VERITE MATHEMATIQUE ET VALIDITE LOGIQUE PERSPECTIVES EPISTEMOLOGIQUE ET DIDACTIQUE

Viviane DURAND-GUERRIER*

Résumé – Dans cette communication, nous défendons l'importance de la prise en compte des relations entre vérité mathématique et validité logique dans l'activité mathématique. Dans un premier volet nous présentons brièvement le point de vue sémantique en logique : son essor à partir de Frege ; les apports de Wittgenstein et Tarski sur l'articulation entre validité logique et vérité dans une interprétation ; la déduction naturelle de Copi. Le second volet est consacré à l'analyse logique et mathématique de quatre preuves du point de vue de l'articulation entre vérité et validité, afin de mettre en lumière la pertinence des analyses logiques pour les études didactiques.

Mots-clefs : sémantique logique, vérité, validité, analyse épistémologique, analyse didactique

Abstract – In this paper, we support the importance of taking in account the relationship between mathematical truth and logical validity in mathematics. In a first part, we prsent briefly the semantic point of view in logic: its development from Frege ; the contributions from Wittgenstein et Tarski on the articulation between logical validity and truth in an interpretation ; Copi's natural deduction. The second part is devoted to logical and mathematical analysis of four proofs through the relationship between truth and validity, in order to shed light on the relevance of logical analysis for didactical studies.

Keywords: logical semantics, truth, validity, epistemological analysis, didactical analysis

I. INTRODUCTION

Dans son ouvrage « Pour l'honneur de l'esprit humain », Dieudonné (1987) déclare que les logiciens s'imaginent que leurs travaux intéressent les mathématiciens, mais que ce n'est pas le cas. Ceci est *a priori* en contradiction avec le point de vue de logiciens comme Frege, Russell, Wittgenstein, Tarski ou Quine, pour ne citer que les principaux auteurs ayant contribué au renouveau de la logique à partir de la fin du dix-neuvième siècle et au début du vingtième siècle. Si les logicistes qui, comme Frege et Russell, pensaient que l'on pouvait réduire les mathématiques à la logique ont dû abandonner leur projet, il n'en reste pas moins que leurs apports ont été repris et développés dans le courant de la sémantique logique, qui a abouti à la Théorie des modèles, dont la fécondité pour les mathématiques n'est plus à prouver. Cette communication comporte deux volets. Un volet épistémologique dans lequel nous présenterons brièvement le point de vue sémantique en logique : son essor à partir de Frege et les liens avec la logique d'Aristote ; les apports de Wittgenstein et Tarski sur l'articulation entre validité logique et vérité dans une interprétation ; le système de déduction naturelle de Copi. Le second volet est consacré à l'analyse de quatre preuves mathématiques du point de vue de l'articulation entre vérité et validité, afin de mettre en lumière la pertinence des analyses logiques pour les études didactiques.

II. L'ESSOR DU POINT DE VUE SEMANTIQUE EN LOGIQUE

L'essor du point de vue sémantique en logique est porté par Frege, qui se propose de développer une idéographie permettant de statuer sur la validité des preuves mathématiques, de rendre visible tout ce qui y était implicite (Frege 1971). Comme Russell (1903), il met en avant le rôle de l'inférence et insiste sur la distinction entre affirmer un énoncé conditionnel, comme « Si B, alors A » et faire une inférence comme « si B, alors A ; or B ; donc A ». Il insiste sur le fait que l'affirmation « si B, alors A » n'est pas l'affirmation de «B » ; il est

* Université Montpellier 2, I3M, UMR 5149 CNRS, équipe ACSIOM –France – vdurand@math.univ-montp2.fr

© Durand-Guerrier, V. (2012) Vérité mathématique et validité logique. Perspectives épistémologique et didactique. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT3, pp. 414–424). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

possible que B soit faux, sans que cela ne remette en cause la vérité de « si B, alors A ». Frege défend que ce choix n'a pas à se plier à l'usage courant, lequel tend à ne considérer que les conditionnels à antécédent vrai. Cette distinction, sur laquelle Aristote déjà met l'accent dans les Premiers Analytiques, reste problématique aujourd'hui. Gochet et Gribomont (1990) insistent à leur tour sur l'importance de cette distinction qui ne va pas de soi. Ainsi, si l'on demande à des étudiants ou des enseignants en formation de déterminer tous les entiers compris entre 1 et 20 vérifiant la propriété « si *n* est pair, alors son successeur est premier », la plupart des personnes interrogées répondent en ne donnant que les nombres pairs à successeur premiers, alors que les impairs satisfont également cet énoncé (cf. Durand-Guerrier 2003). Tant chez Aristote, que chez Frege et Russell, les théorèmes logiques reposent sur un certain nombre de lois de conclusion posées comme valides *a priori*. Ces systèmes logiques sont de type axiomatique, et les énoncés valides sont obtenus par l'application de règles posées comme préservant la validité (Par exemple le Modus Ponens ou règle du détachement dans le calcul des propositions, ou chez Aristote, la règle de conversion de « A est affirmé de nul B » en « B est affirmé de nul A »). L'établissement de la validité logique d'énoncés autres que les axiomes ressort dans ce cas de procédures syntaxiques, telles que l'on peut les rencontrer en Théorie de la démonstration. Ces procédures syntaxiques sont assez éloignées des modes habituels de raisonnement mathématique, et entretiennent l'idée d'une stérilité des déductions logiques soutenue par exemple par Kant (Laz 1993, p.9). C'est la formalisation d'un point de vue sémantique sur la validité et sur son articulation avec la vérité dans les interprétations qui va permettre de rapprocher les méthodes logiques et les pratiques mathématiques.

