DE L'EXISTENCE DE MATHÉMATIQUES DE LA DIDACTIQUE : RÉFLEXIONS SUR L'ARTICULATION ENTRE MATHÉMATIQUE ET DIDACTIQUE

Jérôme PROULX*

Résumé – Pour discuter de l'articulation des connaissances mathématiques et didactiques, j'explore la possibilité de l'existence de mathématiques spécifiques à la didactique des mathématiques, que j'appelle des « mathématiques de la didactique ». En m'inspirant des travaux récents en didactique des mathématiques, j'offre trois entrées pour réfléchir sur ces « mathématiques de la didactique » : le travail conduit à la formation des maîtres en mathématiques, les mathématiques mobilisées à l'intérieur des pratiques enseignantes et les concepts mathématiques tirés des travaux en didactique des mathématiques.

Mots-clefs : articulation mathématique et didactique, mathématiques spécifiques à la didactique, didactiques des mathématiques, légitimité mathématique

Abstract – To discuss the link between mathematical and didactical knowledge, I explore the possibility that specific mathematics exists within the world of didactics, which I call "mathematics of didactics." Delving in recent work in didactics of mathematics, I offer three entry points to engage in reflections about these "mathematics of didactics": work conducted in mathematics teacher education, mathematical knowings mobilized in teachers' practices, and mathematical concepts developed in didactics studies.

Keywords: links between mathematics and didactics, didactics' specific mathematics, mathematics didactics, mathematical legitimacy

I. MISE EN CONTEXTE DU QUESTIONNEMENT

La didactique des mathématiques est un domaine d'études assez récent. Pour plusieurs didacticiens, elle s'est établie de façon plus officielle durant les années 1970 à plusieurs endroits autour du globe, suite à l'avènement des mathématiques modernes dans le milieu scolaire (voir Moon, 1986). La didactique des mathématiques s'est donc développée de façon contextualisée et dépendante de ses divers milieux d'origine en ce qui a trait à ses orientations, mais aussi à la nature des travaux qui y ont été réalisés. Elle porte ainsi, tel que le souligne Bednarz (2007), un caractère multi-référentiel et hautement contextualisé, amenant à parler *des* didactiques des mathématiques et non d'une seule didactique des mathématiques. À titre d'exemple, comme l'explique Bednarz (2001), alors qu'elle s'est développée en France dans une intention d'en faire une science, elle s'est davantage développée en Italie pour des envies d'innovation des pratiques de classes et aux Pays-Bas en lien avec la vision de Freudenthal des mathématiques comme activité humaine. Ces différents contextes sont importants, car ils ont fait émerger différentes façons de faire et de concevoir les travaux en didactique des mathématiques. Plus près de moi, au Québec et particulièrement à l'UQAM, la didactique des mathématiques s'est développée dès les années 1970 dans une préoccupation de formation des enseignants, orientant de ce fait la nature des travaux et des réflexions qui y ont été menés. C'est ce contexte qui enracine les questions que je pose dans cet article – nées de préoccupations au carrefour de la didactique des mathématiques et de la formation des enseignants – pour aborder la notion d'articulation au cœur du thème du GT1.

II. IMBRICATION DES CONNAISSANCES DIDACTIQUES ET MATHÉMATIQUES

Les questions d'articulation sont, du moins au Québec, au cœur des préoccupations de formation des enseignants en mathématiques (voir le collectif Proulx et Gattuso 2010). Ces

* Université du Québec à Montréal – Québec, Canada – proulx.jerome@uqam.ca

questions d'articulation apparaissent importantes, particulièrement face aux questions d'organisation et de la place accordée aux différentes composantes de la formation des enseignants, par exemple les mathématiques, la didactique et la pédagogie (voir Kuzniak 2007), où des choix doivent être faits et où une critique persiste face à la tendance d'atomisation de ces différentes composantes dans la formation (voir Ball 2000). Cette critique est d'autant plus vive que les travaux sur les pratiques enseignantes montrent que l'enseignant mobilise de façon simultanée des connaissances mathématiques, didactiques et pédagogiques dans son enseignement (Bednarz et Proulx 2009; Huillet 2009), questionnant la tendance à dissocier celles-ci à travers des cours distincts de mathématiques, de didactique et de pédagogie. Dans la même veine, dès les années 1990 suite aux travaux de Shulman (1986), des chercheurs comme Even (1990, 1993) ont montré qu'il était difficile, voire impossible, de séparer les connaissances uniquement didactiques de celles uniquement mathématiques chez les enseignants. Ceci soulève plusieurs questions qui ont trait à la nature des « mathématiques » en didactique des mathématiques : Quels sont les liens et les différences entre didactique et mathématiques à la formation des enseignants ? Doit/peut-on les distinguer? Est-ce que cette distinction est importante, particulièrement en formation des enseignants ? Ces questions guident vers une autre, particulièrement centrale ici : S'il existe une (ou des) didactique(s) propre(s) aux mathématiques, donc une didactique des mathématiques, existe-t-il des mathématiques propres à la didactique, donc des mathématiques de la didactique ? J'explore cette question dans cet article.

