RECHERCHE COLLABORATIVE ET DÉMARCHE D'INVESTIGATION : DES MATHÉMATIQUES POUR APPRÉHENDER LE RÉEL

Benoît RAY* – Saïd AZZIZ* – Geneviève COUDERC* – Viviane DURAND-GUERRIER*

Henri SAUMADE* – Mireille SAUTER* – Sébastien VIRDUC*I – Sonia YVAIN*

Résumé – Les programmes officiels français du primaire et du secondaire mettent en avant l'importance de la démarche d'investigation, qui a cependant du mal à trouver sa place dans les pratiques ordinaires. Au sein du groupe ResCo de l'IREM de Montpellier, nous avons choisi d'intégrer ces démarches dans un travail collaboratif, autour de problèmes mathématiques appliqués au réel. Nous présentons tout d'abord rapidement la place de la démarche d'investigation dans les programmes français de l'école primaire, du collège et du lycée. Dans un deuxième temps, nous décrivons le dispositif de résolution collaborative de problèmes que nous avons développé.

Mots-clefs : démarche d'investigation en mathématiques; résolution collaborative de problème ; problèmes de recherche ; communication mathématique ; débat scientifique

Abstract – French primary and secondary syllabus enlighten the importance of investigation in mathematics. However, it is difficult for teachers to engage their students in such a way of teaching mathematics. The research team ResCo from the IREM of Montpellier has made the choice of integrating such perspective with problem in relationship with "real world" problems, in collaborative learning. We first present the French syllabus on this topic. Then, we describe our design of "collaborative problem solving".

Keywords: investigation in mathematics, collaborative problem solving, research problems, mathematical communication, scientific debate

I. INTRODUCTION

Les programmes officiels français de l'école primaire, du collège et du lycée mettent en avant l'importance de la démarche d'investigation, qui a cependant du mal à trouver sa place dans les pratiques ordinaires. Au sein du groupe ResCo (Résolution Collaborative de problèmes) de l'IREM de Montpellier, nous avons choisi d'intégrer ces démarches ainsi que des démarches expérimentales dans un travail collaboratif, autour de problèmes mathématiques ancrés dans le réel, ceci afin de permettre un questionnement sur les rapports qu'entretiennent les mathématiques avec les autres champs de l'activité humaine. Nos recherches portent sur des problématiques diverses, comme le choix des problèmes mathématiques et des situations associées, les conditions de la recherche et l'organisation des échanges. Nous nous intéressons également aux changements de postures des élèves et des enseignants induits par ce dispositif, ainsi qu'aux apports potentiels de cette démarche collective pour les différents acteurs impliqués.

Nous présentons tout d'abord rapidement la place de la démarche d'investigation dans les programmes français de l'école primaire, du collège et du lycée. Dans un deuxième temps, nous décrivons le travail collaboratif que nous avons développé au sein du groupe ResCo de l'IREM de Montpellier.

* IREM de Montpellier – France – benoitray@yahoo.fr, said.azziz@neuf.fr, genevieve.couderc@ac-montpellier.fr, viviane.durand-guerrier@univ-montp2.fr, math.saumade@wanadoo.fr, mireille.sauter@orange.fr, s.virduci@free.fr, y_sonia@club-internet.fr

© Ray B., Azziz S., Couderc G., Durand-Guerrier V., Saumade H., Sauter M., Virduci S., Yvain S. (2012) Recherche collaborative et démarche d'investigation : des mathématiques pour appréhender le réel. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT10, pp. 1453–1463). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

II. DEMARCHE D'INVESTIGATION ET TEXTES OFFICIELS

1. *Les programmes de collège et de l'école primaire et le socle commun de connaissances*

En France, le terme de démarche d'investigation apparaît pour la première fois dans les programmes de collège (élèves de 11 à 15 ans) en 2005[1] à travers des textes portant sur une introduction commune à l'ensemble des disciplines scientifiques au collège. La démarche d'investigation y est présentée comme une méthode pour développer chez les élèves une culture scientifique ; démarche commune aux mathématiques, aux sciences de la vie et de la terre et aux sciences physiques, il est cependant noté que :

> la spécificité de chaque discipline conduit à penser différemment, dans une démarche d'investigation le rôle de l'expérience et le choix du problème à résoudre. (B.O. hors série n° 5 du 25 août 2005)

Dans ces programmes un canevas est proposé, décrivant des étapes à adapter aux situations choisies, simples repères, qui jalonnent une démarche d'investigation. On y mentionne 7 étapes (p. 4) :

- le choix d'une situation problème ;
- l'appropriation du problème par les élèves ;
- la formulation de conjectures, d'hypothèses explicatives, de protocoles possibles ;
- l'investigation ou la résolution du problème conduit par les élèves ;
- l'échange argumenté autour des propositions élaborées ;
- l'acquisition et la structuration des connaissances ;
- la mobilisation des connaissances.

