SENSIBILISATION A L'ABDUCTION EN STATISTIQUE

Pablo CARRANZA*

Résumé – Dans cette synthèse nous nous intéressons à l'abduction et sa relation avec le théorème de Bayes, et ceci d'un point de vue statistique. Plus précisément, nous aborderons quelques questions liées à l'enseignement (et à l'apprentissage) de ce théorème en tant qu'outil modélisant le raisonnement par abduction.

Mots-clefs : enseignement, statistique, abduction, bayes, probabilité

Abstract – In this article we focus on the abduction and its relationship to the Bayes theorem, always from a statistical point of view. Specifically, we discuss some issues related to education (and training) of this theorem as a tool for modeling the reasoning by abduction.

Keywords: education, statistics, abduction, bayes, probability

I. INTRODUCTION

Pour mieux développer le sujet de l'abduction et le thèoreme de Bayes (et quelques possibilités de sa sensibilisation en classe, nous trouvons nécessaire de commencer par présenter l'approche statistique encadrant cette question. En effet, en Statistique inferentielle existe une approche connue comme inférence bayésienne pour laquelle le théorème de Bayes devient une méthode permettant de formaliser une inférence abductive. Nous esquisserons quelques éléments de cette approche pour après nous centrer sur plusieurs potentialités et difficultés rencontrées lors de nos successives expérimentations sur le théorème de Bayes en tant que modèle de raisonnement par abduction (étudiants âgés de 18 à 22 ans).

Pour résumer l'approche bayesiénne, nous allons consacrer quelques lignes à la pierre angulaire de l'inférence statistique : la probabilité. Nous proposons au lecteur non familiarisé avec le sujet, de penser la probabilité comme étant un objet à deux dimensions, l'une calculatoire, l'autre sémantique (**Figure 1**).

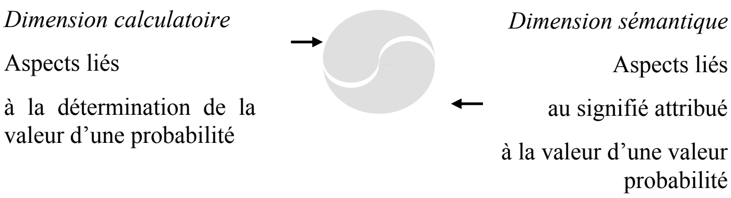

Figure 1 *– Dimensions de la probabilité*

Dans la dimension calculatoire nous plaçons les aspects liés à la détermination de la valeur d'une probabilité. Dans la dimension sémantique, ceux agissant sur son signifié. Bien que les deux dimensions soient constitutives du concept de probabilité, la deuxième détermine les possibilités de la première. Cette sorte de dépendance de la dimension calculatoire à la dimension sémantique met en évidence l'importance de cette dernière. Tout de suite, nous ferons donc une sommaire présentation de la dimension sémantique.

Il est assez admis en Statistique qu'il existe deux grands groupes interprétatifs pour la probabilité, l'un connu comme frequentiste, l'autre comme bayésien (Dale 1999; de Finetti 1937; Hacking 2002; Jeffreys 1939; Jordan 1926; Neyman 1977; Popper 1959; von Mises 1966). Le premier nous parle d'une caractéristique d'une série infinie de répétitions d'une

* Universidad Nacional de Río Negro – Argentine – pfcarranza@gmail.com

épreuve, le deuxième d'une mesure d'une certitude partielle. Cette caractéristique de la probabilité d'admettre deux interprétations a existée depuis son émergence même et elle est connue comme « dualité de la probabilité » (Dale 1999; Hacking 2002).

Il devient parfois difficile de séparer ces deux interprétations, et ceci à cause de leur forte relation sur la dimension calculatoire (Carranza 2009; Gärdenfors et al. 1988; Hacking et Dufour 2004; Keynes 1921). Malgré cette difficulté, nous allons retenir ici juste l'approche bayésienne de la probabilité, dont nous proposons ci-dessous une brève description.

II. PROBABILITÉ BAYESIENNE

Pour cette approche, la valeur d'une probabilité représente donc une mesure de la certitude partielle portée par un individu sur une proposition donnée. De cette manière si par exemple Mademoiselle Camila attribue une valeur de probabilité de 70% à la proposition « ma vache laitière aura un accouchement normal ce printemps », c'est parce qu'elle croit plutôt que tout se passera assez bien pour sa vache, même si elle garde ses réserves devant des possibles complications. On comprend mieux l'appréciation de Camila sur la nature de ce futur événement si l'on se rappelle les deux valeurs extrêmes de probabilités : le zéro et le un. Le premier représentant ici la certitude que rien n'ira bien, le deuxième celle qu'il sera impossible que quelque chose se passe mal.