III. DISCUTER DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES ET DE MATHÉMATIQUES DE LA DIDACTIQUE

> Il y a un certain nombre de concepts mathématiques qui n'ont pas d'intérêt pour les mathématiciens – et qui n'ont pas, de ce fait, de statut culturel ou social : par exemple l'énumération d'une collection n'est pas un concept mathématique important et c'est pourtant un concept important pour l'enseignement. Est-ce que la didactique a le droit d'introduire dans le champ des mathématiques des concepts qui lui seraient nécessaires. C'est un sujet dont il va falloir débattre avec la communauté mathématique et avec d'autres. (Brousseau 1998, p. 313)

Le nom de notre domaine d'études, « didactique des mathématiques », est une expression qui vaut la peine d'être regardée de plus près. En effet, lorsqu'on dit didactique *des* mathématiques, on peut penser qu'il y a une certaine possessivité des mathématiques par rapport à la didactique, comme si elle appartenait aux mathématiques, de la même façon qu'on dit une table *de* cuisine, une chaise *de* salon, le crayon *de* Jean, etc. Si on tente l'exercice contraire, cette fois-ci pour les mathématiques, on obtient la possessivité opposée : « mathématiques de la didactique ». Par cette expression, on affirme qu'il existe des mathématiques spécifiques à la didactique, insistant simultanément sur leur existence et sur la prédominance de la didactique (car ce serait elle qui possèderait les mathématiques). Une idée bien bizarre à première vue. Ce jeu sur les mots met toutefois en relief des distinctions qui questionnent le rôle et la signification des termes « didactique » et « mathématiques » dans ces expressions et amène à vouloir mieux les comprendre.

Pour prendre une définition souvent utilisée, on peut dire que la didactique des mathématiques s'intéresse à l'étude des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. On peut être tenté, avec les nouveaux développements en recherche, de parler aussi d'utilisation des mathématiques dans des cadres autres que scolaires (les études en ethnomathématiques, par exemple). Ainsi, on peut dire que la didactique des mathématiques est le domaine d'études qui s'intéresse à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques et aux pratiques et mobilisations diverses des mathématiques. Cette définition satisfait peut-être les chercheurs, mais probablement peu les praticiens ou les formateurs. En effet, la définition ci-haut est davantage la définition d'une didactique de recherche, pourrait-on dire, alors qu'un enseignant ou un formateur peut vouloir désigner la didactique en d'autres termes, par exemple sous l'influence de la dénomination de Martinand (1992) de « didactique praticienne ». De cette entrée sur une didactique davantage axée sur des questions de formation, la didactique des mathématiques devient une façon de faire les choses et d'approcher les questions d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, ainsi qu'une réflexion/sensibilité à rendre communicables ou accessibles les mathématiques pour les faire apprendre, comprendre et mobiliser.

On retrouve dans ces façons de décrire notre domaine des aspects surtout reliés à l'enseignement, l'apprentissage, les pratiques, etc., ceux-ci étant connectés bien évidemment aux mathématiques. Les aspects « didactiques » priment. Toutefois, l'exercice inverse, avec l'expression « mathématiques de la didactique », donne quelque chose du genre : « des mathématiques qui ont une appréhension ou une sensibilité pour l'enseignement, l'apprentissage et les pratiques mobilisées ». Cette entrée fait réfléchir en quelque sorte à un autre champ d'intérêt, dont l'objet d'attention devient les mathématiques (ses connaissances, processus, ses modes de pensée, ses manières de faire, ses pratiques, etc.) et pour l'étude duquel l'entrée privilégiée serait la didactique ; une entrée qui offrirait une couleur particulière aux questions mathématiques abordées. Cet angle possède, d'un point de vue de la formation des enseignants, une entrée intéressante car une partie du travail de formation implique, comme plusieurs auteurs le mentionnent (Ball et Bass 2003 ; Kuzniak 2007 ; Bednarz 2001), un re-travail des mathématiques chez les futurs enseignants pour les aligner davantage aux préoccupations de classe, des élèves et d'enseignement. Ainsi, existe-t-il des mathématiques spécifiques et particulières travaillées à la formation des enseignants, à l'intérieur des « cours de didactique des mathématiques » comme nous les appelons au Québec, et qui sont propres à la didactique et existent uniquement en didactique des mathématiques, comme les mathématiques actuarielles ou celles de l'ingénieur? J'aborde cette idée dans les prochaines sections.

IV. DES MATHÉMATIQUES DE LA DIDACTIQUE : QUELQUES EXEMPLES

Tel que mentionné, plusieurs chercheurs ont souligné les difficultés à dissocier les considérations ou connaissances didactiques de celles mathématiques dans l'acte d'enseigner (voir la synthèse de Huillet 2009). Dans Bednarz et Proulx (2009), nous avons mis de l'avant l'idée que ces composantes de la pratique enseignante sont imbriquées et mobilisées en simultané. Dans la pratique et les choix faits, l'enseignant met parfois une dimension (didactique, mathématique ou pédagogique) plus en avant, mais jamais de façon isolée des autres dimensions : les décisions ne sont jamais « purement » mathématiques, didactiques ou pédagogiques, elles sont les trois en même temps et à différents niveaux. Cette idée d'imbrication peut en fait être poussée plus loin, au point d'en arriver à se demander si les mathématiques mobilisées par l'enseignant ne sont pas liées à la didactique *au point de ne pouvoir être viables sans elle*. Dans ce qui suit, j'offre des exemples permettant de discuter de cette option et d'initier une réflexion. Ces exemples proviennent de différentes sources et sont de différentes natures, tant de la formation des enseignants, de la pratique enseignante, que des travaux de recherche en didactique des mathématiques[1].

[1] Malgré que j'aborde par mes exemples des questions d'enseignement et de formation des enseignants, je ne réfère pas dans cet article aux expressions « mathematics-for-teaching » (voir Davis, 2010) ou « mathématiques pour l'enseignement » (voir Huillet, 2009), qui décrit un courant de recherche très spécifique tentant de comprendre et décortiquer les connaissances et pratiques mathématiques mobilisées par les enseignants lors de l'enseignement des mathématiques (voir le numéro thématique 29(3) de *For the Learning of mathematics,* 2009 ;

1. Connaissances développées en formation des enseignants : des connaissances didactiques mathématisées

Les exemples de cette section sont tirés d'un cours de formation des enseignants de mathématiques du secondaire, que j'ai donné dans mon institution. Un travail a été fait sur les questions d'opérations sur les fonctions, dans le but d'initier une réflexion et sensibilité didactique chez les étudiants au niveau de ce contenu mathématique. J'entre ici sur la nature des connaissances mobilisées par les futurs enseignants à travers ces activités.