La spécificité des mathématiques et des autres disciplines est pointée en ce qui concerne la validation, par la démonstration d'un côté et par l'expérimentation de l'autre.

Si la description d'une démarche d'investigation est bien détaillée dans ces programmes, elle apparaît également dans les programmes de l'école primaire, et il est demandé qu'elle soit évaluée dans le cahier de compétences en fin de cycle 3 sous la forme suivante :

> pratiquer une démarche d'investigation (savoir observer, questionner), manipuler et expérimenter, formuler une hypothèse et la tester, argumenter, mettre à l'essai plusieurs pistes de solutions. ([1] B.O. hors série n° 3 du 19 juin 2008)

Il faut noter que, pour les mathématiques, la démarche d'investigation est assez proche de ce que certains auteurs appellent la démarche expérimentale (voir à ce sujet le dossier de veille scientifique de l'INRP (Kuntz 2007)). Les textes officiels eux-mêmes utilisent les deux expressions, comme on le voit dans le texte de loi voté en 2006 définissant « le socle commun de connaissances et de compétences à acquérir pour tous les élèves à la fin de la scolarité obligatoire »[2].

Ce socle se veut être l'ensemble des savoirs indispensables « *que la nation fixe comme mission première à l'école de faire partager aux élèves* ». Il est divisé en sept domaines et l'enseignement des mathématiques en concerne plusieurs, en particulier, le domaine 3 : « *Les principaux éléments de mathématiques et la culture scientifique et technologique* », le domaine 7 : « *L'autonomie et l'initiative* ». Dans le domaine 3 (ibid. p. 11), l'élève doit être capable de pratiquer une démarche scientifique : raisonner, argumenter, pratiquer une démarche expérimentale (émettre une hypothèse, formuler un problème, proposer une méthode, un outil adapté, faire des essais, modéliser de façon élémentaire …). Dans le domaine 7 (ibid. pp. 18-19), l'élève doit être capable de : s'impliquer dans un projet

[1] B.O. hors série n° 5 du 25 août 2005
[2] J.O n° 160 du 12 juillet 2006

individuel ou collectif, savoir travailler en équipe, manifester curiosité, créativité, savoir prendre des initiatives et des décisions. Ces compétences font partie de celles qui sont travaillées dans le cadre de la recherche collaborative de problème que nous présentons au paragraphe suivant.

2. La démarche d'investigation dans les programmes de lycée

Dans les programmes de seconde générale, l'objectif principal reste de :

> former les élèves à la démarche scientifique sous toutes ses formes pour les rendre capables de modéliser et s'engager dans une activité de recherche, (…) pratiquer une activité expérimentale ou algorithmique. Les problèmes posés doivent pouvoir s'exprimer de façon simple et concise et laisser dans leur résolution une place à l'autonomie et à l'initiative des élèves. La diversité des activités proposées (…) doit permettre aux élèves de prendre conscience de la richesse et de la variété de la démarche mathématique et de la situer au sein de l'activité scientifique. (B.O. n° 30 du 23 juillet 2009)

La volonté d'intégrer la résolution de problèmes se retrouve dans les programmes des classes du cycle terminal de l'enseignement général :

> les activités proposées en classe et hors du temps scolaire prennent appui sur la résolution de problèmes purement mathématiques ou issus d'autres disciplines. De nature diverse, elles doivent entraîner les élèves à chercher, expérimenter, modéliser, en particulier à l'aide d'outils logiciels, choisir et appliquer des techniques de calcul, mettre en œuvre des algorithmes, raisonner, démontrer, trouver des résultats partiels et les mettre en perspective, expliquer oralement une démarche, communiquer un résultat par oral ou par écrit. (B.O. spécial n°9 du 30 septembre 2010)