Cette présentation ne constitue pas une définition de la probabilité bayésienne. Pour cela, nous renvoyons au lecteur à s'intéresser à des travaux consacrés au sujet (Cox 1946; de Finetti 1937; Hacking 2002; Jaynes 1995; Keynes 1921; Shafer 1994). Bien que nous admettions les limites d'une définition de la probabilité bayésienne comme étant une mesure de certitude partielle, elle nous semble suffire pour au moins mettre en évidence deux aspects qui nous intéressent retenir ici : l'un concerne le caractère subjectif de la valeur d'une probabilité bayésienne, l'autre, sa dépendance à l'information disponible.

En effet, il n'est pas nécessaire que Camila porte le même degré de certitude que, par exemple, le vétérinaire responsable du soin de sa vache. Il n'est pas nécessaire non plus que Camila garde la même appréciation lorsque l'accouchement s'approche. Pour la probabilité bayésienne, il est possible tant des variations interpersonnelles que des variations intra personnelles. Tout cela s'explique car la mesure de certitude est précisément une appréciation personnelle, au même temps qu'elle est conditionnée à l'information disponible.

Ces possibles différences lors de l'évaluation d'une probabilité sont d'importance dans le contexte bayésien. Elles nous renvoient à deux questions: Comment fait-on alors pour quantifier une probabilité ? Et quels critères pour son évolution lors de l'arrivée d'une nouvelle information? Nous aborderons maintenant la première question. Pour ce qui concerne la deuxième, c'est précisément le théorème de Bayes qui apporte une possible réponse.

La quantification d'une certitude partielle prend en compte des stratégies différentes selon la nature de la proposition en question. Nous avons identifié deux grandes sortes de propositions. L'une nous l'avons appelé « événement générique », l'autre « hypothèse » (Carranza 2009). Les événements génériques se caractérisent par la facilité avec laquelle il nous est possible de nous représenter la répétition de l'épreuve sous des conditions relativement similaires. Un cas typique est constitué par le lancer d'un dé équilibré ou celui d'une punaise. De cette manière, le fait qu'il puisse être facile de concevoir la répétition du lancer nous permet de trouver un ensemble dans lequel inscrire le résultat. Et vu qu'il n'y a aucune information spécifique sur ce lancer, il devient un lancer générique. De cette manière, cet ensemble devenant référence, il nous permet de quantifier notre degré de certitude.

Par exemple, et pour le cas du dé équilibré, on peut trouver un ensemble de référence même avant le lancer du dé. En effet, en l'admettant équilibré, on peut déduire l'équiprobabilité des ses faces, de cette manière, l'ensemble de référence permettant la quantification est celui de cas possibles (et des favorables).

Dans le cas du dé équilibré, l'ensemble de référence est fini. Mais il y en a d'autres qui sont infinis (en théorie). C'est le cas de la punaise dont, pour évaluer la probabilité de « pointe », on fait appel à la fréquence avec laquelle apparaît cet événement lorsque l'on la lance un nombre infini de fois (ou un grand nombre de fois, le cas échéant).

Pour des raisons d'espace il nous est impossible rentrer en détails sur ce sujet, mais nous voudrions quand même retenir deux idées: a) un événement générique se constitue lorsqu'il est aisément possible de concevoir la répétition de l'épreuve sous des conditions similaires, b) cette possibilité de répétition renvoie immédiatement à un ensemble de référence aidant à la « mise en nombre » de la certitude partielle d'un individu. Ce procédé d'évaluation est largement utilisé en probabilité, et ceci depuis longtemps (Condorcet 1805; Laplace 1795; Leibniz 1765; Nicole et Arnaud 1662).

L'autre type de propositions sur lequel on peut probabiliser est celui que nous avons appelé « hypothèse ». Ce genre de propositions se caractérise comme étant le complément des « événements génériques ». En d'autres termes, lorsqu'il n'est pas possible de se représenter aisément la plausibilité de la répétition de l'épreuve, au moins sous des conditions acceptablement similaires. C'est précisément cette impossibilité de concevoir sa répétition qui écarte l'existence d'un ensemble de référence aidant à la mise en nombre de la mesure de certitude partielle. Ainsi, sans une référence universelle, diverses sources d'évaluation apparaissent : l'expertise personnelle, l'information disponible autour du sujet, etc.

