SUIVRE UNE DEMARCHE D'INVESTIGATION POUR ENSEIGNER LES RELATIFS, AU COLLÈGE : UNE PROPOSITION PRAGMATIQUE ET UNE EXPÉRIMENTATION, EN FRANCE

Alain MERCIER*

Résumé – Aucun travail à ce jour n'a pu montrer de métaphore fondamentale pour les relatifs, parce que tous modélisent les nombres comme opérateurs additifs, *sur les relatifs*. Toute construction des relatifs engage donc à noter (provisoirement) une nouvelle addition pour de nouveaux nombres, puis à y renoncer parce que ces nouveaux nombres comprennent les anciens. Rien à y faire, sauf à considérer que les extensions praxémiques devenues routinières peuvent conduire à l'invention d'algorithmes de calcul qui conduiront à une extension théorique dans un mouvement ultérieur. Un mouvement à l'envers donc, de ce que propose la TSD, mais le résultat d'une démarche d'investigation effective.

Mots-clefs : nombres relatifs, extension praxémique, opérateurs additifs, algorithmes de calcul, routinisation d'un praxeme

1. Trois constats à l'origine de ce travail, réalisé dans le cadre institutionnel de AMPERES, en collaboration avec les professeurs de Collège associés[1], sur Marseille (Karine Bernad-Drousset ; Nadine Castellani ; Guilhem Delofeu ; Marie-Christine de Redon ; Nacer Khadraoui ; Karine Millon-Faure ; Christiane Motta ; Anne-Marie Russac ; Nicole Sorrentini) et repris avec Yves Matheron à l'occasion de la visite de Maggy Schneider comme professeur invité par l'INRP, en 2010.
2. Le fait que personne n'a pu trouver de *métaphore fondamentale*[2] pour les relatifs, parce que les relatifs modélisent les nombres comme opérateurs additifs sur l'ensemble des relatifs eux-mêmes.
3. Le fait que toute construction des relatifs engage à noter (provisoirement) une nouvelle addition pour de nouveaux nombres, puis à y renoncer parce que ces nouveaux nombres comprennent les anciens et que la nouvelle addition est, pour ces anciens nombres, l'ancienne opération et parce que, finalement, cette addition permet de réinterpréter les anciennes soustractions en utilisant les nouveaux nombres.
4. Le fait que dans ces conditions, il est impossible d'explorer « le réel » pour en former un modèle mathématique qui soit justement l'objet d'enseignement visé, « les relatifs ».

Rien à y faire, sauf à ne pas passer par la production d'une théorie pour mettre en place des algorithmes comme conséquences de théorèmes établis, mais par le travail alternatif d'explicitation et de généralisation des routines (Mercier 2008). Cet auteur propose en effet de considérer que les trois types de situations didactiques proposées par Brousseau décrivent les conditions d'un mouvement de théorisation, mais pas les conditions des apprentissages quotidiens. Ceux-ci commencent en effet par des tentatives de mobiliser des pratiques connues dans le monde nouveau, inconnu: des *extensions praxémiques* (Matheron 2009). Mercier considère alors que des extensions praxémiques devenues d'usage routinier peuvent

---

* ENSL-IFE – France – alain.mercier@ens-lyon.fr

[1] L'INRP associe des professeurs aux travaux de ses chercheurs, pour conduire des « recherches collaboratives » sur le terrain même de l'enseignement, dont ce travail est un exemple.

[2] Une situation fondamentale porterait bien sûr une métaphore fondamentale, dans le cadre théorique de la TSD proposé par Guy Brousseau, mais notre enquête sur l'introduction des relatifs est bien plus modeste. Dans les autres champs théoriques on recherche plutôt « un monde dont les pratiques puissent faire sens, pour initier puis interpréter le travail formel mathématique » : c'est ce que nous appelons, par analogie avec le concept broussaldien, une *métaphore fondamentale*.