Ces objectifs sont présents également dans les programmes de lycée professionnel :

> La formation a pour objectifs de former les élèves à l'activité mathématique et scientifique par la mise en œuvre des démarches d'investigation et l'expérimentation initiées au collège (…). (B.O. spécial n° 2 du 19 février 2009)

3. À propos des conditions de mise en œuvre de la démarche d'investigation en mathématiques

Il est assez clair que ces recommandations des programmes sont peu suivies d'effet, pour diverses raisons. Tout d'abord pour des questions de temps : il n'est pas toujours facile pour les professeurs d'accepter de passer du temps sur des activités qui ne sont pas directement liées aux notions du programme. Mais il y a également des raisons liées à la nécessité de mettre en place avec les élèves un contrat didactique différent du contrat habituel de la classe ; la prise d'autonomie des élèves et l'invitation à la créativité génèrent dans la classe de l'incertitude, qui rend plus complexe la gestion de la classe. Autrement dit, pour atteindre ces objectifs, il faut que se produisent des changements de postures chez les enseignants et les élèves.

Il paraît donc essentiel de proposer un accompagnement pour permettre aux enseignants de s'engager avec leurs élèves dans ce type d'activité, qui nécessite la mise en œuvre de tâches inhabituelles et de nouveaux dispositifs. C'est dans cette perspective que le groupe ResCo mène, depuis plusieurs années, des travaux de recherche qui lient travail collaboratif et démarches d'investigation, en lien étroit avec la formation continue au sein de l'IREM de Montpellier.

III. LE TRAVAIL COLLABORATIF : OBJECTIFS, ACTEURS ET COMMUNAUTE

1. *Objectifs du travail collaboratif*

Faire des mathématiques c'est résoudre des problèmes, c'est ce que disent les programmes officiels de l'enseignement des mathématiques depuis le milieu des années 80 et les travaux de recherche en Didactique comme ceux de Brousseau (1998) ou Douady (1994). L'organisation du travail peut être individuelle (problèmes donnés en classe ou en temps libre) ou plus rarement collective (dans le cadre de travaux de groupes). Le développement des outils de communication informatiques, favorisant le travail à distance, a permis l'émergence de nouvelles pratiques pédagogiques dans l'enseignement des mathématiques. C'est dans cette dynamique que nous nous inscrivons en proposant la résolution de problèmes de façon collective, en faisant intervenir plusieurs classes, et collaborative par les échanges d'idées et de procédures entre ces classes, en utilisant une plateforme informatique (Sauter 2008). L'aspect technologique n'est pas le véritable centre d'intérêt ; l'objectif est de mettre en évidence les potentialités pédagogiques d'une activité collaborative ainsi que les variables cognitives qu'elle fait intervenir : se représenter le problème (l'énoncé est *a priori* non mathématique), communiquer (échanges, naissance d'une communauté de recherche), modéliser (création d'un cadre théorique riche par divers apports). Sur l'aspect « technologique » et le développement d'outils informatiques dans les recherches collaboratives de problèmes, on peut se référer aux travaux sur le système OCAF (Object-oriented Collaboration Analysis Framework), qui fournit à la fois des mesures qualitatives et quantitatives d'un travail en collaboration (Komis 2003).

La résolution collaborative de problèmes est un dispositif particulier de recherche de problèmes ouverts. Cette pratique pédagogique a pour objectif de placer l'élève dans une activité mathématique où il se retrouvera dans une position semblable à celle d'un chercheur en mathématiques. Dans cette perspective, le but de la recherche n'est pas seulement d'aboutir à la solution, le plaisir et la curiosité sont des aspects importants, le cheminement et l'obtention de résultats partiels sont valorisés. Au cours de cette résolution collaborative, l'élève pourra être amené à poser et à formuler lui-même d'autres problèmes. Ce dispositif se distingue par trois spécificités majeures : les acteurs (enseignants, tuteurs et élèves) qui constituent une communauté de pratique au sens de Wenger (1998), les problèmes posés en dehors du cadre mathématique, l'organisation des échanges entre les classes avec un calendrier de recherche commun.

Ce dispositif de travail repose sur l'hypothèse que la richesse, due à la mixité d'idées et de niveaux, favorise les changements de postures des enseignants et des élèves. En particulier, en changeant leur perception des mathématiques, il permet de rendre confiance à des élèves démotivés et de valoriser des compétences habituellement peu exploitées.