Plusieurs auteurs ont essayé de formaliser ces démarches de quantification en proposant des critères d'évaluation générale. Un de ces critères est connu comme le principe de raison insuffisante (Keynes 1921), dont les origines remontent très probablement aux travaux de Leibnitz (Leibniz 1765). Ce principe propose d'attribuer la même probabilité à chacune des hypothèses si l'on ne dispose pas d'information permettant de privilégier l'une sur les autres.

C'est précisément ce genre de situations que nous avons considéré pour aborder la question du théorème de Bayes en tant que modèle pour une démarche abductive. Il s'est agi alors d'un problème pouvant se caractériser comme du type « hypothèse » dont les étudiants ont été invités à reconsidérer les mesures de certitude en fonction de l'arrivée de nouvelle information sur le système.

C'est précisément lorsque les étudiants ont dû reconsidérer leurs mesures de certitude que l'abduction émergeait. Le théorème de Bayes est apparu alors comme un modèle normatif pour aborder une démarche abductive. Mais avant de rentrer dans les expérimentations effectuées, nous allons pointer sur quelques éléments de ce genre de raisonnement et de sa relation avec le théorème de Bayes.

III. ABDUCTION ET THEOREME DE BAYES

La littérature semble accorder à Charles Senders Peirce (Peirce 1932) le terme « abduction ». Il y a néanmoins quelques controverses sur les idées que Pierce a souhaité réunir sous ce mot (Engel-Tiercelin 1992; Fann 1970). Nous retiendrons ici une des acceptions les plus répandues actuellement, même si Peirce ne s'y voyait pas entièrement représenté. Cette acception nous parle d'un type de raisonnement caractérisé par une inférence à la meilleure explication (Harman 1965; Schield 1997). En autres termes, un procédé argumentatif pour lequel une (ou plusieurs) hypothèses se voient renforcées par leurs pouvoirs explicatifs d'une évidence constatée.

Dans ce raisonnement interviennent alors deux types de propositions, les évidences (E) et les hypothèses (H), les dernières devenant des possibles modèles d'une partie du monde, les premières représentant les indices ou observables de ce monde (Kapitan 1992). Cette question intéresse beaucoup les statisticiens (Hacking 1965), et ceci depuis long temps (Bayes 1763; Jeffreys 1963; Jordan 1926; Laplace 1771; Robert 2006).

Tout semble indiquer que c'est à partir du théorème de Bayes (Bayes 1763) que les statisticiens ont trouvée une manière d'aborder cette question historique. Même plus, les partisans de cette approche affirment que devant l'ampleur des contradictions constatées lorsque les individus entreprennent une démarche abductive, le théorème de Bayes devient un procédé objectif, une sorte de modèle normatif pour l'abduction (Cox 1946; Iversen 2001; Jaynes, 1980). Nous essayerons de résumer de quelle manière le théorème de Bayes modélise le raisonnement par abduction, pour l'illustrer nous nous servirons du problème proposé à nos étudiants.

Imaginez un professeur de mathématique mettant des pièces de monnaie de vingt cinq centimes sur une des tables de la classe. En Argentine en particulier, ces pièces pouvant être, soit de couleur « bronze » (B) soit de couleur « aluminium » (A). Imaginez aussi que cet enseignant en prend quatre et qu'il les introduit dans un gobelet. Le professeur, ayant empêché les élèves de voir les pièces de monnaie choisies, il leur pose la question sur les couleurs de ces pièces de monnaie[1].

Cinq hypothèses se présentent comme possibles : H_1 :BBBB, H_2 :BBBA, H_3 :BBAA, H_4 :BAAA, H_5 :AAAA. L'enseignant propose aux élèves d'analyser combien ils croient en chacune de ces hypothèses. Pour exprimer leurs appréciations, chaque élève (ou binôme...) pourra se servir de, par exemple, 20 morceaux de papier. De cette manière, s'ils croient plus en une composition qu'en une autre, ils doivent assigner plus de morceaux de papier à l'une qu'à l'autre. Imaginez alors qu'après que les élèves se soient exprimés à travers leurs 20 morceaux de papier, l'enseignant remue le gobelet et sans regarder à l'intérieur, il prend une pièce de monnaie. Puis il montre aux élèves la pièce en question (admettons du type A) et après il la remet dans le gobelet.

Apres cela, l'enseignant relance la question sur les « chances » que chaque élève attribue aux compositions possibles, maintenant que l'on a appris que dans le gobelet il y a une pièce du type A. De cette manière, les élèves concluent une sorte de cycle, dont ce qu'ils croyaient à un moment donné (probabilités *a priori*), est révisé en fonction de l'évidence constatée. Cette révision conduit a une (éventuellement) nouvelle distribution des degrés de certitude (probabilité *a posteriori*).