III. VALIDITE LOGIQUE ET VERITE DANS UNE INTERPRETATION

Les travaux de Wittgenstein (1921) pour le calcul des propositions, et de Tarski (1936a, 1936b) pour la logique des classes et le calcul des prédicats, vont constituer un progrès décisif pour clarifier les relations entre logique et mathématique. Ces deux auteurs proposent en effet un point de vue sémantique sur la validité en introduisant la notion d'interprétation des formules logiques dans un fragment de discours, un domaine de réalité ou une théorie. Nous en présentons les éléments essentiels ci-dessous.

1. Une version sémantique du calcul des propositions

Le Tractatus logico-philosophicus (Wittgenstein 1921) est un recueil d'aphorismes dont la construction est complexe et qui aborde de nombreuses questions difficiles. Je ne m'intéresse ici qu'à ce qui se dégage de l'ouvrage concernant la construction sémantique du calcul des propositions[1]. Wittgenstein qui a été l'élève de Russell à Cambridge et de Frege à Iéna se propose dans le Tractatus de dépasser les difficultés théoriques qu'il a identifiées chez ces deux auteurs. En particulier, il va montrer que l'on n'a pas besoin de lois de conclusions pour établir les théorèmes logiques du calcul des propositions. Pour cela, il introduit deux principes:

- *le principe de bivalence stricte* pour les variables propositionnelles : une variable propositionnelle modélise une proposition ; les propositions sont les entités linguistiques susceptibles d'être soit vraies soit fausses (point de vue déjà présent chez Aristote et les Stoïciens) – un variable propositionnelle peut prendre exclusivement deux valeurs de vérité, V ou F ;

[1] Voir Marion (2004) et pour une lecture dans une perspective didactique Durand-Guerrier (2006)

- *le principe d'extensionalité* : la valeur de vérité d'un énoncé complexe dépend exclusivement de la valeur de vérité des énoncés élémentaires qui le composent.

Les connecteurs logiques sont définis de manière combinatoire par leurs tables de vérité. Il y a ainsi 16 connecteurs logiques binaires, qui *« (...) ne renvoient à aucun objet de pensée*, *mais évoquent des systèmes de possibilités pour la vérité et la fausseté des propositions qu'elles connectent* » (Granger 1990). Parmi ces connecteurs, on reconnaît les connecteurs classiques de la langue et du travail mathématique : négation (connecteur unaire), conjonction, disjonction, implication, équivalence (connecteurs binaires). En combinant ces deux principes, étant donné un énoncé du système formel bien construit (respectant la syntaxe du calcul des propositions), on peut construire sa table de vérité.

Deux types d'énoncés jouent un rôle particulier au sein du système : les tautologies et les contradictions. Les tautologies sont les énoncés du système vrais pour toutes les distributions de valeurs de vérité. Exemples : « $p \vee \neg p$ » ou « $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$». Le premier correspond au principe du tiers exclu dans le calcul des propositions ; le second exprime la transitivité de la relation d'antécédent à conséquent. Les tautologies sont les théorèmes du système (au sens de la validité universelle telle que définie par Quine 1950). Les contradictions sont les énoncés du système qui prennent la valeur « faux » pour toute distribution de valeur de vérité. Exemple : « $p \wedge \neg p$ ».

Pour ces deux types d'énoncés, la valeur de vérité est indépendante de l'interprétation des lettres. Ce sont des lois logiques. Les tautologies jouent un rôle essentiel dans le système ; ce sont elles qui permettent de définir la notion de déduction logique et de se passer des lois de conclusion :

> Si p suit de q, je puis déduire p de q : tirer de q la conséquence p.
>
> La manière de déduire ne peut être tirée que des deux propositions.
>
> Elles seules peuvent justifier la déduction.
>
> Des “ lois de la déduction ”, qui — comme chez Frege et Russell — doivent justifier les déductions, sont vides de sens et seraient superflues. (5.132)

Les énoncés dont la table de vérité contient à la fois des V et des F sont interprétés par des propositions non logiques :

> « Les propositions non logiques (i.e. qui ne sont ni des tautologies, ni des contradictions) permettent de parler des faits du monde, de décrire des états de choses.
>
> Elle [la proposition non logique] est vraie si les états de choses sont tels que nous le disons par son moyen (4.062) ».