2. *Les acteurs du travail collaboratif*

Pour décrire ce dispositif, nous faisons référence aux communautés de pratique au sens de Wenger car nous pouvons parler d'un « groupe dont les membres s'engagent régulièrement dans des activités de partage de connaissances et d'apprentissage à partir d'intérêts communs ». On peut identifier trois dimensions de ce concept, à savoir : l'engagement mutuel des individus, l'entreprise commune et le répertoire partagé. Une communication sur ce sujet a été faite à EMF 2006 (Combes et Sauter 2007).

Dans cette communauté, les individus vont mettre en commun leurs compétences souvent complémentaires, prendre des décisions collectives, et communiquer afin d'élaborer de nouvelles connaissances par mutualisation des productions. On distingue trois groupes de personnes qui interagissent : les tuteurs, les enseignants et les élèves.

Les tuteurs sont des professeurs de collège ou de lycée et un universitaire. Leur rôle pédagogique est de choisir le problème et de faire des recherches documentaires. L'universitaire est le coordonnateur, l'auteur de la relance, du bilan et de la clôture du problème. Ils ont aussi la mission de réguler et modérer le groupe de recherche ainsi que de créer et d'entretenir un climat de confiance pour encourager les enseignants dans leur travail collaboratif et éviter ainsi les risques d'abandon. Il est à préciser que la double fonction de tuteur-enseignant des responsables facilite la cohésion du groupe et la communication entre les membres. Les tuteurs décident du calendrier de recherche, constituent les groupes, et sont les personnes ressources pour l'utilisation du forum et de la plateforme.

Les enseignants sont souvent des stagiaires inscrits volontairement à une formation continue qui demande une implication et un engagement plus importants que dans les stages classiques. Ils doivent engager une ou plusieurs de leurs classes en collaboration avec d'autres classes en échangeant régulièrement leurs travaux de recherche via la plateforme. Ceci nécessite de leur part une responsabilisation importante, afin de respecter le calendrier, les périodes de recherches et d'échanges, et une certaine réactivité sur la lecture et le traitement des informations qui parviennent sur le forum. La résolution collaborative engage également des enseignants non stagiaires, soit d'autres académies, voire d'autres pays (Canada), soit ayant déjà suivi la formation par le passé.

Les élèves engagés par leur professeur ont un niveau allant de la sixième à la terminale, et sont issus des collèges, des lycées généraux et techniques ou professionnels. Les groupes de recherches sont composés de 3 ou 4 classes de niveaux différents mais proches.

IV. LE CHOIX DES PROBLEMES ET LEUR CONTEXTUALISATION

1. Les caractéristiques générales des problèmes

Depuis plusieurs années, les problèmes proposés sont issus de situations concrètes hors cadre mathématique et sont très ouverts au sens où, *a priori*, plusieurs choix de mathématisation sont envisageables. Le contenu étant intuitif et volontairement « flou », les élèves doivent entrer dans une démarche d'investigation, explorer le problème posé, envisager des pistes de résolution, envisager des choix permettant un traitement mathématique du problème, mettre au point des procédures de résolution et de validation, vérifier la vraisemblance et la cohérence des solutions.

Le problème n'a pas forcément de solution unique, les réponses que l'on peut y apporter dépendent des choix initiaux, des hypothèses et du modèle choisi ; le problème est donc évolutif, et nécessite des échanges pour faire avancer les recherches dans le même sens. Dans ce type de situation, moins balisée que les activités classiques, les élèves sont amenés à mettre en relation des objets concrets ou des objets mathématiques familiers avec des outils mathématiques qu'ils élaborent eux-mêmes au cours du processus de recherche collaborative.

Des références communes aux problèmes ouverts dans le sens d'Arsac et Mante (2007) peuvent être relevées :

> l'énoncé n'induit ni la méthode, ni la solution ; le problème se trouve dans un domaine conceptuel avec lequel les élèves ont assez de familiarité ; ainsi peuvent-ils prendre facilement possession de la situation et s'engager dans des essais, des conjectures, des projets de résolution, des contre-exemples.