Imaginez que ce cycle se répète, et que l'enseignant prend pour la deuxième fois une pièce de monnaie (admettons B). Voilà donc un nouveau cycle qui démarre, dont les probabilités *a priori* sont celle de l'*a posteriori* du cycle précédant. De cette manière, l'arrivée de la nouvelle information (B) interpelle les probabilités *a priori*. Cette interpellation est résolue par des arguments abductifs, dont les hypothèses expliquant au mieux les évidences se voient renforcées, de la même manière que celles de moindre pouvoir explicatif se voient affaiblies.

[1] Le lecteur trouvera des ressemblances entre ce problème et un autre largement connu dans la littérature didactique française (Brousseau, Brousseau, & Warfield, 2001). Néanmoins ils sont quelque part différents, celui de ces auteurs a pour intention le traitement de la probabilité fréquentiste, tandis que le nôtre vise la notion bayésienne de la probabilité.

Dans un contexte bayésien, les « états de connaissance partielle » ou degrés de certitude, se représentent par des probabilités : celles qui précèdent l'information ($P(H_i)$, probabilités *a priori*) et celles qui la suivent ($P_{\text{inf}}(H_i)$, probabilités *a posteriori*).

Le passage de l'une vers l'autre est donné par un rapport, celui du pouvoir explicatif de l'hypothèse en question ($P_{H_k}(\text{inf})$) sur l'attente moyenne de cette information ($P(\text{inf})$). De cette manière, si l'évidence (inf) est plus probable sous une hypothèse donnée (H_k) que sous une autre (H_j), alors la première devient plus crédible que la deuxième ($P_{\text{inf}}(H_k) > P_{\text{inf}}(H_j)$) . En résumé, le modèle normatif de Bayes pourrait se représenter comme suit :

$$\boxed{P_{\text{inf}}(H_i)} = \frac{P_{H_i}(\text{inf})}{P(\text{inf})} \times \boxed{P(H_i)}$$

Probabilité *a posteriori*	Probabilité *a priori*
(Après l'evidence)	(Avant l'évidence)

***Figure 2** – Cycle bayésien*

A chaque cycle de révision de mesures de certitudes un procédé abductif est convoqué. Il permet le passage de l'avant vers l'après de l'évidence. De cette manière, l'algorithme de Bayes devient un procédé objectif pour ce passage. C'est précisément avec cette intention que nous l'avons présenté à nos étudiants : devant la diversité d'arguments possibles et même parfois contradictoires justifiant les modifications des distributions de probabilités, l'expression de Bayes devient une méthode objectivant cette démarche, méthode qui se base sur le pouvoir explicatif de chacune des hypothèses.

Nous venons de résumer la manière pour laquelle le théorème de Bayes règle le passage d'une distribution de probabilités *a priori* vers une autre *a posteriori* et ceci par des arguments abductifs. Nous présenterons maintenant quelques conclusions autour de nos expérimentations successives du problème en différents cours de Statistique (étudiants âgés de 18 à 22 ans) pour apprès en proposer quelques conclusions.

IV. SUR LE PROBLÈME EXPERIMENTÉ

Le problème proposé aux étudiants a été déjà esquissé dans les sections précédentes : l'enseignant prend quatre pièces de monnaie (les possibilités étant en bronze (B) ou en aluminium (A)) et en cachant la action aux étudiants, les introduit dans un gobelet. Puis, il demande leurs avis sur la proportion de pièces à l'intérieur du gobelet. L'enseignant donne ensuite des « aides » aux étudiants : après leur avoir demandé leurs premiers avis sur la composition possible, il prend au hasard une pièce de monnaie du gobelet et la montre à la classe, puis il la remet dans le gobelet. A chaque fois qu'il montre une pièce il relance la question à la classe sur les possibles hypothèses et leurs probabilités. Après un certain nombre de cycles, le problème finit avec un bilan centré en général sur deux axes, l'un agissant sur les arguments évoqués par les étudiants et le théorème de Bayes en tant que modèle pour l'évolution des probabilités ; l'autre sur l'incertitude et les prises de décisions sous des critères rationnels.