Cette élaboration se conclut par un résultat essentiel qui explicite la distinction entre validité logique (propriété des tautologies) et vérité dans une interprétation.

> La marque particulière des propositions logiques est que l'on peut reconnaître sur le seul symbole qu'elles sont vraies, et ce fait clôt sur elle-même toute la philosophie de la logique. Et c'est de même un des faits les plus importants que la vérité ou la fausseté des propositions non logiques *ne* se laisse *pas* reconnaître sur la seule proposition. (6.113.)

Wittgenstein en tire la conséquence immédiate que

> Il est clair d'emblée que la démonstration logique d'une proposition pourvue de sens et la démonstration *en logique* doivent être deux choses totalement différentes. (6.1263)

Ceci permet de comprendre pourquoi l'aptitude à établir des preuves logiques par les tables de vérité, ne permet pas d'améliorer les aptitudes pour raisonner en mathématiques.

Ce travail de Wittgenstein dans le Tractacus permet ainsi de clarifier la relation entre vérité et validité en ce qui concerne le calcul des propositions. Cependant, bien qu'il aborde dans cet ouvrage les questions de quantification, il ne fait pas ce travail pour le calcul des prédicats. C'est à Tarski que l'on doit cette avancée.

2. *Le concept de vérité dans les langages formalisés et la notion de conséquence logique*

Dans Tarski (1936a, 1972) l'auteur se propose de « construire une définition de l'expression " proposition vraie" ; définition qui soit matériellement adéquate et formellement correcte » (p.159). Il s'inscrit pour cela dans une tradition qui remonte à Aristote et qui fait écho au point de vue de Wittgenstein :

> Dans cette étude, je ne cherche qu'à saisir les intuitions exprimées par la théorie dite « classique » de vérité, c'est-à-dire par cette conception selon laquelle *« vraiment »* signifie la même chose que *« conformément à la réalité.* (Op. cité, p.160)

Pour réaliser cette construction, il introduit une notion simple mais féconde, la notion de satisfaction d'une phrase ouverte par un élément :

> « Pour tout *a*, *a* satisfait la fonction propositionnelle « *x* est blanc » si et seulement si *a* est blanc. » (op. cit., p.193)

Les fonctions propositionnelles sont interprétées par des phrases ouvertes qui n'ont pas de valeur de vérité. En substituant l'élément « *a* » à la variable « *x* », qui joue le rôle de marque place, on obtient une proposition « *a* est blanc » qui est soit vraie, soit fausse. D'après la définition générale de la vérité « *La proposition « a est blanc » est vraie si et seulement si a est blanc ».* Cette notion de satisfaction conduit à considérer une extension des connecteurs logiques propositionnels classiques : dans un domaine d'objets donné, la négation d'une fonction propositionnelle est satisfaite exactement par les éléments qui ne satisfont pas cette fonction propositionnelle ; une implication ($p(x) \Rightarrow q(x)$) entre deux fonctions propositionnelles est satisfaite exactement par les éléments qui soit satisfont « $p(x)$ » et « $q(x)$ », soit ne satisfont pas « $p(x)$ ».

Une deuxième idée simple et féconde introduite par Tarski est celle de la notion de modèle d'une formule (i.e. d'un énoncé du système formel). Un domaine d'interprétation est un modèle d'une formule si l'interprétation de cette formule est une proposition vraie du domaine. Ceci permet à Tarski de définir la notion de conséquence logique d'un point de vue sémantique :

> La proposition *X* suit logiquement de la classe de propositions *K* si tout modèle de *K* est un modèle de *X*. (Tarski 1936b, 1972)

En outre, ceci généralise ce qui a été réalisé par Wittgenstein et permet de définir la notion d'énoncé universellement valide ; un énoncé est universellement valide si toute interprétation de ses lettres dans tout univers non vide est un modèle de cette formule (Quine 1950).

Le développement de ces travaux conduit Tarski à introduire la méthodologie des sciences déductives, puis la Théorie des modèles que nous n'aborderons pas ici[2]. Les apports de Tarski pour les mathématiques sont soulignés par Hourya Sinaceur (1991a) qui montre la fécondité de cette approche pour les mathématiques.

