de cette espèce. Sans doute est-ce mieux ainsi ; autrement, on serait accablé d'articles plus stupides, sinon plus inutiles, que tous ceux qui encombrent à présent nos périodiques. » (*De la métaphysique aux mathématiques*, Œuvres t. II, p. 410). Weil regrette en fait que Hilbert n'ait publié ses résultats sur l'analogie entre ce que nous appelons de nos jours corps de fonctions et corps de nombres. « Rien n'est plus fécond, tous les mathématiciens le savent, que ces obscures analogies, ces troubles reflets d'une théorie à une autre, ces furtives caresses, ces brouilleries inexplicables ; rien aussi ne donne plus de plaisir au chercheur. Un jour vient où l'illusion se dissipe ; le pressentiment se change en certitude ; les théories jumelles révèlent leur source commune avant de disparaitre ; comme l'enseigne la Gita, on atteint à la connaissance et à l'indifférence en même temps. La métaphysique est devenue mathématique, prête à former la matière d'un traité dont la beauté froide ne saurait plus nous émouvoir. » (loc. Cit. p.408). Depuis Bourbaki, la règle est suivie : la méta-mathématique non mathématique semble réservée aux philosophes.

lien entre les corps finis et les corps de nombres. Pour autant, la théorie abstraite des corps sera investiguée par Steinitz en 1910, influencé par l'arrivée d'une nouvelle sorte de corps : les corps p-adiques issus des travaux de Hensel. Steinitz classifie les corps à l'aide de la notion de caractéristique et de corps premier. Le terme anneau est introduit par Hilbert en 1900, synonyme (à la suite de Dedekind qui parle plutôt d'ordre) d'anneau des entiers des corps de nombres, sans lien avec la notion de groupe ou de corps, et sans dresser de parallèle avec les anneaux de polynômes. Cette étape sera franchie par Noether en 1921 dans un article sur la factorisation des idéaux dans les anneaux abstraits, mettant en avant le rôle de la condition de chaines. L'idée des structures algébriques comme principe unificateur est absent des écrits de Hilbert et coïncide bien avec l'apport de Noether.

Les Elements de Bourbaki peuvent être regardés comme une tentative d'étendre à l'ensemble des mathématiques la vision unificatrice de van der Waerden autour de la notion de structure, comme en témoigne le manifeste *L'architecture des mathématiques* (Bourbaki 1948). Il définit mathématiquement la notion de structure mais n'en fait aucun usage mathématique : en quelque sorte, Bourbaki a « loupé le coche » de la théorie des catégories, introduite par Mac Lane et Eilenberg, qui constitue une véritable méta-théorie mathématique des structures. Mais l'influence de Bourbaki est indéniable dans le développement d'une conception structuraliste des mathématiques.

QUESTIONNEMENT DIDACTIQUE

1. Une situation où les outils didactiques classiques sont inopérants

Si l'on se réfère à la théorie des situations de Brousseau (1986), il est important d'introduire une situation-problème à même de faire émerger le nouveau concept. Ce dernier apparaît comme l'outil approprié pour résoudre le problème et son étude comme objet peut se poursuivre selon une dialectique outil-objet (Douady 1986) à même de montrer que les mathématiciens construisent leurs concepts et ceci afin de répondre à des problèmes précis.

Dans le cas de la structure de groupes, le problème de la résolution des équations est très complexe : la théorie de Galois ne fait pas partie du programme officiel des connaissances exigibles à l'Agrégation de Mathématiques en France. C'est dommage car cette belle théorie met clairement en évidence l'apport d'une présentation unifiée des structures, justifiant des notations similaires dans des contextes a priori différents (par exemple, l'indice d'un sous-groupe et le degré d'une extension de corps). D'autre part, la géométrie est présentée en adoptant une axiomatique à base d'espaces vectoriels et non comme l'étude des invariants sous l'action d'un groupe dans l'esprit du programme d'Erlangen. En définitive, si des exemples de groupes sont donnés dans les différents domaines mathématiques dont les groupes sont issus, la force du concept de groupe n'est pas illustrée par un enseignement même introductif aux deux grandes théories qui ont motivé dans l'histoire l'introduction du concept de groupe abstrait. L'introduction d'une situation-problème appropriée s'avère difficile, d'autant plus que les contextes d'émergence de la structure de groupe sont multiples et que c'est justement son pouvoir unificateur qui en fait la force. A l'issue d'un cours de théorie des groupes, les étudiants se posent toujours la question : « à quoi ça sert ? » et ne comprennent pas les enjeux de cette montée vers l'abstraction.