Après un travail sur l'analyse de solutions d'élèves, autant les difficultés que les raisonnements fructueux, les futurs maîtres ont à produire deux exercices d'opérations sur les fonctions qu'ils auront à proposer à d'autres futurs enseignants, et pour lesquels ils ont à développer les critères qui guident leurs constructions. Cette tâche amène les futurs enseignants à creuser les concepts mathématiques en jeu pour arriver à développer une tâche qui n'est pas triviale et permet de travailler la notion d'opération sur les fonctions. Par cette tâche, il est évident que les futurs maîtres continuent d'approfondir et raffiner leurs compréhensions du concept en fouillant dans des cas d'exception, des difficultés conceptuelles, des cas impossibles, des cas faciles, etc., mais aussi à développer une justification expliquant en quoi un cas est facile, difficile, impossible, intéressant, etc. Les discussions des futurs enseignants sont alors autant sur les notions mathématiques en jeu pour les opérations sur les fonctions que sur l'apprentissage des notions elles-mêmes. Leur fouille « mathématique » est teintée en même temps d'une fouille « pour faire apprendre », qu'on pourrait appeler « didactique », les deux servant de critères pour produire leurs exercices. Voici quelques exemples proposés par les étudiants maîtres :

$f(x)=x^2-2$ $g(x)=-x^2+2$ $F(x)=f(x)+g(x)$	$f(x)=[2x]$ $g(x)=2x-1$ $F(x)=f(x)+g(x)$	$f(x)=\sin x$ $g(x)=-0{,}41(x-1{,}52)^2+1$ $F(x)=f(x)+g(x)$	$f(x)=2x+4$ $g(x)=-\frac{1}{2}(x+3)^2+1$ $G(x)=f(x)+g(x)$
$f(x)=x^2$ $R\rightarrow R$ $g(x)=\sqrt{x}$ $R^+\rightarrow R^+$ $F(x)=f(x)-g(x)$	$f(x)=\frac{1}{x}$ $si\_x\neq 0$ $g(x)=x+2$ $F(x)=f(x)-g(x)$	$f(x)=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$ $g(x)=-x^2$ $F(x)=f(x)+g(x)$	$f(x)=\|x\|$ $x\in R$ $g(x)=-\frac{1}{8}x^2$ $x\in R$ $G(x)=f(x)-g(x)$
$f(x)=\begin{cases} x+2\_\,]-\infty,-5[\cup]5,\infty[\\ 4\_\_\_\_[-5,5] \end{cases}$ $g(x)=\sqrt{x}+3$ $F(x)=f(x)+g(x)$	$f(x)=-x^2+4$ $g(x)=2^x$ $E(x)=f(x)+g(x)$	$f(x)=[x+3]$ $g(x)=x+2$ $F(x)=f(x)+g(x)$	$f(x)=x^2$ $R\rightarrow R$ $g(x)=-x$ $Z\rightarrow Z$ $E(x)=f(x)-g(x)$

Ces différents exemples sont affichés au mur durant le cours et distribués par la suite à d'autres futurs maîtres pour être solutionnés et discutés. Lors du retour en grand groupe, les exercices sont discutés, critiqués, appréciés et des modifications sont proposées pour les améliorer ou les transformer. De plus, les étudiants qui ont créé les exercices ont à expliquer les critères ayant guidé leurs choix. On en profite alors pour proposer, pour chaque exercice, un autre qui est similaire mais plus simple et un autre plus difficile. Cette activité s'avère une occasion d'approfondir à nouveau les critères, ancrés dans les compréhensions mathématiques

Ball et al., 2009). Mon propos se veut plus large et touche la nature des concepts et pratiques mathématiques travaillés en didactique des mathématiques au sens large, soit à travers ses divers travaux de recherche.

des élèves, c'est-à-dire ce que ces exercices peuvent potentiellement provoquer comme compréhensions mathématiques chez les élèves. Les élèves et leurs apprentissages sont donc constamment présents à l'intérieur des critères « mathématiques » émis par les futurs enseignants pour construire ou modifier les exercices. Voici quelques exemples de critères :

- Poser des opérations qui ne sont pas uniquement des additions et faire travailler sur des soustractions, des multiplications et des divisions pour élargir ce que signifie « opérer sur des fonctions » ;
- Proposer des nombres décimaux rend l'opération difficile à calculer avec précision. Toutefois, ceci ne rend pas nécessairement la conceptualisation de l'opération difficile;
- Travailler avec des constantes permet de voir l'effet de la constante sur l'opération (autant comme image que comme multiplicateur) ;
- Travailler avec plus de deux fonctions rend le processus moins technique, une suite d'opérations permet à l'élève de démontrer vraiment sa compréhension ;
- Offrir des opérations pour lesquelles le résultat est nul à quelques endroits [addition de $f(x) = x$ et $f(x) = |x|$] (ou sur l'ensemble de la nouvelle fonction [addition de $f(x) = x$ et $f(x) = -x$]), rendant le résultat surprenant et forçant sa vérification ;
- Même idée pour la variation des images, en proposant des fonctions qui ont des images positives et négatives et pour lesquelles leur combinaison (+,-,´,¸) offrent des réponses positives ou négatives ;
- Travailler avec des fonctions continues et non-continues, ainsi que des fonctions qui ont des indéterminations, pour s'assurer de la compréhension de l'effet de l'indétermination sur l'opération possible et que les opérations ne se font pas sur des « valeurs » mais sur des images (si indéterminé, pas d'image, donc pas d'opération) [ce jeu peut être étendu à 3, 4, 5 fonctions] ;
- Même idée pour les fonctions discrètes (par exemple, N—>N) jumelées avec des fonctions continues ou définies par parties ;
- Poser des exercices pour lesquels les ensembles de départ et d'arrivée ne sont pas les mêmes et ont des restrictions (par exemple, R—>R ou 2—>2) pour s'assurer que les élèves les prennent en compte et soient vigilants ;
- Offrir des fonctions qui offrent un résultat attrayant esthétiquement, soulignant l'attrait que peut avoir les mathématiques au niveau artistique et esthétique ;
- Jouer sur des exercices ou la réponse s'obtient rapidement et d'autres qui demandent un travail plus en profondeur pour varier le type d'exercices à résoudre et aiguiser la compréhension.