Ce projet peut aussi être reconnu chez les auteurs ayant introduit les systèmes de déduction naturelle (Gentzen 1934 ; Quine 1950 ; Copi 1954). Il s'agit pour ces auteurs de proposer des systèmes formels de preuves qui restent au plus près des modes de raisonnement habituel des mathématiciens. Nous présentons ci-dessous le système de Copi que nous utiliserons dans la partie V pour analyser des preuves afin de mettre en lumière l'articulation entre validité logique et vérité mathématique.

[2] Pour une présentation, voir Durand-Guerrier (2005, 2008)

IV. LA DEMONSTRATION NATURELLE DE COPI (1954)

Un système de déduction naturelle se caractérise par des règles permettant de gérer l'introduction et l'élimination des connecteurs logiques et des quantificateurs. Pour les connecteurs, on connaît bien la règle du Modus Ponens qui est la règle d'élimination de l'Implication ; on reconnaît moins bien, et ce quoique qu'on l'utilise constamment en mathématiques, la règle d'introduction de l'implication : sous l'hypothèse A, on prouve B ; on en déduit « $A \Rightarrow B$ ». Pour les quantificateurs, le système développé par Copi (1954) présente la particularité d'introduire des lettres pour désigner des éléments génériques d'un univers du discours non vide lui-même générique et d'expliciter les restrictions qui doivent s'appliquer lors de la manipulation de ces lettres.

Nous présentons ci-dessous les principales règles d'introduction et d'élimination des deux quantificateurs.

« de $\forall x\, P(x)$, on déduit $P(a)$, où *a est une constante individuelle quelconque substituée à x. »*

Cette règle est associée à la formule universellement valide « $\forall x\, P(x) \Rightarrow P(y)$ ».

***Règle 1** – Règle d'élimination du quantificateur universel* : Instantiation Universelle *(IU)*

de $P(a)$, on déduit $\forall x\, P(x)$, avec *a constante d'objet absolument quelconque choisie dans le domaine (de x), c'est-à-dire considérée uniquement du point de vue de son appartenance à ce domaine*

Cette règle est associée à la formule non universellement valide : «$P(y) \Rightarrow \forall x\, P(x)$ ». Ceci nécessite que l'on contrôle soigneusement le fait que a est bien un élément générique.

***Règle 2** – Règle d'introduction du quantificateur universel : Généralisation Universelle (GU)*

de $P(a)$, on déduit $\exists x\, P(x)$, avec *a constante d'objet quelconque.*

Ceci est associé à la formule universellement valide « $P(y) \Rightarrow \exists x\, P(x)$ ».

***Règle 3** – Règle d'introduction du quantificateur existentiel* : Généralisation Existentielle *(GE)*

de $\exists x\, P(x)$ on déduit $P(w)$; *w est une constante d'objet, mais dont on retient seulement qu'elle est le nom de l'un des objets qui, par hypothèse, doivent, (ou doit) vérifier* $\exists x P(x)$*. Le plus souvent, on ne sait rien de plus, c'est-à-dire qu'on en «ignore l'identité. »*

Ceci est associée à la formule non universellement valide « $\exists x\, P(x) \Rightarrow P(y)$ » et nécessite par conséquent que l'on contrôle soigneusement le fait que w n'a pas déjà été introduite.

***Règle 4** – Règle d'élimination du quantificateur existentiel* : Instantiation Existentielle *(IE)*

La règle IE est la plus délicate à utiliser ; elle est une source fréquente d'erreurs lorsqu'elle est utilisée sans précaution avec des énoncés de la forme $\forall x \exists y\, P(x,y)$, comme nous le verrons au paragraphe V. Dans ce cas, il faut ajouter des *règles de restriction*, concernant le respect de l'ordre d'introduction des lettres : si une instantiation existentielle se fait après une instantiation universelle, la généralisation existentielle devra se faire avant la généralisation universelle correspondante.

Comme l'écrit Hottois (1989)

> Ce système offre l'intérêt de proposer des démonstrations qui restent au plus près de l'aspect familier des syllogismes. Cette présentation correspond à la volonté de formaliser et d'axiomatiser en ne rompant pas avec la rationalité discursive naturelle. (p.100)

On peut le voir en observant à la lumière de ce modèle la preuve par élément générique, qui est très fréquente en mathématiques :

Soit à prouver un énoncé de la forme « $\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$ » dans une théorie donnée.	
Preuve	
[$P(a)$	*prémisse auxiliaire*
travail au sein de la théorie avec un objet générique vérifiant l'antécédent	
$Q(a)$]	
$P(a) \Rightarrow Q(a)$	*introduction de l'implication*
$\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x))$	*Généralisation universelle*

Figure 1 *– Preuve par élément générique – Analyse à la manière de Copi*

Un système de déduction naturelle permet d'établir des théorèmes de logique, c'est-à-dire permet de prouver qu'une formule du calcul des prédicats est universellement valide, comme dans l'exemple ci-dessous :

« $\forall x\ \forall y\ (P(x) \Rightarrow Q(x,y)) \Rightarrow \forall x\ (P(x) \Rightarrow \forall y\ Q(x, y))$ » (T)

T est une formule universellement valide du calcul des prédicats ; nous en donnons ci-dessous une preuve à la manière de Copi.