Au sein d'un cours d'histoire et épistémologie en Master, contexte approprié à un recul réflexif, l'auteur de cet article a posé les questions suivantes aux étudiants :

a) Donner des exemples de groupes qui sont isomorphes mais proviennent de domaines différents et variés des mathématiques. Comment démontrez-vous qu'ils sont isomorphes ?

b) Qu'est-ce qu'un « groupe abstrait » ? En quoi est-il abstrait ? Donner des exemples ainsi que des réalisations concrètes de ces groupes abstraits.

c) Citer des applications de la théorie des groupes qui sont extérieurs à la théorie des groupes.

d) A votre avis, quelles motivations conduisirent les mathématiciens à développer une théorie abstraite des groupes ?

Parmi les réponses obtenues à la première question figurent le théorème chinois et un isomorphisme via la fonction exponentielle entre les structures additives et multiplicatives sur les réels, deux exemples relevant du même domaine, celui des nombres. Les quelques élèves qui ont fourni une des réponses attendues, à savoir un isomorphisme entre le groupe des isométries du rectangle et Z/2ZxZ/2Z, sont incapables de le justifier en avançant une caractérisation abstraite de ce groupe par la propriété d'être engendré par deux éléments d'ordre deux qui commutent. Aucun étudiant ne s'est révélé capable de fournir une réponse aux trois autres questions, à part mentionner qu'un corps est un groupe.

Ce cas de figure n'est pas nouveau : les structures algébriques font partie des savoirs identifiés par les didacticiens, sur un plan épistémologique, comme des FUGS[2], c'est-à-dire des concepts formalisateurs, unificateurs, généralisateurs, simplificateurs (Robert 1987). Les difficultés liées à l'apprentissage de ces concepts peuvent être analysées comme une conséquence de leur nature FUGS (Rogalski 1995) :

Du point de vue de la dialectique outil-objet, les savoirs FUGS sont objets avant d'être outils. L'enseignement classique de ces savoirs, que ce soit l'algèbre linéaire (pris pour exemple par Rogalski en s'appuyant sur les travaux de Dorier et al. 1997) ou l'algèbre générale qui nous occupe ici, débute ainsi par une présentation axiomatique. Les tentatives de mise en place de problèmes à même de faire apparaître les concepts d'algèbre linéaire comme des outils pertinents échouent car il existe toujours des méthodes de résolution plus simples et plus directes, au cas par cas. Bref, les domaines unifiés par l'algèbre linéaire s'étudient indépendamment, de manière élémentaire, sans algèbre abstraite. L'aspect outil de l'algèbre linéaire apparaît tardivement dans l'exposition de la théorie, lorsque ressortent les caractéristiques FUGS de cette dernière.

En ce qui concerne les situations fondamentales, à même de donner du sens aux concepts FUGS, elles seront nécessairement très riches, impliquant différents domaines, différents points de vue. Il en résulte de grandes difficultés didactiques à les mettre en œuvre et l'on peut douter qu'elles réussissent vraiment à jouer le rôle attendu pour l'apprentissage. De plus, la construction de situations se heurte à l'obstacle déjà soulevé : la majorité des problèmes d'un niveau raisonnable peuvent être résolus sans algèbre linéaire abstraite. On ne comprend pas pourquoi les savoirs FUGS constituent une meilleure solution que les méthodes élémentaires sans se placer à un niveau supérieur d'organisation (de la théorie et des activités dédiées à l'apprentissage : ce ne sont pas des situations d'introduction mais des « situations réflexives » a posteriori permettant de cerner le caractère FUGS de ces concepts qui pourront être porteuses de sens et motiver auprès de l'apprenant la montée vers l'abstraction. Voir paragraphe suivant).

[2] Certains auteurs enlèvent le S ; sans doute la citation de Hasse en p. 4 de ce texte ne convainc pas tout le monde...

Quant à la dévolution, Rogalski fait l'hypothèse que c'est « une problématique plus qu'un problème qu'il s'agit de dévoluer à l'étudiant » afin que celui-ci soit « en état de comprendre – et d'accepter – le rôle du détour théorique formel et généralisateur comme une réponse à tout un champ de problèmes et de questionnements qui se ressemblent... alors qu'ils ne le savent pas ». C'est une rupture culturelle et un changement du contrat didactique, étant donné que les activités mathématiques antérieures sont souvent menées dans l'esprit de la dialectique outil-objet. Se pose alors la question de l'organisation didactique de la dévolution de cette problématique. Nous discuterons plus loin des choix opérés concernant l'enseignement de l'algèbre linéaire.