Dans ces quelques critères, il est difficile de dissocier les aspects mathématiques des aspects didactiques : les deux semblent aller ensemble et se compléter. On peut se demander si les connaissances développées dans cette activité de formation sont uniquement didactiques ? Il devient rapidement évident que non seulement les étudiants maîtres ont développé leurs connaissances mathématiques à travers cette activité (ce qui est assez habituel à la formation), mais surtout que ces connaissances mathématiques développées sont ancrées dans une réflexion didactique qui les rend difficilement séparables des compréhensions « mathématiques » en soi. Cette dernière idée apparaît particulièrement intéressante à considérer lorsqu'on demande aux étudiants maîtres d'inventer un exercice d'opérations sur les fonctions *qui peut se résoudre mentalement en passant par le graphique*. Les critères développés pour les exemples choisis ne sont alors pas les mêmes que ceux développés pour la tâche précédente et ont une intention différente : développer chez l'élève une image mentale des opérations sur les fonctions, en s'assurant que le problème soit accessible mentalement. Voici quelques exemples des critères proposés :

- Faire additionner ou soustraire des fonctions simples pour développer une familiarité avec le processus d'opération de fonctions, mais aussi pour développer une image mentale sur ce qui se produit au niveau de l'image obtenue [essayer aussi avec plus de deux fonctions, en demeurant accessible mentalement] ;
- Additionner et soustraire une fonction par une fonction constante (par exemple, $f(x) = x$ et $g(x) = 3$) pour voir le résultat rapidement et comprendre l'impact de la fonction à images constantes ;
- Faire la même chose avec la multiplication et la division, en s'assurant que les fonctions soient accessibles mentalement ;
- Offrir des exercices pour lesquels la fonction résultat est la fonction nulle, pour travailler l'opération sur les valeurs d'images (addition de $f(x) = \text{x}$ et $f(x) = –x$; et $f(x) = -x^2+2$ et $f(x) = +x^2–2$) ;
- Travailler sur des exemples qui guident intuitivement vers une erreur, forçant une réflexion supplémentaire sur le processus d'opération (par exemple, additionner $f(x) = |x|$ et $g(x) = x$ ou soustraire $f(x) = |x|$ et $g(x) = x$), ainsi que pour permettre de voir mentalement ce qui se produit sur des intervalles donnés ;
- Même idée avec des exercices où certaines parties des deux fonctions sont égales et le résultat de l'opération est nul (par exemple, $f(x) = |x|$ et $g(x) = x$).

Ces exemples servent à illustrer l'idée de travail didactique imbriqué aux mathématiques, le tout se faisant en simultané. Cette simultanéité permet d'entrer dans ce qui peut s'appeler des mathématiques au croisement de la didactique ou de la didactique au croisement des mathématiques. En développant leurs compréhensions mathématiques sur les opérations sur les fonctions, les futurs enseignants développent des mathématiques qui ont un sens parce qu'elles sont riches pour faire apprendre le concept d'opérations sur les fonctions. Ce ne sont pas des connaissances mathématiques en elles-mêmes, par exemple sur l'addition de fonctions uniquement pour additionner des fonctions. Ce sont des connaissances mathématiques qui deviennent pertinentes parce qu'elles sont ancrées didactiquement dans l'apprentissage des élèves. Si on enlève la composante « faire apprendre » dans les compréhensions mathématiques reliées au calcul mental d'opérations de fonctions, peut-être enlève-t-on l'intérêt mathématique à savoir faire ceci pour un enseignant? Distinguer mathématiques et didactique est dans ce cas difficile. On pourrait aussi dire que ce type de travail représente un travail habituel réalisé dans un cours de formation à l'enseignement des mathématiques. Il semble alors important de réaliser que si c'est le rôle de la didactique de travailler à ce type de connaissances didactiques mathématisées, alors l'argument que ce type de connaissances mathématiques appartient à la didactique des mathématiques est justifié…

2. *Rationalité des mathématiques mobilisées dans l'enseignement : des connaissances mathématiques didactisées*

Alors que j'ai préalablement parlé de connaissances didactiques mathématisées, car constamment imbriquées dans un contenu mathématique et prenant sens dans ce contenu, j'aborde ici l'idée de connaissances mathématiques « didactisées ». Cette entrée met de l'avant une certaine légitimité mathématique différente, ancrée dans une rationalité sous-jacente qui leur donne un sens…didactique !

L'exemple utilisé provient de la pratique d'une enseignante répertoriée à l'intérieur de la recherche de Saboya (2010) et avec laquelle ma collègue N.Bednarz et moi-même avons soutiré bon nombre d'analyses sur les questions d'imbrication de didactique et de mathématiques (Bednarz et Proulx 2010, 2011). La vignette qui suit concerne l'écriture exponentielle où Nadia, l'enseignante, travaille avec ses élèves à simplifier l'expression $\frac{10^4+10^5}{10^2+10^3}$.