$[\forall x\ \forall y\ (P(x) \Rightarrow Q(x, y))$	(1)	Prémisse auxiliaire
$\forall y\ (P(a) \Rightarrow Q(a,y))$	(2)	IU sur (1) pour x
$P(a) \Rightarrow Q(a,\mathrm{b}))$	(3)	IU sur (2) pour y
$[P(a)$	(4)	Prémisse auxiliaire
Q(a,b)	(5)	Modus Ponens sur (3) & (4)
$\forall y\ Q(a,y)]$	(6)	GU sur (5) pour y
$P(a) \Rightarrow \forall y\ Q(a, y))$	(7)	Introduction de l'implication sur (4) & (6)
$\forall x\ (P(x) \Rightarrow \forall y\ Q(x, y))]$	(8)	GU sur (7) pour x
T	(9)	Introduction de l'implication sur (1) & (8)

Figure 2 *– Preuve de « $\forall x\ \forall y\ (P(x) \Rightarrow Q(x, y)) \Rightarrow \forall x\ (P(x) \Rightarrow \forall y\ Q(x, y))$ »*

Le système de Copi peut également être utilisé pour contrôler localement la validité de preuves mathématiques, sans recourir à une formalisation complète dans le Calcul des Prédicats, et propose de ce fait un moyen terme entre une position formaliste extrême s'appuyant sur la théorie de la démonstration de Hilbert, inaccessible de fait, et la position inverse qui consiste à dire que les démonstrations mathématiques n'obéissent à aucune règle. Dans ce qui suit, nous allons utiliser ce système pour l'analyse logique et mathématique de quatre preuves rencontrées en première année d'université en France.

V. ANALYSES LOGIQUE ET MATHEMATIQUE DE QUATRE PREUVES METTANT EN JEU DES QUANTIFICATIONS MULTIPLES

1. Présentation des preuves

Les trois premières preuves ci-dessous ont été rédigées par des étudiants scientifiques de première année d'université et sont rencontrées classiquement dans les copies d'étudiants ; la quatrième est issu d'un manuel s'adressant à ces même étudiants. Le lecteur est invité à se faire sa propre idée en ce qui concerne la validité ou non de ces preuves et la valeur de vérité des énoncés conjecturés.

Preuve n°1 - Suites numériques

Conjecture - Toute suite numérique telle que les suites extraites des termes de rang pair et de rang impair convergent vers une même limite est convergente et admet comme limite la limite commune à ces deux suites extraites.

Preuve - Soit u une telle suite numérique ; notons $\boldsymbol{v}$ la suite extraite des termes de rang pair et $\boldsymbol{w}$ la suite extraite des termes de rang impair et a leur limite commune.

v et w convergent vers a donc il existe un entier N tel que pour tout n supérieur à N, on ait $|\mathbf{v}_n -a| <\varepsilon$ et $|\boldsymbol{w}_n -a| <\varepsilon$

Tout entier est soit pair soit impair ; soit n un entier supérieur à N

si n est pair, $\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{v}_n$ donc $|\boldsymbol{u}_n -a| <\varepsilon$

si n est impair, $\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{w}_n$ donc $|\boldsymbol{u}_n -a| <\varepsilon$

On a donc prouvé qu'il existe un entier N tel que pour tout n supérieur à N, on ait $|u_n -a| <\varepsilon$ On en déduit que la suite u converge vers a.

Preuve n°2 - Accroissements finis généralisés

Conjecture - Soient deux réels a et b tels que $a < b$ et deux fonctions f et g définies et continues sur l'intervalle fermé $[a ; b]$, dérivables sur l'intervalle ouvert $]a ; b[$. Montrer que si la dérivée g' de la fonction g ne s'annule pas sur l'intervalle $]a ; b[$, alors il existe un réel c dans l'intervalle $]a ; b[$ tel que

$$\frac{\boldsymbol{f}'(c)}{g'c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Preuve - La fonction f vérifie les conditions d'application du théorème des accroissements finis, donc il existe c dans $]a ; b[$ tel que $\boldsymbol{f}'(c)\ (b-a) = f(b) - f(a)$. De même g vérifie les conditions d'application du théorème des accroissements finis, donc il existe c dans $]a ; b[$ tel que $g'(c)\ (b - a) = g(b) - g(a))$. Comme g' ne s'annule pas sur $]a ; b[$, $g'(c) \neq 0$ et donc $g(b) - g(a) \neq 0$. On peut donc faire le quotient des deux égalités, on obtient alors l'égalité cherchée.