Les expérimentations nous servant de référence à cette synthèse se sont menées les unes en France, les autres en Argentine. Dans le premier cas, une a été l'objet d'une analyse dans le cadre de notre thèse doctorale (Carranza 2009), elle s'est menée l'année 2007 dans un BTS Èlectrotechnique, l'autre à mode de pre-expérimentation de la précédente dans un lycée (dernière année, orientation Scientifique) de la région parisienne. Dans le deuxième cas (Argentine), les expérimentations ont eu lieu dans un contexte universitaire (Licence en Commerce internationnale et Ingénierie en Aliments), les étudiants âgés en général de 18 à 22 ans. Dans la plupart de cas, les principes des approches tant frequentiste que bayésienne de la probabilité déjà avaient été abordés. Par la suite, nous développerons quelques parties importantes du problème accompagnées d'un ensemble de conclusions tirées de nos expérimentations. Nous commencerons par la première distribution *a priori.*

Pour la première distribution *a priori* nous avons expérimenté deux grandes voies. Dans l'une, l'enseignant pouvait voir l'ensemble de pièces de monnaie duquel il en prend quatre. Dans l'autre, les pièces restaient cachées. Dans le premier cas, les pièces de monnaie étaient sur une des tables de la salle, éloignée des étudiants[2] ; dans le deuxième, à l'intérieur d'un sac opaque. Ces deux grandes possibilités agissent comme une sorte de variable didactique. La première facilite chez les étudiants des arguments plus « subjectifs » que la deuxième.

Lorsque les étudiants sont interpellés sur les raisons des choix de la première distribution *a priori*, les réponses en général se polarisent sur trois axes :

a) Principe de raison insuffisante. Dans ce cas, les étudiants expliquent manquer des éléments pour privilégier une ou plusieurs hypothèses. La distribution de probabilités est ici équi-répartie.

b) Principe de l'entropie maximale. Quelques étudiants n'assignaient pas les mêmes probabilités à toutes les hypothèses. Bien au contraire, les unes leurs semblaient plus probables (AABB) que les autres (AAAA, BBBB) car « dans la première il y a plus de hasard » que dans les autres. De cette manière des arguments proches à l'entropie de la série sembleraient avoir été évoqués (Bretthorst 1990; D'Agostini 2003; Gärdenfors et al. 1988; Hacking 2002; Jaynes 1980; Jaynes 1995). Dans ce cas, la distribution de probabilités est du type pyramidale, dont l'hypothèse plus probable est celle contenant 2 pièces du type A et deux du type B.

c) Intentionnalité de l'enseignant. Ces étudiants pensent que l'enseignant est intéressé à la composition (AABB) et non pas par exemple a la composition (AAAA), ceci leur mène à proposer une distribution de probabilités *a priori* du type pyramidal. Ces appréciations des étudiants, pertinentes d'ailleurs, ont été fréquentes dans les cas dont l'enseignant prend les pièces sur la table, et elles mettent en évidence les conditions complexes entourant l'évaluation d'une probabilité bayésienne.

Une fois la première distribution *a priori* terminée, l'enseignant, rappelons-le, fournit la première « aide » : il remoue le gobelet et prend une pièce de monnaie pour après la montrer à la classe. Dans toutes nos expérimentations l'enseignant a bien mis en évidence le caractère aléatoire de l'extraction de la pièce du gobelet. En d'autres termes, il a toujours évité de donner des indices permettant aux étudiants de soupçonner un possible contrôle sur la couleur

[2] Les pièces de monnaie éloignées empêchaient les élèves de connaître la proportion de chaque couleur. Ceci cherchait à bloquer la possibilité d'estimer la probabilité de chaque composition possible fondée sur cette proportion (estimations de loi binomiale ou hypergéométrique selon le cas).

obtenue. Ceci constitue une autre variable didactique, et dans notre cas, nous avons eu l'intention de ne pas interpeller chez les étudiants les probabilités de l'évidence ($P_{H_k}(\text{inf})$)[3].

Après la pièce montrée à la classe, l'enseignant invite les étudiants à éventuellement reconsidérer leurs distributions *a priori*. Pour n'importe quelle couleur obtenue, une des hypothèses monochromatiques devient impossible. Le reconnaître ne leur pose pas des problèmes, c'est en fait la manière de redistribuer les morceaux de papiers (probabilités des hypothèses) qui ne fait pas l'unanimité. Deux questions nourrissent les débats : d'une part ils s'interrogent sur la relocalisation des morceaux de papier enlevés de l'hypothèse devenue impossible, d'autre part ils ne se sentent pas sûrs de vouloir modifier le nombre de morceaux assignés aux hypothèses encore possibles. Ces questions sont essentielles, elles mettent en évidence en tout cas l'émergence d'arguments abductifs. Par exemple, admettons que la pièce montrée à la clase soit du type A, cette information devrait non seulement permettre d'écarter l'hypothèse (BBBB) mais aussi elle devrait renforcer celles dont A est plus présente, en particulier l'hypothèse (AAAA). Les arguments permettant d'arriver à cette conclusion sont du type abductif. En effet, l'évidence A est plus probable sous l'hypothèse (AAAA) que sous toutes les autres, de cette manière la constatation d'A la renforce. La première partie de cet enchaînement argumentatif est largement partagé par les étudiants en général ($P_{AAAA}(A) > P_{AAAB}(A) > ...$), c'est la deuxième partie la plus coûteuse à être acceptée ($P_A(AAAA) > P_A(AAAB) > ...$). Cette résistance devient plus évidente chez les étudiants ayant choisi une première distribution de probabilités équi-répartie. En d'autres termes, ceux qui se sont basé sur le principe de raison insuffisante trouvent des difficultés à trancher devant l'évidence. Tout semble indiquer que la position de neutralité atteinte par les arguments du principe de raison insuffisante a du mal à être quittée.