Nadia : $\frac{10^4+10^5}{10^2+10^3}$, on ne peut rien faire avec ça. Ça reste comme ça, on ne peut rien faire.

Lidia : Pourquoi ça ne…

Nadia : Quand c'est des « plus » qu'il y a entre les deux on laisse ça comme ça, on ne peut rien faire.

France : On peut séparer…

Nadia : Non on ne peut pas séparer ça…

France : Ah non?

Nadia : Là si tu le sépares ça fait $\frac{10^4}{10^2}+\frac{10^5}{10^3}$. Ça veut dire que lorsque tu additionnes des fractions, tu additionnes en haut et en bas. Est-ce qu'on a le droit?

France : Non.

Nadia : Non, donc quand tu sépares ça en deux, c'est ça que tu fais.

Anne-Julie : Mais est-ce qu'on peut faire juste $\frac{10^4}{10^2}$?

Nadia : Non. Qu'est-ce que tu fais quand tu fais ça là $\frac{10^4}{10^2}+\frac{10^5}{10^3}$. C'est ça que tu as fait Anne-Julie?

Anne-Julie : Oui.

Nadia : Ça ne marche pas ça, parce que quand tu me dis que tu additionnes deux fractions, tu additionnes en haut et tu additionnes en bas.

Carmen : Mais elles sont additionnables les fractions.

Nadia : Elles sont additionnables, mais uniquement lorsqu'elles ont le même dénominateur.

Une première réaction à cette discussion est de dire que $\frac{10^4+10^5}{10^2+10^3}$ est simplifiable, donnant $\frac{10000+100000}{100+1000}=\frac{110000}{1100}=100$. Dire que cette expression n'est pas simplifiable est une erreur en fonction du savoir mathématique de référence. Toutefois, Nadia ne commet pas une erreur mathématique. En fait, Nadia sait très bien que cette expression se simplifie encore. À titre d'exemple, dans une rencontre de recherche, elle explique ceci à propos de l'exemple $\frac{a^2+a^3}{a^5+a^2}$:

> Je divise par *a* en haut et en bas mais j'ai a^2+a^3, donc ça va faire $\frac{a+a^2}{a^4+a}$. Et là on regarde est-ce qu'on peut encore simplifier ? Je re-divise encore par *a*. Je vais avoir $\frac{1+a}{a^3+1}$ et là je ne peux plus rien faire. Et

> j'ai toujours le *plus* qui est là, on ne peut plus simplifier. Moi je pense que cette approche permettrait de contourner le problème [des élèves avec la simplification d'expressions].

Dans la vignette de départ, Nadia est en contexte de travail de simplification de notations exponentielles entre elles. D'une certaine façon on peut avancer qu'en contexte de notations exponentielles cette expression ne se simplifie plus au niveau des exposants entre eux sans les transformer en autre chose (comme je l'ai fait ou comme Nadia le propose par la division). Ceci amène une première couche de contexte, qu'on pourrait appeler « scolaire » et reliée à une certaine didactique, qui fait en sorte que le savoir mathématique mobilisé, qui semble fautif ou incomplet, est adéquat dans son contexte d'utilisation. On peut dire que ce savoir a légitimité dans ce contexte, et non dans un contexte général de simplification. Mais il y a plus.

C'est en fait pour éviter les erreurs chez ses élèves que Nadia « invente » cette nouvelle connaissance sur les exposants et sur la simplification. C'est ce qui va amener Nadia à dire que l'on ne peut simplifier l'expression et que cela « reste comme ça », parce qu'elle est sensible aux erreurs d'élèves reliées à séparer l'expression en fractions ou à jumeler ensemble les exposants dans un contexte additif. Est-ce un savoir légitime? Oui, dans ce contexte didactique et d'enseignement. Par contre, il n'est probablement pas légitime en contexte de communauté mathématicienne intéressée à simplifier une expression numérique...

Cet extrait montre une mobilisation de connaissances mathématiques qui ont légitimité en contexte didactique, en fonction de la situation d'enseignement et d'apprentissage. Ce ne sont pas toutefois des connaissances « purement » mathématiques, car, sorties de leur contexte didactique, elles sont difficilement légitimes. Ce sont des compréhensions mathématiques spécifiques qui ont leur source dans une réflexion didactique. Ces mathématiques, pourrait-on dire, sont modulées par les intentions didactiques de cette enseignante. Ces connaissances sont-elles des exemples de mathématiques appartenant à la didactique, de mathématiques de la didactique? Peut-être ceci en fait des « mathématiques didactisées », qui n'existent ou ont un intérêt que dans le champ d'études de la didactique des mathématiques…

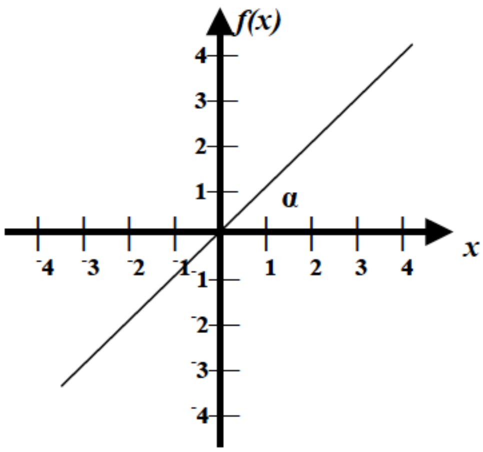
3. *Concepts mathématiques développés en didactique*

Alors que les deux premiers exemples concernaient des actions ou connaissances mathématiques reliées à la formation des enseignants et la pratique enseignante, les trois exemples suivants concernent des concepts mathématiques qui ont été développés suite à des préoccupations, intérêts ou sensibilités didactiques à l'intérieur de travaux de recherche en didactique des mathématiques. Les trois exemples utilisés pour illustrer cette idée sont le concept d'idécimal, le concept de pente analytique et géométrique et le concept de reste variable de la division.