Si l'importance de la prise en compte du caractère FUGS de certains savoirs est soulignée par les didacticiens, les travaux didactiques dans le supérieur se limitent essentiellement à l'algèbre linéaire[3]. Nous allons évoquer les expérimentations menées et proposer des angles d'approche pour le cas des structures algébriques.

2. *L'apport du levier méta et autres stratégies en synergie*

Dorier, Robert, Robinet et Rogalski (Rogalski 1995, Dorier et al. 1997) ont construit leur expérimentation sur trois piliers :

- le recours au levier « méta » (introduit dans Robert et Robinet 1993) par la création de situations réflexives mêlant activités mathématiques et réflexions de nature plus épistémologique, dans le but de déclencher une prise de conscience de l'utilité de ces concepts abstraits et généraux (rôle des axiomes, etc.), d'en éclairer la nature particulière et d'en faciliter l'appropriation par un recul réflexif sur les méthodes en jeu dans les résolutions de problèmes-types ;
- la construction d'ingénieries longues, se donnant le temps de construire des savoirs préalables à unifier (consolidant également les prérequis), de les relire dans la théorie unifiée, enfin de mettre en avant des nouveaux problèmes inaccessibles auparavant (noter le caractère non-linéaire, par rapport à un enseignement classique, à travers les reprises et changements de point de vue) ;
- l'utilisation des changements de points de vue comme moteurs d'unification. Par exemple, la notion de rang peut concerner une famille de vecteurs, une application linéaire, une matrice ou un système d'équations linéaires. Le passage de l'un à l'autre est un changement de point de vue qui s'exprime à travers un théorème. L'algèbre linéaire fourmille de tels procédés qui mettent souvent en jeu des changements de cadre (géométrique, algébrique, numérique,...) ou de sous-cadre (géométrie élémentaire, géométrie vectorielle, théorie des matrices,...) ainsi que des changements de registre de représentation sémiotique (Duval 1993) que l'étudiant doit mettre en œuvre pour appréhender les tâches complexes qui lui sont proposées. L'articulation subtile entre cadres, registres et points de vue est analysée plus en détail dans Rogalski 2002. On peut également, dans l'esprit du thème de ce GT3 et à la suite de Sierpinska (Dorier 1997, Chap. VII), analyser la situation en terme de modes de pensée qui coexistent en algèbre linéaire : le synthétique-géométrique, l'analytique-arithmétique et l'analytique-structurel.

Qu'en est-il des résultats obtenus ? Évaluer le « méta » est particulièrement délicat. Pour autant, ce changement de contrat semble produire une écoute accrue de la part des étudiants qui prennent d'eux-mêmes en cours des notes sur le discours méta de l'enseignant en plus des

---

[3] Marc Rogalski me signale également la thèse récente de Stéphanie Bridoux sur l'enseignement des premières notions de topologie (thèse non publiée à ce jour).

traces écrites au tableau. Quiconque enseigne les mathématiques à l'Université percevra déjà cela comme une victoire. Certaines méthodes semblent assez bien dominées par les étudiants, même si l'algèbre linéaire continue d'être un sujet difficile. Des résultats précis sont donnés dans les comptes-rendus d'expérimentation. Tel que nous le percevons, les difficultés majeures à faire vivre un tel dispositif résident dans le fort investissement pédagogique requis et la difficulté matérielle à mettre en place une ingénierie longue dans le contexte actuel du LMD qui a provoqué en France l'émiettement des modules d'enseignement[4].

Que pouvons-nous transférer de cette expérimentation ?

Notre analyse épistémologique a montré que l'émergence des structures algébriques est liée à celle d'un nouveau mode de pensée et d'un nouvel usage de la méthode axiomatique, reconnus en tant que tels au sein de la communauté mathématique qui prend du recul pour définir ses concepts et modes opératoires. Cet argument et la nature FUGS du savoir en question permettent de soutenir que la dévolution à l'étudiant d'une réflexion méta de nature épistémologique sur les concepts en jeu serait approprié pour favoriser l'apprentissage des structures algébriques. Cet argument induit également la nécessité d'un nouveau contrat didactique. Les activités réflexives, comme pour tout savoir de type FUGS, pourront être organisées autour de trois types de situations (qui s'enchainent éventuellement dans le temps de l'apprentissage comme c'est le cas dans Rogalski 1995) :

- une convergence entre les domaines à unifier ;
- des situations où il apparaît clairement a posteriori aux étudiants que, sans la nouvelle théorie unifiée, elles seraient très difficiles à étudier ;
- des situations de transfert d'un domaine à un autre, permises par une théorie unifiée.