Pour que l'évidence interpelle cette position de neutralité accompagnant le principe de raison insuffisante, il nous a fallu en général attendre la troisième évidence ou même la quatrième dans certains cas. C'est à ce moment-là que les informations successives fournies finissent par débloquer les étudiants : en se voyant obligés de les prendre en compte, par la force de l'évidence, ils modifient leurs probabilités accompagnant les choix par des arguments abductifs. Cette résistance chez les étudiants s'étant servi du principe de raison insuffisante a été généralisée tout au long de nos expérimentations. Ce phénomène n'a pas été observé avec la même persistance chez ceux s'étant servi d'autres arguments (et d'autres distributions de probabilité).

D'ailleurs, notre objectif principal pour ces séances a été de sensibiliser les étudiants au théorème de Bayes en tant que procédé normé du raisonnement par abduction. Les détails concernant les calculs, même si fondamentaux, n'étaient pas visés dans ces expérimentations. Travailler avec les étudiants les aspects sémantiques et calculatoires du théorème de Bayes dans une seule (et première séance) nous a toujours paru excessif. Nous avons donc renvoyé ces derniers à un deuxième moment que nous n'aborderons pas ici. C'est précisément le choix de centrer le travail sur les aspects sémantiques de l'expression de Bayes qui nous a mené à proposer les morceaux de papier comme moyen représentant les mesures de certitudes. En effet, l'imprécision du moyen de representation des mesures de certitude (morceaux de papier) cherche à ecarter l'eleve de l'intérêt pour la représentation numérique de la probabilité, au moins dans un premier moment. De toutes manières, et tel que nous l'avons prévu, après la troisième extraction d'une pièce du gobelet, les morceaux de papier

[3] Si les étudiants avaient perçu une intentionnalité de la part de l'enseignant à choisir une couleur ou une autre lors de l'extraction de la pièce, le critère d'évaluation de la probabilité de cette couleur aurait été interpellé. Nous avons préféré ne pas le faire et laisser cette probabilité sans la remettre en question. Les étudiants l'ont évaluée donc par le rapport de cas favorables sur les cas possibles (Laplace 1795).

deviennent insuffisants pour représenter les petits changements de degré de certitude souhaités par les étudiants.

A ce moment, et toujours sans l'intervention de l'enseignant, les étudiants changent progressivement de moyen de représentation et choisissent en général des fractions pour leurs probabilités. Ce terme d'ailleurs, est largement utilisé par les étudiants à ce stage de la séance. Lorsque le passage au nombre est assuré (troisième extraction dans la plupart des cas), l'enseignant propose un bilan partiel du travail effectué. De cette manière des sujets tels que les probabilités *a priori* et *a posteriori* sont discutés. Ce moment de bilan sert aussi à aborder les principes du raisonnement par abduction émergés lors des débats, ainsi qu'une brève présentation du théorème de Bayes en tant que méthode normant ce procédé argumentatif.

Ceci fait, l'enseignant invite la classe à continuer la discussion en se servant de l'ordinateur. Pour cela, un fichier du type feuille de calcul a été préparé à l'avance. La **Figure 2** montre une capture d'écran du fichier proposé aux étudiants.