D'autres contraintes plus spécifiques à la résolution collaborative sont à considérer :

- le problème est suffisamment riche pour être abordé à tous les niveaux de l'enseignement secondaire ;
- les solutions trouvées peuvent n'être que partielles, comme c'est le cas dans la recherche en mathématiques ;
- la dimension expérimentale des mathématiques est partie prenante dans la recherche de la solution ;
- le problème est posé dans un contexte non mathématique, le début du travail collaboratif étant centré sur le travail de mathématisation du problème.

2. L'exemple du problème de l'artiste

Ce problème, posé en 2009-2010 dans le cadre de la résolution collaborative, a été cherché dans 35 classes sous la forme suivante :

Un artiste contemporain veut réaliser une œuvre sur un support rond, en plantant des clous sur le pourtour et en tendant des fils entre les clous. Il se propose de peindre chaque zone d'une couleur différente.
De combien de couleurs aura-t-il besoin ?

Il s'agit d'une « contextualisation » du problème classique des cordes, paru entre autres sur le site de l'IREM de Lyon dans *La feuille à problèmes*[3] :

On place n points sur un cercle. Combien de régions détermine-t-on à l'intérieur de ce cercle en joignant les points deux à deux ?

Ce problème de dénombrement, posé dans un cadre géométrique, vérifie un grand nombre des contraintes évoquées auparavant. En particulier, il peut être abordé à tous les niveaux de l'enseignement, le domaine conceptuel est familier aux élèves, tous les élèves peuvent s'engager dans la recherche, la démarche expérimentale est nécessaire à la recherche d'une solution générale, aucune méthode n'est induite par l'énoncé, plusieurs procédures de résolutions sont envisageables et les solutions trouvées sont souvent partielles.

Plus généralement, nous appelons « contextualisation » d'un problème mathématique un énoncé posé dans le cadre d'une situation fictive mais réaliste et dont la mathématisation renvoie (ou peut renvoyer) au problème mathématique de départ ; un même problème peut donc avoir plusieurs contextualisations.

Par ailleurs, nous faisons l'hypothèse qu'un problème posé en-dehors du champ des mathématiques favorise sa dévolution. Cela participe également à un changement de perception des mathématiques qui ne sont pas ici vues comme un objet d'étude mais comme un outil de réflexion et de modélisation du réel.

Une autre raison, plus conjoncturelle, réside dans la confidentialité de la solution (ou des solutions) du problème : de nombreux éléments de réponse au problème des cordes sont disponibles sur Internet. Or les élèves travaillent sur le même problème pendant cinq semaines et nous souhaitons qu'ils ne trouvent pas d'emblée une solution en ligne.

Dans le cas du problème de l'artiste, le choix du contexte a permis un riche travail autour de la représentation du réel par les mathématiques et des choix subordonnés (modélisation des clous par des points, des fils par des segments, des zones par des surfaces…) et une réflexion sur cette représentation (la taille des objets, qui n'intervient pas dans le problème mathématisé, pourrait se révéler cruciale dans la réalité).

---

[3] http://irem-fpb.univ-lyon1.fr/feuillesprobleme/

V. L'ORGANISATION DE LA RECHERCHE

1. Les échanges

Les classes d'un même groupe communiquent entre elles. Les échanges sont assumés par le professeur qui, via une plateforme, envoie des documents écrits : questions (mathématiques et non-mathématiques), réponses, procédures, projets de résolution, résultats partiels (corrects ou non), éventuellement illustrés de dessins, schémas…

Ce mode de communication est moins aisé que les échanges oraux qui peuvent se faire en d'autres circonstances à l'intérieur d'une même classe, et rend plus difficile la possibilité pour certains de convaincre le groupe d'adopter leur « solution ». Cependant, les échanges à distance rendent indispensable le passage à l'écrit. Rédiger une synthèse des travaux avant chaque envoi permet d'éclaircir et d'affiner des idées qui, exprimées oralement, resteraient parfois à l'état d'ébauches. Ces interactions dans la classe et entre classes requièrent les qualités du débat oral associées à la rigueur exigée par l'écrit argumentatif.

2. L'organisation de la recherche

Les travaux se déroulent sur cinq semaines, à raison d'une séance par semaine. Les élèves alternent les recherches en groupes, les travaux individuels et les phases de mise en commun. L'organisation de la recherche décrite ici est une proposition, soumise aux choix de chaque professeur, qui s'engage néanmoins à respecter certaines contraintes du calendrier commun.