Nous retenons également l'idée d'un travail par petits groupes lors de ces séances méta ponctuant les séances classiques. Dans le cas des structures algébriques, on peut rajouter des situations qui font apparaître des structures qui « fonctionnent » moins bien que les structures classiques de façon à motiver ces dernières par la mise en avant de leurs bonnes propriétés.

Mais si nous avons décrit ici une stratégie globale qui nous paraît particulièrement pertinente, on n'échappera pas à des travaux plus locaux qui nécessitent une analyse didactique fine des différentes notions en jeu dans chaque théorie structurale et des difficultés rencontrées dans leur apprentissage. La mise en œuvre de ce programme local/global pour la structure de groupe, avec des choix encore à préciser et une mise en relation avec la théorie des modèles, fait l'objet d'une thèse qui vient de débuter, co-encadrée à Montpellier par l'auteur de ce texte et Viviane Durand-Guerrier.

Un fait nouveau par rapport à l'algèbre linéaire est le suivant : comme l'a souligné l'analyse épistémologique, l'unification se situe à plusieurs niveaux :

- le niveau 1 : une même théorie s'applique à des objets de nature différente ;
- le niveau 2 : la présentation axiomatique des structures en permet un traitement unifié (on se pose à propos des différentes structures le même type de questions que l'on cherche à résoudre avec le même type d'outils) mettant en avant les ponts entre ces structures ;
- le niveau 3 : ce qui était forme (les structures) devient pleinement objet à un niveau supérieur d'organisation, la théorie des catégories ou autre méta-théorie des structures.

[4] Tendance que l'on s'efforce actuellement d'inverser...

Si le niveau 3 ne peut guère être abordé de façon réaliste avant le M2, l'enjeu de la pensée structuraliste se situe au niveau 2, les manuels d'algèbre moderne le mettent clairement en exergue à la suite de l'ouvrage de van der Waerden. Le traitement unifié se caractérise par des méthodes ensemblistes (un sous-ensemble hérite de propriétés, le produit direct, l'étude du comportement des structures vis à vis des opérations ensemblistes, l'étude de la conservation des propriétés par image directe et image réciproque, ainsi que des résultats plus fins comme la caractérisation de la noethérianité par une condition de chaîne, etc.) et par la mise en avant de la notion de morphisme (les théorèmes d'isomorphisme, le rôle du noyau, les classifications à isomorphisme près, les caractérisations par des propriétés universelles, etc.). On peut relever parmi les ponts entre structures que la présentation structuraliste permet de dégager : le groupe multiplicatif d'un corps (qui, agissant sur lui-même par conjugaison, permet de démontrer le théorème de Wedderburn sur la commutativité des corps finis), le groupe des automorphismes d'un corps (ou des K-automorphismes d'une extension, point de départ d'une présentation moderne de la théorie de Galois), la théorie vectorielle des corps (qui met un terme à des problèmes de constructibilité à la règle et au compas posés par les Grecs et montre la puissance d'un formalisme somme toute assez simple), les corps finis comme quotient d'un anneau de polynômes, les groupes abéliens comme module sur les entiers (qui permet de dresser un parallèle avec la Jordanisation), etc. On peut même parler de viaducs : la théorie de Galois, la théorie des représentations des groupes finis, etc. (pour rester dans l'algèbre, la pensée structuraliste mixant également des structures de nature différente : topologique, algébrique, métrique, différentielle, etc.). Ces énumérations un peu longues donneront au lecteur une idée des enjeux de l'unification de niveau 2 et de son caractère architectural pour la matière mathématique.