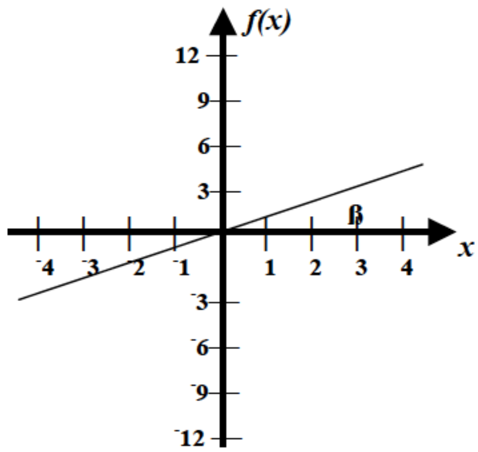
Le concept d'idécimal. Ce concept a été développé par Bronner (1997) pour désigner un nombre qui n'est pas décimal. Par exemple, 1/3 serait *idécimal*, c'est-à-dire non décimal, car 1/3 est une fraction irréductible et son dénominateur n'est pas sous la forme d'un produit de facteurs égaux à 2 et à 5. Cette distinction mathématique entre décimal et idécimal est fort intéressante, particulièrement au niveau didactique alors qu'on voit bien les distinctions qui peuvent être faites pour insister sur certaines propriétés et aspects des nombres rationnels avec lesquels on travaille. Ce type de distinction peut amener à réfléchir en profondeur sur les nombres rationnels, les décimaux, les périodiques, etc., et donc l'invention de ce concept est fort intéressante dans une orientation didactique. Bronner argumente en fait que cette catégorisation est plus pertinente, pour les élèves du secondaire, que la catégorie rationnels/irrationnels. Toutefois, est-ce que ce concept a une légitimité mathématique en dehors de la didactique ? Est-ce un savoir reconnu par la communauté mathématicienne? Une chose certaine est que ce savoir est né en didactique, avec des sensibilités didactiques pour l’apprentissage du concept de nombre rationnel, et il prend légitimité dans ce contexte.

La pente analytique et la pente géométrique. Le concept de pente semble un bon exemple d’un concept qui a été tenu pour acquis comme non problématique assez longtemps et que la didactique (ou les gens sensibilisés aux questions d’enseignement et d’apprentissage des mathématiques) a révélé comme flou ou problématique. Par exemple, dans leur article, Zaslavsky, Sela et Leron (2002) montrent comment l’idée de pente (*slope* en anglais) peut à la fois être interprétée comme objet géométrique ou objet analytique, voire les deux à la fois, chez différentes personnes travaillant avec les mathématiques (mathématiciens, didacticiens, enseignants, élèves). Voici l’exemple de tâche (traduite) qu’ils ont proposé aux différents participants, leur demandant en premier lieu de résoudre la tâche 1 et ensuite la tâche 2.

Tâche 1:
Le graphique de la figure 1 représente la fonction f tel que $f: x \rightarrow x$



Tâche 2:
Un élève a tracé le graphique de la même fonction f (tel que $f: x \rightarrow x$) dans un environnement informatisé et a obtenu le graphique suivant:



Répondez aux questions suivantes:
1. Quelle est la pente de la fonction f ? Comment l’avez-vous déterminée?
2. Est-ce que le graphique de f trace une bissectrice entre les deux axes? Comment le savez-vous?
3. Pouvez-vous trouver la tangente de l’angle entre le tracé du graphique et l’axe des x? Si vous le pouvez, quelle est la valeur? Comment l’avez-vous calculée? Si non, pourquoi? Que représente cette donnée, cette tangente?

Pour Zaslavsky et al., ce type de tâche et la diversité des interprétations et réponses recueillies souligne l’intérêt de faire une distinction entre pente (géométrique) et taux de variation (pente analytique) pour éviter les confusions[2]. Toutefois, cette distinction est-elle légitime comme

[2] Je ne peux parler que du Québec, car je ne connais pas assez le contexte ailleurs sur les changements survenus dans les programmes d’études et les pratiques d’enseignement, mais le concept de « taux de variation », étiqueté comme tel, n’était pas vraiment présent dans l’enseignement avant les mi-années 1990 au secondaire, alors

savoir de référence au niveau de la communauté mathématicienne ? Dans l'étude en question, la diversité des réponses fournies par les mathématiciens entre eux (et les didacticiens entre eux, en plus de celle retrouvée chez les enseignants et les élèves) permet de questionner cette légitimité. Peut-être que la légitimité mathématique de la notion de pente et de taux de variation (tel qu'employée au secondaire) se situe dans le cadre de la didactique ou dans les réflexions, préoccupations et sensibilités didactiques qui les accompagnent ?

Le reste variable de la division. Ce troisième exemple illustre un travail didactique pouvant amener au développement de propositions sur des concepts mathématiques, créant une rupture avec les savoirs mathématiques de référence, mais possédant une richesse didactique pour en comprendre ces mêmes concepts.

Tel que l'explique Brown (1981), la définition de la division euclidienne respecte certaines conventions – ou conditions – ainsi le reste *r* est défini comme étant situé entre 0 et le diviseur[3]. Ainsi, $18 \div 4$ donne $4r2$ et non $3r6$, malgré que les deux sont conceptuellement acceptables au niveau du raisonnement sur le processus de division sous-jacent. Brown s'est en fait intéressé à cette idée suite à l'analyse des compréhensions d'une élève, Sharon, ce qui l'a amené à considérer l'idée de reste variant pour lequel différentes réponses seraient données à la division en fonction du reste. Ainsi, $18 \div 4$ pourrait donner $4r2$, $3r6$, $2r10$, $5r^{-}2$, etc. Cette idée de reste variable de la division, au niveau didactique, permet particulièrement de questionner la présence des conventions et définitions en mathématiques, distinguant alors l'idée de comprendre un concept et celui de connaître la convention, un jeu parfois enfoui à l'intérieur de la procédure souvent tenue pour acquise dans la compréhension mathématique.