Lors de la première semaine, chaque classe prend connaissance de l'énoncé du problème. Les élèves sont souvent décontenancés par l'absence *a priori* de mathématiques. En groupes, les élèves rédigent des questions, mathématiques ou non, pour s'approprier la situation. Les discussions sur les questions qui pourraient paraître secondaires sont essentielles, permettant aux élèves de faire des choix argumentés. En fin de séance, une mise en commun est effectuée puis envoyée aux autres classes du groupe. Voici un exemple recueilli en 2009-2010 :

- *Quel est le diamètre du support rond ?*
- *De combien de clous aura-t-il besoin ?*
- *Combien de clous peut-il utiliser au maximum ?*
- *Quelles sont les longueurs maximale et minimale des fils ?*
- *Comment sont disposés les clous ?*
- *Les fils sont-ils de la même longueur ?*
- *Peut-on croiser les fils ?*
- *A-t-on le droit de faire partir plusieurs fils du même clou ?*
- *Quel est l'espacement entre les clous ?*
- *Est-ce que le rond peut être une sphère ?*
- *Peut-on accrocher des fils aux fils déjà placés ?*

Encart 1 – *Questions des élèves de la classe de Seconde 12 du Lycée Maillol de Perpignan*

A la séance suivante, les élèves, en groupes, répondent aux questions des autres classes. Les groupes les plus avancés se lancent dans la recherche, émettent et formulent les premières conjectures. En fin de séance, une mise en commun est effectuée, puis les réponses et réflexions sont envoyées aux autres classes du groupe.

- *Réponse 1 : C'est une variable ; on souhaite étudier son influence sur le problème.*
- *Réponse 2 : Il n'est pas nécessaire de connaître les dimensions du support. En effet, nous cherchons à connaître le nombre de zones et non la superficie de chaque zone. En augmentant la superficie du support, on augmente la superficie des zones mais le nombre de zones reste inchangé. Dans ce problème, les dimensions du support n'ont pas d'influence sur la donnée recherchée.*
- *Réponse 3 : La taille du support n'a aucune influence sur le nombre de zones ou de couleurs que l'on trouve au final.*

Encart 2 – *Réponses de la TS1 (Montréal) à une question de la 3ème D (Jacou) : Quelle est la taille du support ?*

A la fin de cette seconde semaine, après les premières phases d'exploration du problème par un questionnement sur la situation et les objets mathématiques, un texte de relance est envoyé à toutes les classes. Ce document prend en compte les échanges des premières semaines, et s'appuie sur l'analyse a priori du problème mathématique, lequel sera l'objet de la recherche dans les trois semaines suivantes. Sans induire aucune procédure, il permet de fixer des choix communs à toutes les classes et de recentrer les recherches autour d'une même problématique. Ce texte, élaboré par les tuteurs-enseignants et signé par l'universitaire du groupe, est le seul apport extérieur à la communauté des élèves.

Dans toutes les classes, vous avez déjà bien travaillé sur le problème de l'Artiste que nous vous avons proposé et plusieurs pistes possibles ont été envisagées.

On voudrait pouvoir donner une réponse précise à l'Artiste afin de l'aider à faire ses choix pour réaliser son œuvre. Pour cela, on se propose de traiter mathématiquement le Problème de l'Artiste.

Dans ce but, je vous propose de considérer que :

- *Le nombre de couleurs est le nombre de zones.*
- *On cherche une solution générale, c'est-à-dire qu'on cherche le nombre maximum de zones en fonction du nombre de clous.*
- *Le support de l'œuvre est un disque et les clous sont répartis sur sa circonférence.*
- *La taille du support est suffisante pour que l'on puisse négliger la taille des clous et l'épaisseur des fils. Par conséquent, on assimile les clous à des points, et les fils tendus à des segments de droite.*

Je vous souhaite à tous et à toutes une très bonne poursuite de la recherche.