Van der Waereden et Emmy Noether ont inauguré un style nouveau. Malgré la mise en place du vocabulaire ensembliste à l'entrée de l'Université et la présentation axiomatique de l'algèbre linéaire au cours des deux premières années de licence, ce style apparaît hermétique à la majorité de nos étudiants de L3. La formalisation revêt, plus que jamais dans l'algèbre moderne, un rôle *fondationnel* qui est incompris par les étudiants et n'a pas encore été pris en charge dans les recherches en didactique autour des savoirs FUGS (le F pour formalisation et non fondation). Nous faisons l'hypothèse qu'une ingénierie introduisant des situations réflexives de niveau méta 2 montrerait les bénéfices d'une telle formalisation. Un approfondissement de l'analyse épistémologique et mathématique, un questionnement philosophique et cognitif sur le processus de conceptualisation et de construction de concepts en mathématiques, de reconstruction autour de concepts, ainsi qu'une adaptation de la théorie de Brousseau prenant en compte le méta sont des points essentiels à creuser. L'auteur se fixe comme objectif de mener une expérimentation testant notre hypothèse dans le cadre de l'enseignement des structures d'anneaux et de corps qu'il assure à l'Université Montpellier 2. C'est aussi l'occasion d'approches plus « locales », par exemple un travail problématisant par la coloration arithmétique l'étude des anneaux, en relation avec l'apparition dans l'histoire des notions d'anneau, idéal, d'éléments irréductible et premier, etc.

REFERENCES

Artigue M. (1991) Epistémologie et Didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 10-2/3, 241-286.

Bachelard G. (1938) La formation de l'esprit scientifique (13e éd. 1986). Paris : Vrin.

Bourbaki (1948) *L'architecture des mathématiques.* In Le Lionnais F. (Ed.) (1948, rééd. 1997) *Les grands courants de la pensée mathématique*. Paris : Hermann.

Brousseau (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 33-55.

Cavaillès J. (2008) *Œuvres complètes de Philosophie des Sciences*. Paris : Hermann.

Cory L. (1996) *Modern Algebra and the Rise of Mathematical Structures* (2e éd. 2004). Basel : Birkhäuser.

Douady R (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques* 7(2), 5-31.

Dedekind R. (2008) *La création des nombres*. Paris : Vrin.

Dorier J.-L. (Ed.) (1997) L'algèbre linéaire en question. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Duval R. (1993) Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives* 5, IREM de Strasbourg.

Granger G. G. (1994) *Formes, opérations, objets*. Paris : Vrin.

Grattan-Guiness I. (Eds.) (2005) *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940*. Amsterdam : Elsevier Science.

Guin D., Hausberger T. (2008) *Algèbre – Tome 1 : groupes, corps et théorie de Galois*. Paris : EDP Sciences.

Hasse H. (1930) Die moderne algebraische Methode. *Jahresbericht der DMV* 39, 22-34.

Jordan C. (1870). *Traité des substitutions et des équations algébriques*. Paris.

Lautmann A. (2006) *Les mathématiques, les idées et le réel physique*. Paris : Vrin.

Patras F. (2001) *La pensée mathématique contemporaine*. Paris : PUF.

Robert A. (1987) De quelques spécificités de l''enseignement des mathématiques dans l'enseignement post-obligatoire. *Cahier de didactique des mathématiques* 47. IREM de Paris 7.

Robert A., Robinet J. (1993) Prise en compte du « méta » en didactique des mathématiques. *Cahier de DIDIREM* 21. IREM de Paris 7.

Rogalski M. (1995) *Que faire quand on veut enseigner un type de connaissances tel que la dialectique outil-objet ne semble pas marcher et qu'il n'y a apparemment pas de situation fondamentale ? L'exemple de l'algèbre linéaire*. Séminaire DidaTech n°169, 127-162. Université Joseph Fourier. Grenoble.

Rogalski M. (2002) Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et le jeu de cadres de Régine Douady. *Actes de la journée en hommage à Régine Douady* (juin 2001) (pp. 13-30), IREM de Paris 7.

Serret J. (1849) *Cours d'algèbre supérieure*. Paris.

Sinaceur H. B. (2010) *Emmy Noether et l'école algébrique allemande dans le premier tiers du XXe siècle : mathématiques, style de pensée et philosophie*. Prépublication.

Sinaceur H. B. (2005). From Kant to Hilbert : French philosophy of concepts in the beginning of the twentieth century. In Ferreiros J., Gray J.J. (Eds.) (2006) *Architecture of Modern Mathematics: Essays in History and Philosophy*. Oxford :Oxford University Press.

Vuillemin J. (1993) La philosophie de l'algèbre(2e éd.) Paris : PUF.

Van der Waerden B. L. (1930) *Moderne Algebra*. Berlin : Springer.

Weber H. (1895) *Lehrbuch des Algebra*. Braunschweig.

Wussing H (2007) *The Genesis of the Abstract Group Concept: A Contribution to the History of the Origin of Abstract Group Theory*. Mineola N. Y: Dover Publications.