Avec une collègue (Proulx et Beisiegel 2009), nous nous sommes intéressés à mieux comprendre l'impact de cette définition et le sens qui peut être donné à la division *avec les nombres négatifs*. Sans vouloir créer un reste de division variable comme le fait Brown, le travail fait ressortir qu'en appliquant la définition de la division avec les nombres négatifs ce sont les réponses elles-mêmes qui sont variables. Ainsi, que vaut $^{-}18 \div 4$? $^{-}5r2$? $^{-}4r^{-}2$? $^{-}6r^{-}6$? Quelle réponse respecte la convention? Doit-on développer une convention de la division pour les nombres négatifs ? Comment la définir ?

La question qui se pose dans le cas de Brown et du nôtre est si ce type de questionnement mathématique a légitimité dans la communauté mathématicienne et si les savoirs qui en sont développés (reste variable, définition de division chez les négatifs) ont légitimité mathématique en dehors de la didactique. Une chose certaine est que ces idées ont été développées à partir d'un intérêt didactique. Ainsi, ces connaissances mathématiques ont légitimité dans le champ de la didactique, parce que tout comme le concept d'idécimal de Bronner, ils ouvrent sur une sensibilité mathématique qui semble porteuse. Il y a en effet dans ces idées un potentiel mathématique, en dehors des créneaux habituels des savoirs de références, pour l'apprentissage mathématique et la compréhension du concept. Est-ce un potentiel « didactisé », c'est-à-dire une façon de rendre communicable les concepts mathématiques? Est-ce que ces mathématiques didactisées représentent des exemples de mathématiques de la didactique?

Ces idées m'apparaissent, comme didacticien des mathématiques (ou mathématicien de la didactique!) fort pertinentes et porteuses pour la formation des enseignants, en ce sens qu'elles aident à développer des « façons de faire ou une réflexion/sensibilité à rendre communicables ou accessibles les mathématiques pour les faire apprendre et comprendre » ou

---

qu'on ne parlait que de pente. À titre d'exemple, des collègues et moi-même avons été initiés à ce concept pour le secondaire uniquement par la didactique lors de nos études universitaires.

[3] Je parle ici de la division euclidienne, mais on retrouve ce principe pour l'algorithme de division, alors qu'il faut continuer à diviser tant que le reste est plus gros que le diviseur.

encore de développer des connaissances « mathématiques qui ont une appréhension ou une sensibilité sur l'enseignement, l'apprentissage et les pratiques mobilisées ». Par contre, en dehors de la communauté didacticienne, on est en droit de se questionner sur l'intérêt, la viabilité ou la pertinence de ces concepts « mathématiques ». Mais, peut-être est-ce là aussi des exemples de mathématiques de la didactique : des savoirs mathématiques qui n'existeraient ou n'auraient légitimité que dans le champ de la didactique des mathématiques…

V. REMARQUES FINALES ET OUVERTURES SUR LA FORMATION

Il m'est arrivé d'affirmer, en conférence, que les enseignants autant du primaire que du secondaire n'ont pas besoin de connaître les mathématiques avant de faire de la didactique (Proulx 2010). Mes propos étaient maladroits, car ils étaient entendus comme si j'affirmais que les mathématiques n'étaient pas importantes en didactique des mathématiques ou pour les enseigner. Par contre, mon argument était plutôt que par la didactique des mathématiques les enseignants arrivent à ré-apprendre les mathématiques qui leur font ou non défaut ; une bien vieille idée s'il en est une. Mes propos voulaient aussi contraster avec la critique fréquemment formulée au fait que les futurs enseignants (secondaire/primaire) connaissent mal ou ne connaissent pas suffisamment les mathématiques et qu'il est impossible de faire de la didactique avec eux sans qu'ils aient fait un « rattrapage mathématique ». Mes travaux de recherche menés sur ces questions à la formation continue des enseignants du primaire et du secondaire, ainsi que mes propres pratiques de formateur à la formation initiale au primaire et au secondaire, m'amènent à être en désaccord avec cette vision linéaire situant les mathématiques comme préalables au travail didactique dans le processus de formation des enseignants ; de plus, je considère que 12 ans de scolarité en mathématiques (au Québec du moins, et parfois jusqu'à 14 ans pour les enseignants du secondaire) avant d'entrer à l'université en formation des enseignants est suffisant comme expérience *préalable* en mathématiques.

Cette intervention maladroite continue toutefois à me faire réfléchir, particulièrement en lien avec les questions et idées avancées ici. Car, s'il existe vraiment des mathématiques spécifiques à la didactique des mathématiques, ou un travail mathématique propre à la didactique (Corriveau 2010), alors il peut paraître normal, dans un premier temps, que les futurs enseignants éprouvent des difficultés mathématiques dans les cours de formation à l'enseignement (que nous appelons au Québec des cours de didactique des mathématiques). En effet, celles-ci représentent de « nouvelles » mathématiques ou de « nouvelles » façons de faire et d'appréhender les concepts et raisonnements en mathématiques, et ils ne les ont pas vraiment rencontrées jusqu'à maintenant dans leur parcours scolaire (les programmes d'études du primaire et du secondaire n'ont pas en effet comme objectif de former des futurs enseignants!). Dans un deuxième temps, le travail simultané de mathématiques et de didactique dans un cours de formation à l'enseignement apparaît pertinent, car les mathématiques à voir sont celles de la didactique et ne peuvent que difficilement être travaillées ailleurs que dans ce type de cours (les mathématiques de la didactique ne sont en effet pas celles du mathématicien, ni de l'ingénieur, etc., et ni celles des programmes d'études !).