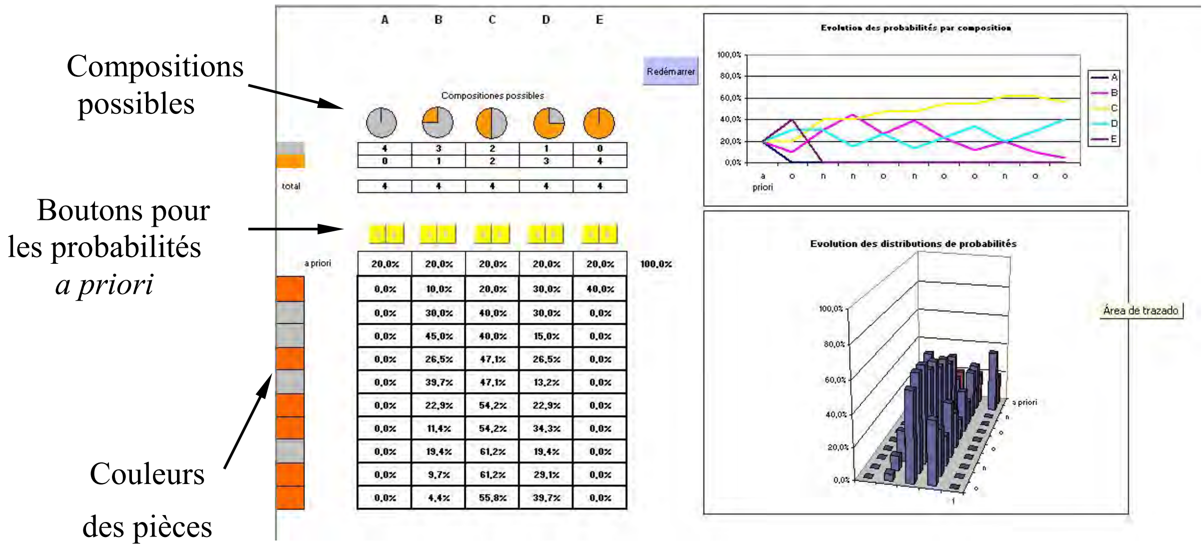

Figure 2 *- Capture d'écran de la feuille de calcul*

La feuille montre les cinq compositions possibles (en haut à gauche). Pour l'activer les étudiants doivent indiquer leurs premières distributions *a priori* (boutons) et puis préciser une par une les couleurs des pièces de monnaie observées (colonne à gauche). A chaque fois qu'ils ajoutent l'information de la couleur, l'algorithme rend les respectives probabilités *a posteriori*. L'évolution de ces probabilités est automatiquement graphiquée en deux vues différentes. La **Figure 2** montre l'image projetée sur l'ordinateur lorsque l'on a introduit une première distribution de probabilités équi-répartie (principe de raison insuffisante) avec la série de couleurs B, A, A, B, A, B, B, A, B, B. Avec cette information fournie, l'expression de Bayes donne les probabilités suivantes :

	Hypothèses possibles		
	BAAA	BBAA	BBBA
Probabilités *a posteriori*	4,4 %	55,8 %	39,7%

Table 1 *- Dernière distribution de probabilité a posteriori*

En amont de l'enjeu principal du problème proposé aux étudiants, la feuille permet de discuter sur d'autres aspects importants liés au modèle inférentiel bayésien. Par exemple, il est possible à tout moment de modifier les premières probabilités *a priori*. Une fois que la feuille a vérifié que cette première distribution satisfait les axiomes de Kolmogorov, elle calcule les successives distributions de probabilités *a posteriori*. Ceci permet de mettre en évidence l'importance de cette première distribution de probabilités. Lors de nos expérimentations, les étudiants ont introduit leurs propres données et observés les effets sur les successives distributions. Dans ce sens, ceci a permis de constater la proximité des distributions finales de probabilités, malgré les différences dans les premières distributions *a priori* (Cox 1946; Jaynes 1995).

Il est possible aussi d'interagir sur les couleurs, de cette manière, en les changeant, les étudiants observent les effets sur les probabilités. Lors de nos expérimentations, nous nous en sommes servis pour resignifier avec les étudiants des concepts tels que la probabilité conditionnelle, la probabilité totale et l'indépendance et dépendance entre événements. Il est possible d'observer cette dernière en comparant les cellules successives sur une même colonne.

Enfin, les conclusions tirées de nos experimentations autour du sujet nous ont permis de constater d'une part que la dualité de la probabilité est un sujet plausible d'être sensibilisé en classe. Et d'autre part, que l'association du thèoreme de Bayes à une modelisation du raisonnement par abduction est un choix possible permettant de donner de sens Statistique à cette expression mathématique.

Dans ce sens, le sujet nous semble pertinent aux preocupations du GT3. En particulier aux deux des trois principaux axes de travail de ce groupe. En effet, l'approche donnée ici à l'expresion de Bayes agit directement sur un type general de pensée mathématique (le stocastique) mais aussi sur les possibilités de son enseignement.

D'ailleurs, nos experimentations nous ont renseignés que si bien un tel travail en classe est possible, il pose des nombreusses questions sur l'enseignement en classe de mathématiques, telles que celle la validation, le changement de contrat didactique et d'autres conflits provenant du changement de paradigme epistemologique implicant le traitement en classe de Mathématiques de notions de Statistique.