Encart 3 – *Relance du problème de l'artiste*

La réception de ce texte recentre les recherches sur le problème mathématique. Ici, le choix dans la relance est de faire émerger la recherche de la relation fonctionnelle entre le nombre de points sur le cercle et le nombre maximum de zones. Sans cette précision, le nombre de zones dépend de deux paramètres : nombre de points sur le cercle et nombre de points de concours entre les cordes. La relance permet également d'expliciter les choix de mathématisation, en relation avec les questions posées par les élèves. Deux séances sont alors consacrées exclusivement à la recherche d'une solution : le problème cherché est ardu et demande beaucoup de temps pour obtenir des solutions même partielles. Pour privilégier le temps de recherche par rapport à celui de mise en commun, aucun échange entre les classes n'est prévu mais les professeurs sont invités à partager leurs impressions.

La troisième semaine, les élèves découvrent les réponses des autres classes ainsi que la relance, puis ils poursuivent leurs recherches.

La quatrième semaine se termine par la rédaction d'un bilan dans chaque groupe. Le professeur rassemble ces travaux et envoie une synthèse aux autres classes.

- *Plusieurs ont fait la remarque que l'aire du disque n'influait pas.*
- *La plupart ont cherché une relation entre le nombre de clous n et le nombre de zones un que l'on peut peindre, en faisant varier le nombre de clous : 2, 3, 4, 5, 6. Ils ont essayé souvent avec $u_n = 2^{n-1}$ et fait le constat que la relation était juste pour $n \in [0 ; 5]$ mais que pour $n = 6$ elle ne fonctionnait plus.*
- *D'autres ont commencé par chercher une relation entre le nombre de clous n et le nombre de fils en regardant ce qui se passait quand on ajoutait un clou supplémentaire. Ils remarquent que lorsque l'on ajoute un clou, on ajoute un fil par clou. Ils arrivent à*

  $$u_n = (n-1) + (n-2) + (n-3) + \dots\dots\dots\dots (n-(n-1))$$

  et cherchent une expression plus simple.
- *Un groupe a essayé d'établir une relation entre le périmètre du support et le nombre maximal de clous en faisant intervenir le diamètre du clou.*

Encart 4 – *Conjectures de la TS1 (Montréal)*

A la suite de ces quatre séances, chaque élève doit réaliser, en dehors de la classe, une synthèse individuelle sous forme de narration de recherche. Ce travail permet à chacun de mettre ses idées au clair, de se préparer au débat en classe et de faire émerger des procédures qui n'auraient pas été retenues par le groupe.

La cinquième semaine, le professeur organise un débat scientifique, alimenté par les travaux des classes, renforcé par les synthèses individuelles et les éventuelles nouvelles procédures qui y figurent.

La recherche s'achève : il est alors essentiel de clôturer le problème. L'universitaire, qui a un regard extérieur sur les travaux des élèves, envoie une clôture du problème à tous les enseignants où sont exposées les mathématiques travaillées ainsi que les solutions trouvées. Il peut donner des éléments de solutions à destination des enseignants et, le cas échéant, proposer des prolongements au problème.

La clôture du problème de l'artiste met en évidence les différents domaines mathématiques rencontrés au cours de la recherche : les fonctions (identification de variables, recherche de dépendances fonctionnelles, études graphiques), les suites (phénomènes récurrents, formule de récurrence ou explicite, découverte de la formule de la somme des *n* premiers entiers), la géométrie plane (polygones, utilisation de symétries, influence de la taille du dessin et de sa précision, éléments topologiques concernant la nature des points d'intersection), les dénombrements (stratégies de comptage, recherche de validation de ces stratégies).

Elle permet également d'insister sur différents aspects de la démarche scientifique : utilisation de modèles mathématiques pour représenter des objets réels, démarche par essais successifs organisés, allers-retours fréquents entre les champs numérique, algébrique et géométrique, travail sur les conjectures (formulation, confrontation, argumentation, validation ou invalidation).

En faisant le point sur ce qui a été démontré, sur les nouvelles connaissances rencontrées et sur les questions qui restent encore en suspens, la clôture participe à une modification du regard porté sur les mathématiques : chercher en mathématiques n'est pas nécessairement aboutir à une solution définitive. Les enseignants et les élèves doivent percevoir les connaissances et savoir-faire qu'ils pourront réinvestir ; il faut noter à cet égard que les élèves sous-évaluent nettement la richesse des mathématiques mises en jeu.