Ceci étant dit, une chose demeure certaine : ces réflexions sont importantes pour les questions de formation des enseignants, où on s'affaire souvent à mieux comprendre et mieux penser les contenus de formation. Ces réflexions sur la nature des mathématiques en didactique sont importantes parce que, d'un côté, les critiques vis-à-vis les connaissances mathématiques des futurs enseignants sont nombreuses et que ce contexte se doit sérieusement d'être repensé et nuancé et, d'un autre côté, parce que les questions d'articulation de formation mathématique et de formation didactique en dépendent et seront pensées autrement en fonction de la façon de percevoir et conceptualiser *ces* mathématiques. La question de savoir s'il existe des mathématiques propres à la didactique reste donc entière, peut-être de la même façon que celle de savoir s'il existe réellement une didactique spécifique aux mathématiques. Toutefois, cette question est importante et mérite d'être explorée, particulièrement parce que les mathématiques jouent pour plusieurs un rôle central en didactique des mathématiques et à la formation des enseignants.

REFERENCES

Ball D. L. (2000) Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, 51*(3), 241-247.

Ball D. L., Bass H. (2003) Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. *Actes de la rencontre 2002 du Groupe Canadien d'étude en didactique des mathématiques* (pp. 3-14). Edmonton, Canada: GCEDM.

Ball D. L., et al. (2009) RF01: Teacher knowledge and teaching. *Proceedings of the 33rd conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 121-150). Thessalonique, Grèce: PME.

Bednarz N. (2001) Didactique des mathématiques et formation des enseignants : le cas de l'Université du Québec à Montréal. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, *1*(1), 61- 80.

Bednarz N. (2007) Ancrage de la didactique des mathématiques au Québec : à la recherche de sens et d'une cohérence. *Actes du colloque 2007 du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec* (pp. 21-61). UQÀR : GDM.

Bednarz N., Perrin-Glorian M.-J. (2003) Formation à l'enseignement des mathématiques et développement de compétences professionnelles: Articulation entre formation mathématique, didactique et pratique. *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2003*. Tunis: Éditions CNP.

Bednarz N., Proulx J. (2009) Knowing and using mathematics in teaching: Conceptual and epistemological clarifications. *For the Learning of Mathematics 29*(3), 11-17.

Bednarz N., Proulx J. (2010) De quel contexte parle-t-on ? Une exploitation de mathématiques professionnelles avec les enseignants. *Actes du colloque 2010 du Groupe des Didacticiens de Mathématiques du Québec* (pp. 182-192). Moncton, N.-B.: GDM.

Bednarz N., Proulx J. (2011) An attempt at defining teachers' mathematics through research on mathematics at work. *Actes du colloque CERME-7* (pp. 2569-2579). Rseszow, Poland: University of Rseszow & ERME.

Bronner A. (1997) *Etude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée.* Thèse de doctorat. Université J. Fourier. Grenoble, France.

Brousseau G. (1998) *Théorie des situation didactiques*. Grenoble : La Pensée sauvage.

Brown S.I. (1981). Sharon's 'Kye'. *Mathematics Teaching 94*, 11-17.

Corriveau C. (2010) Que signifie faire des mathématiques dans un cours de didactique des mathématiques ? In Proulx J., Gattuso L. (dirs.) (pp. 159-163) *Formation des enseignants en mathématiques : Tendances et perspectives actuelles.* Sherbrooke, QC : Éditions du CRP .

Davis B. (2010) Concept studies : designing settings for teachers' disciplinary knowledge. *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol.1, pp. 63-78). PME.

Even R. (1993) Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education 24*(2), 94-116.

Even R. (1990) Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics 21*, 521-544.

For the Learning of Mathematics (2009) *Knowing and using mathematics in teaching*, *29*(3) [numéro thématique].

Huillet D. (2009) Mathématiques pour l'enseignement : une approche anthropologique. *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2009*. Dakar, Sénégal.

Kuzniak A. (2007) Savoir mathématique et enseignement didactique et pédagogique dans les formations initiales du premier et du second degrés. *Recherche et formation* 55, 27-40.

Martinand J.-L. (1993) Organisation et mise en œuvre des contenus d'enseignement. *Actes de colloque Recherches en didactiques: contribution à la formation des maîtres, 13-15 février 1992* (pp. 25-26). Paris : Éditions Jacques Colomb.

Moon B. (1986) *The 'new maths' curriculum controversy: An international story*. London : Falmer Press.

Proulx J. (2010, juin) *Les enseignants du secondaire doivent-ils vraiment connaître et maîtriser les concepts mathématiques à enseigner avant de faire de la didactique des mathématiques ?* Texte présenté lors du colloque 2010 du Groupe des Didacticiens de Mathématiques du Québec. Moncton, N.-B. : GDM.

Proulx J., Beisiegel M. (2009) Mathematical curiosities about division of integers. *The Montana Mathematics Enthusiast 6*(3), 411-422.

Proulx J., Gattuso L. (dirs.). (2010) *Formation des enseignants en mathématiques : Tendances et perspectives actuelles.* Sherbrooke, QC : Éditions du CRP.

Saboya M. (2010) *Élaboration et analyse d'une intervention didactique co-construite entre chercheur et enseignant*. Thèse de doctorat. Université du Québec à Montréal. Montréal, Canada.

Shulman L.S. (1986) Those who understand teach: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher 15*(2), 4-14.

Zaslavsky O., Hagit S., Leron U. (2002) Being sloppy about slope: The effect of changing the scale. *Educational Studies in Mathematics 49*(1), 119-140.