REFERENCES

Bayes T. (1763) An essay towards solving a problem in the doctrine of chances. *Philosophical Transactions of The Royal Society*.

Bretthorst G. L. (1990) An introduction to parameter estimation using bayesian probability theory. *Maximum entropy and bayesian methods*, 53-79.

Brousseau G., Brousseau N., Warfield V. (2001) An experiment on the teaching of statistics and probability. *The Journal of Mathematical Behavior* 20(3), 363-411.

Carranza P. (2009) *La dualité de la probabilité et enseignement de la statistique. Une experience en bts.* Paris VII Denis Diderot, Savoirs Scientifiques: Epistemologie, histoire des sciences, didactique des disciplines.

Condorcet J.-A.-N. (1805) *Eléments du calcul des probabilités* (F.-J.-M. Fayolle, Trans.). Paris: Fayolle F.-J.-M.

Cox R. T. (1946) Probability, frequency, and reasonable expectation. *American Journal of Physics* 14, 1-13.

D'Agostini G. (2003) Bayesian inference in processing experiemtal data. *Progress in physics* 66.

Dale A. (1999) *A history of inverse probability: From Thomas Bayes to Karl Pearson*. New York: Springer-Verlag.

De Finetti B. (1937) La prévision: Ses lois logiques, ses sources subjectives. *Annales de l'I.H.P,* Vol. 7, 1-68. Numdam.
Engel-Tiercelin C. (1992) Vagueness and the unity of c. S. Peirce's realism. *Transactions of the C. S. Peirce Society* 28, 51-82.
Fann K. T. (1970) *Peirce's theory of abduction*. La Haya: Martinus Nijhoff.
Gärdenfors P., Sahlin N.-E., Ramsey F., Luce D., Raiffa H., Savage L. et al. (1988). *Decision, probability and utility*. Cambridge: Cambridge University Press.
Hacking I. (1965) *The logic of statistical inference*. New York: Cambridge University Press.
Hacking I. (2002) *L'émergence de la probabilité*. Paris: Seuil.
Hacking I., Dufour M. (2004) *L'ouverture au probable*. Paris: Armand Colin.
Harman G. (1965. The inference to the best explanation. *The Philosophical Review* 74(1), 88–95.
Iversen G. (2001) Bayesian models and world constructs. *Training Researchers in the Use of Statistics*, 103-112.
Jaynes E. (1980) What is the question in bayesian statistics? In Bernardo J. M,. deGroot M. H,. Lindly D. V,. Smith A. F. M (Eds) (ch.13) *Bayesian Statistics*. Valencia: Valencia Univ. Press.
Jaynes E. (1995) *Probability theory: The logic of science* (2003 ed.) St. Louis U. S. A.: Washington University.
Jeffreys H. (1939) *Theory of probability* (1960 ed.). Oxford: University Press.
Jeffreys H. (1963) Review of the foundations of statistical inference by l. J. Savage. *Technometrics* 5, 407-410.
Jordan C. (1926) Sur la probabilité des épreuves répétées, le théorème de Bernoulli et son inversion. *Bulletin de la S.M.F.* 54, 101-137.
Kapitan T. (1992) Peirce and the autonomy of abductive reasoning. *Erkenntnis 37*, 1-26.
Keynes J. M. (1921) *A treatise on probability*. London: MacMillan and Co.
Laplace P. S. (1771) Mémoire sur la probabilité des causes par les événements. *Mémoires de l'Academie royale des sciences de Paris, VI.*
Laplace P. S. (1795) *Essai philosophique sur les probabilités* (1816 éd.). Paris: Pour les mathématiques et la Marine.
Leibniz G. W. (1765) *New essays concerning human understanding* (A. Langley, Trans. 1916 -d. Vol. 1). Chicago: The Open Court Publishing Company.
Neyman J. (1977) Frequentist probability and frequentist statistics. *Synthese 36*, 97-131.
Nicole P., Arnaud A. (1662) *La logique de Port Royal* (A. Fouillée, Trans. 1878 ed.). Paris: Librairie Classique d'Eugène Belin.
Peirce C. S. (1932) *Collected papers*. Cambridge Mass.
Popper K. R. (1959) *The logic of scientific discovery*. London: Hutchinson.
Robert C. (2006) *Le choix bayesien. Principes et pratique*. Paris: Springer.
Schield M. (1997) Interpreting statistical confidence. *American Statistical Association*.
Shafer G. (1994) The subjective aspects of probability. In Wiley G., Ayton W., Ayton P. (pp. 53-73) *Subjective probability*.
Von Mises L. (1966) *Human action: A treatise on economics* (4° ed.). Chicago: Contemporary Books.