C'est aussi le moment pour l'enseignant d'institutionnaliser certaines connaissances et de valider ou invalider résultats et procédures : l'analyse *a priori* et les études *a posteriori* du problème des cordes révèlent des invariants dans la recherche. Par exemple, quel que soit le niveau d'étude, le théorème en acte « le nombre de régions double lorsqu'on ajoute un point » est émis.

3. Travail collaboratif et recherche scientifique

L'organisation de la recherche (travaux individuels, travaux de groupes, mises en commun, échanges avec d'autres classes) est à rapprocher du monde de la recherche scientifique : le chercheur travaille tantôt seul, tantôt avec les collègues de son laboratoire et échange avec des laboratoires extérieurs. Le dispositif de résolution collaborative génère donc une communauté scientifique d'élèves, dans laquelle chaque individu peut apporter une pierre à l'édifice commun. On retrouve certains des aspects de la recherche d'un mathématicien professionnel évoqués par W. Thurston (1995) :

- la réponse et les outils sont inconnus a priori ;
- le temps est nécessaire pour approfondir la question ;
- les connaissances du chercheur sont en perpétuelle évolution ;
- les échanges avec les pairs sont indispensables ;
- la validation de la recherche est prise en charge par la communauté scientifique ;
- la recherche est source de plaisir et de jubilation.

VI. CONCLUSION

Depuis quelques années, les instructions officielles donnent une place prépondérante à la démarche d'investigation dans les disciplines scientifiques. Faire entrer les élèves dans une telle activité exige des changements de posture de la part de tous les acteurs, qu'ils soient professeurs ou élèves.

Le groupe ResCo propose une ingénierie didactique permettant d'accompagner cette évolution : la résolution collaborative de problèmes. Plus que les connaissances techniques, nous visons l'acquisition de compétences de recherche permettant de mettre les mathématiques au service de situations ancrées dans le monde réel.

En créant une communauté d'élèves, en leur donnant la possibilité de communiquer et le temps de chercher à résoudre des problèmes denses, nous reproduisons certaines des conditions de la recherche en mathématiques. Les problèmes proposés sont de nature à favoriser l'intervention de la dimension expérimentale des mathématiques. En cherchant à résoudre collectivement ces problèmes, les élèves sont amenés à s'interroger sur les objets mathématiques qu'ils manipulent et sur la représentation du réel que permettent ces objets.

Les travaux menés dans les classes depuis plusieurs années montrent que ce dispositif, qui encourage les élèves à se poser eux-mêmes des problèmes, met en jeu des compétences complexes de recherche et de communication, change leur perception des mathématiques et modifie leurs rapports avec cette discipline.

Des questions restent à approfondir, sur les caractéristiques des problèmes et sur l'organisation de la recherche. Quelles spécificités des situations favorisent chez les élèves un changement de perception des mathématiques et assurent une bonne dévolution ? Est-il possible que des enseignants puissent organiser en autonomie une recherche collaborative et quelles ressources mettre alors à leur disposition ?

REFERENCES

Arsac G., Mante M. (2007) *Les pratiques du problème ouvert*. Lyon : Scéren CRDP de Lyon.

Brousseau G. (1998) *La théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Combes M.-C., Sauter M. (2006) Une communauté de pratique d'enseignants, dans l'académie de Montpellier, autour de la résolution de problèmes. In *Actes de EMF2006. Sherbrooke.* http://emf2006.educ.usherbrooke.ca/emf_theme_01_comm.htm

Dias T., Durand-Guerrier V. (2005) Expérimenter pour apprendre en mathématiques. *Repères IREM* 60, 61-78.

Douady R. (1994) Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. *Repères IREM* 15, 37-61.

Komis V., Avouris N., Dimitracopoulou A., Margaritis M. (2003) *Aspects de la conception d'un environnement collaboratif de modélisation à distance, Environnements Informatiques pour l'apprentissage humain*. Strasbourg.

Kuntz G. (2007) (coord.) *Démarche expérimentale et apprentissages mathématique*. Dossier de la Veille Scientifique et Technologique de l'INRP. http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/etudes/experimentation-math

Sauter M. (2008) Une communauté d'enseignants pour une recherche collaborative de problèmes. *Repères IREM* 72, 25-45.

Thurston P.W (1995) Preuve et progrès en mathématiques. *Repères IREM* 21, 7-26.

Wenger E (1998) *Communities of Practice: Leaning, Meaning and Identity*. Cambridge: Cambridge University Press.