Preuve n°3 - Image directe et intersection

Conjecture - Soit $\boldsymbol{E}$ et $\boldsymbol{F}$ deux ensembles et soit $\boldsymbol{f}$ une application de $\boldsymbol{E}$ dans $\boldsymbol{F}$. Quelles que soient les parties A et B de E, on a $\boldsymbol{f}(A \cap B) = \boldsymbol{f}(A) \cap f(B)$.

Preuve - Montrons tout d'abord que $f(A\cap B) \subset f(A)\cap f(B)$: si x est un élément de $\boldsymbol{f}(\ (A\cap B)$, il existe $y \in A\cap B$ tel que $f(y) = x$; comme $y \in A$, $x \in \boldsymbol{f}(A)$; de même, comme $y\in B$, $x \in f(B)$ et donc $x \in f(A)\cap f(B)$. Montrons maintenant que $f(A)\cap f(B) \subset f(A\cap B)$: si x est un élément de $\boldsymbol{f}(A)\cap f(B)$, $x \in f(A)$ donc il existe y dans A tel que $x = \boldsymbol{f}(y)$; de même $x \in \boldsymbol{f}(B)$ donc il existe y dans B tel que $\boldsymbol{f}(y) = x$; comme $y \in A$ et $y \in B$, $y \in A\cap B$ et donc $x \in f(A\cap B)$.

Preuve n° 4 - Limite d'une somme de deux fonctions

Conjecture - Soient f et g deux fonctions numériques définies dans une partie A de R et a un élément adhérent à A ; si $f(t)$ et $g(t)$ ont des limites respectives h et k lorsque t tend vers a en restant dans A, alors $f(t)+ g(t)$ tend vers la limite $h + k$.

Preuve - Par hypothèse, quel que soit $\varepsilon>0$, il existe $\eta>0$ tel que $t \in A$ et $| t–a |\leq \eta$ implique

$| f(t) - h| \leq \varepsilon$ et $| g(t) - k| \leq \varepsilon$; on a alors $|f(t) + g(t) - (h + k) | = | f(t) - h + g(t) - k| \leq| f(t) - h|+| g(t) - k | \leq 2\varepsilon$

2. *Une structure logique commune*

Pour chacune des quatre preuves proposées, on a une structure commune :

Deux prémisses de la forme

$\forall x \exists y\, P(x, y)$

$\forall x \exists y\, Q(x, y)$

Une conclusion de la forme

$\forall x \exists y\, (P(x, y) \wedge Q(x, y))$

La modélisation dans la déduction naturelle de Copi permet d'identifier les opérations logiques et mathématiques permettant d'étudier la possibilité de déduire, ou non, la conclusion à partir des prémisses :

Prémisses	$\forall x \exists y\, P(x, y)$	(1)
	$\forall x \exists y\, Q(x, y)$	(2)
$\exists y\, P(a, y)$	(3)	I.U sur (1)
$\exists y$ Q(a, y)	(4)	I.U. sur (2)
$P(a, b)$	(5)	I.E. sur (3)
$Q(a, c)$	(6)	I.E. sur (4)

Arrivé à l'étape (6), il n'est pas possible d'obtenir la conclusion cherchée par les seuls moyens de la logique. En effet, pour obtenir cette conclusion, il faut pouvoir faire une généralisation existentielle (G.E.), suivie d'une généralisation universelle (G.U) à partir d'un énoncé de la forme $P(a,d) \wedge Q(a, d)$. Or précisément, le contrôle logique de la validité rend nécessaire de ne pas réutiliser en (6) la lettre choisie pour instancier dans (5) ; on ne peut donc pas aller plus loin dans la preuve avec les seules ressources de la logique. Il est facile de trouver des contre-exemples montrant que cette inférence n'est pas valide. Or, précisément, dans chacune des quatre preuves, tout se passe comme si les auteurs utilisaient cette inférence non valide pour faire une déduction. Par conséquent, au sens strict du terme, aucune des quatre preuves ne vérifie les critères de validité logique. Pour poursuivre l'analyse de ces preuves, on doit donc considérer à la fois les aspects logiques et mathématiques.

3. *Analyse logique et mathématique des preuves 1 et 4*

Dans la preuve n°4, les étapes 3, 4, 5 et 6 n'apparaissent pas ; l'auteur de la preuve utilise directement la conclusion « $\forall x \exists y\, R(x, y)$ ». Cependant, la preuve 4 peut-être complétée en une preuve valide en utilisant le fait que R est un ensemble totalement ordonné, si bien que deux éléments notés b et c satisfaisant les énoncés correspondant à (5) et (6) ayant été introduits, l'élément $d = \min(b, c)$ satisfait simultanément $P(a, y)$ et $Q(a, y)$.

On peut alors reprendre la preuve logique interrompue. On a en effet

$P(a, d)$ et $Q(a, d)$	(7)	résultat du travail mathématique
$\exists y\, (P(a, y) \wedge Q(a, y))$	(8)	G.E. sur (7)
$\forall x \exists y\, (P(x, y) \wedge Q(x, y))$	(9)	G.U. sur (8)

On peut de même compléter la preuve n°1 en considérant $d = \max(b, c)$; ceci permet de prouver le résultat intermédiaire suivant :

« Il existe un entier N tel que pour tout n supérieur à N, on ait $|\mathbf{v}_n - a| < \varepsilon$ et $|\boldsymbol{w}_n - a| < \varepsilon$ »

Rappelons que dans la preuve n°1, ce résultat est énoncé comme une inférence immédiate sous la forme *« v et w convergent vers a donc* il existe un entier N tel que pour tout n supérieur à N, on ait $|\mathbf{v}_n - a| < \varepsilon$ et $|\boldsymbol{w}_n - a| < \varepsilon$ ».

La preuve n'est cependant pas encore satisfaisante; on peut en effet noter que la définition des suites extraites utilisée n'est pas correcte ; en effet lorsque n est pair, il peut s'écrire sous la forme $2p$ et on a « $u_n = u_{2p} = v_p$ » ; de même lorsque n est impair, n peut s'écrire $2p+1$ et $u_n = u_{2p+1} = w_p$. Par suite, l'entier que nous venons de définir ne convient pas nécessairement. Pour garantir les deux inégalités, il faut choisir $N_3 = \max(2N_1, 2N_{2+1})$ où N_1 et N_2 sont respectivement les interprétations de b et c. Cette fois, la reprise à (7) où d est interprété par N_3 permet de finir la preuve.

La preuve n°1 est une preuve proposée par un (bon) étudiant de première année d'université ; la preuve n°4 est une preuve proposée dans un manuel universitaire français qui s'adresse à des étudiants en première année post baccalauréat (Houzel 1996, p. 27).

On pourrait penser que finalement, puisqu'on peut compléter la preuve en une preuve valide, il est légitime d'utiliser le raccourci. Cependant, comme nous allons voir, les deux autres preuves, qui sont produites par des étudiants de début d'université, ne peuvent pas être complétées en des preuves valides.

4. *Analyse logique et mathématique des preuves n°2 et n°3*

Pour ces deux preuves, comme pour les deux précédentes, une fois arrivé à l'étape (6), on doit revenir au travail mathématique. Pour la preuve n°2, on peut trouver des fonctions pour lesquelles il n'est pas possible de trouver une valeur commune de sorte que les interprétations de (5) et (6) soient satisfaites. La preuve proposée ne peut donc pas être complétée en une preuve valide. Conformément à ce qu'avait déjà bien vu Aristote, ceci ne signifie pas nécessairement que la conclusion soit fausse. De fait ici la conclusion est vraie ; ce qui peut être démontré en utilisant une fonction auxiliaire à laquelle on applique le théorème de Rolle. Ce n'est pas le cas pour la preuve n° 3. C'est la preuve de la deuxième inclusion qui relève du modèle commun aux quatre preuves. Ici, de nouveau on ne peut pas en général construire un élément commun, mais contrairement à ce qui se passe pour la preuve n°2, la vérité de la conclusion suppose l'existence d'un tel élément commun. La conjecture proposée est fausse. Pour assurer en toute généralité l'existence d'un élément commun, il est nécessaire et suffisant que la fonction f soit injective. La différence entre les deux preuves n'est pas toujours perçue par les étudiants, mêmes avancés ; par exemple en avril 2011, un groupe de trois doctorants en mathématiques travaillant sur ces preuves dans le cadre d'un module d'initiation à l'enseignement supérieur ont déclaré que la conjecture n°2 était fausse puisqu'on ne pouvait pas prendre un élément commun pour f et g. Ceci montre selon nous que la pratique mathématique ne permet pas nécessairement de clarifier les relations entre vérité d'un énoncé et validité d'une preuve supposée de cet énoncé.

Les analyses de ces quatre preuves illustrent en outre le fait que même dans des preuves relativement élémentaires les aspects logiques et mathématiques sont étroitement imbriqués. On peut comprendre alors que si l'on ne dispose ni d'un contrôle logique, ni d'un contrôle mathématique (ce qui est le cas lorsque l'on étudie un nouveau domaine), on ne soit démuni pour contrôler la validité des preuves. Notons que dans ces preuves, se conjuguent deux risques d'erreur, l'un de type logique qui consiste à ne pas prendre en compte la restriction sur les instantiations existentielles, l'autre de type mathématique qui consiste à inférer l'unicité de l'existence, ce qui peut expliquer la fréquence des erreurs rencontrées en début d'université sur les preuves de ce type.

VI. CONCLUSION

Nous pensons avoir montré dans cette communication qu'il n'y a pas lieu d'accréditer le divorce entre logique et mathématique, à condition de prendre en considération le point de vue sémantique en logique, et les apports d'une clarification entre vérité mathématique et validité logique. L'analyse logique des énoncés et des preuves nous semble devoir jouer un rôle important en didactique des mathématiques : pour les analyses *a priori* des activités de preuve proposées aux élèves et aux étudiants ; pour comprendre l'activité des sujets en situation de résolution de problèmes ; pour favoriser le développement des compétences liées à la preuve (Durand-Guerrier et Arsac 2003, 2009).

Nous laisserons pour conclure la parole à Hourya Sinaceur :

> La logique semble bien, contrairement à ce que pensait Wittgenstein, un indispensable moyen, non de « fonder » mais de *comprendre* l'activité mathématique. C'est-à-dire pour une part, explorer la relation de l'implicite à l'explicite d'une théorie.(…) Une part essentielle de l'analyse épistémologique est ainsi ouvertement prise en charge par l'analyse logique. (…) En même temps elle apparaît comme une épistémologie *effective* dans la mesure où la réflexion est orientée vers et investie dans l'agir. (Sinaceur H. 1991b)

REFERENCES

Copi I. (1954) *Symbolic Logic* (2nd edition 1965). NewYork :The Macmillan Company.

Dieudonne J. (1987) *Pour l'honneur de l'esprit humain, les mathématiques aujourd'hui.* Paris : Hachette.

Durand-Guerier, V. (2008) Truth versus validity in mathelatical proof. *ZDM Mathematics education* 40, 373-384.

Durand-Guerrier V. (2006) Lire le Tractatus dans une perspective didactique. In Ouelbani M. (dir.) *Thèmes de philosophie analytique*. Université de Tunis, faculté des Sciences humaines et sociales.

Durand-Guerrier V. (2005) *Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique*. Note de synthèse pour l'habilitation à Diriger les Recherches (HDR). Université Lyon 1, I.R.E.M. de Lyon.

Durand-Guerrier V. (2003) Which notion of implication is the right one? From logical considerations to a didactic perspective. *Educational Studies in Mathematics* 53, 5-34.

Durand-Guerrier V., Arsac G. (2009) Analyze of mathematical proofs. Some questions and first answers. In Lin F.-L., Hsieh F.-J., Hanna G., de Villiers M. (Eds.) (Vol. 1, pp. 83-88).

Proof and proving in mathematics education. ICMI study conference proceedings Taiwan :Tapei.

Durand-Guerrier V., Arsac G. (2003) Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Le cas de l'analyse. Quelles implications didactiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques* 23/3, 295-342.

Frege G (1971) *Ecrits logiques et philosophiques*. Paris : Le Seuil.

Gentzen G. (1935) Untersuchungen über das logische Schliessen. *Math. Zeitschr* 39.

Gochet P., Gribomont P. (1990) *Logique, méthodes pour l'informatique fondamentale* vol. 1. Paris : Hermès.

Granger G.G. (1990) *Invitation à la lecture de Wittgenstein*. Aix en Provence : Alinea.

Hottois G. *Penser la logique, une introduction technique, théorique et philosophique à la logique formelle*. Bruxelles : De Boeck – Wesmael.

Houzel C. (1996) *Analyse mathématique. Cours et exercices*. Paris : Belin.

Laz J. (1993) *Bolzano critique de Kant*. Paris : Vrin.

Marion M. (2004) *Ludwig Wittgenstein, Introduction* au *Tractatus* logico-philosophicus. Paris : Presses Universitaires de France.

Quine W.V.O (1950) *Methods of logic*. New-York: Holy, Rinehart & Winston.

Russel B. (1903) *Les principes de la mathématique*, traduction française in Russel B. *Ecrits de logique philosophique* (1989). Paris : PUF.

Sinaceur H. (1991a) *Corps et Modèles*. Paris : Vrin

Sinaceur H. (1991b) Logique : mathématique ordinaire ou épistémologie effective ? In *Hommage à Jean Toussaint Desanti*, TER.

Tarski A. (1936a) Le concept de vérité dans les langages formalisés. *Logique, sémantique et métamathématique* 1972/1, 157-269.

Tarski A. (1936b) Sur le concept de conséquence. *Logique, sémantique et métamathématique,* 1974/2, 141-152.

Wittgenstein L. (1921) Tractatus logico-philosophicus. *Annalen der naturphilosophie*, Leipzig. Traduction française par G.G. Granger (1993). Paris : Gallimard.