---

conduire à l'invention d'algorithmes de calcul. La nécessité de rendre compte de ces algorithmes conduira peut-être à une extension théorique dans un mouvement ultérieur, et l'ensemble de ce mouvement relève de types de situations didactiques non identifiés à ce jour. Nous espérons montrer que c'est pourtant un chemin viable et nous affirmons que ce chemin est bien celui d'une investigation ou enquête, sans être pourtant ni un travail de recherche sur des questions non résolues ni un travail d'étude de réponses connues.

Nous proposons une construction à l'envers donc, de ce que propose la Théorie des Situations Didactiques. Mais elle permet d'imaginer plusieurs propositions consistant à *interpréter des suites d'opérations* comme composition d'un programme de calcul (l'écriture d'un opérateur) et d'un nombre initial arbitraire (un opérande) suffisamment grand pour rendre possibles tous les calculs qui seront engagés, localement. La notion de *programmes de calcul* est alors la métaphore fondamentale du travail conduit et elle permet de juger *a priori* des propositions d'enseignement que l'on peut alors imaginer :

1. Pour la manière dont elles assurent ce mouvement innovant.
2. Pour la manière dont un professeur formé accepte de suivre ce chemin et arrive à y conduire ses élèves.

Alors, *les notations du programme de calcul sous forme de nombres sont l'extension praxémique*[3] *nécessaire à cette interprétation* et, dans ce mouvement, plusieurs exigences notationnelles peuvent se dessiner. Deux choix sont proposés, ils consistent à noter ou pas l'opération nouvelle. La réponse dépend de la disponibilité d'un ensemble de *manières de dire* pour les *manières de faire* associée : son analyse et l'observation de classes sont l'objet précis de la contribution.

I. ETAT DES LIEUX

Parmi les nombreuses recherches portant sur les nombres relatifs, plusieurs s'inscrivent dans un cadre théorique plus global (Sfard 1991). Rappelons brièvement ce dont il s'agit. Sfard montre que, dans l'histoire, les diverses sortes de nombres sont apparues d'abord au travers de manipulations et de processus (de mesure par exemple) avant d'être acceptées comme nouveaux objets indépendants de ces mêmes processus. Cette dialectique, de l'opérationnel à l'objet ou du procédural au structural lui inspire une interprétation des erreurs concernant les relatifs : faute d'avoir été impliqués dans cette dialectique lors de l'enseignement, les nombres négatifs seraient l'objet, pour les élèves, d'une conception pseudo-structurale, en ce sens que les ces derniers prendraient le signifiant pour le signifié. S'inscrivant dans ce cadre théorique, (Gallardo et Rojano 1989), (Gallardo et Rojano 1990), (Gallardo et Rojan 1993), avaient déduit de leurs analyses de textes historiques une relation entre le langage, les méthodes de résolution de problèmes utilisées et la conceptualisation des nombres négatifs. Et Gallardo définit quatre niveaux d'acception des négatifs : 1) nombre qui *soustrait*, 2) nombre relatif lié à l'idée de *quantité opposée* dans le domaine discret et à celle de *symétrique* dans le domaine continu, 3) nombre isolé, *résultat* d'une opération ou solution d'un problème ou d'une équation et 4) *concept formel de nombre négatif*, fruit d'une extension du domaine numérique

[3] Un concept s'avère particulièrement utile en matière d'extensions des ensembles de nombres : il s'agit du concept *d'extension praxémique* (Chevallard 1991 ; Matheron 2010). Le terme de « praxème » est formé à l'image du terme linguistique de lexème. Il désigne une unité minimale de signification de la pratique, au sein d'une institution donnée. Par exemple, l'écriture de deux nombres l'un sous l'autre, de telle manière que les chiffres des divers ordres soient exactement superposés, est un praxème, unité d'une pratique algorithmisée : poser une opération en colonnes. Une extension praxémique se produit lors de l'utilisation d'un praxème dans le cadre d'une pratique propre à une autre organisation mathématique que celle dont il est originairement issu, et sans que l'on se soit nécessairement enquis par avance de la validité de cette extension d'usage.

des naturels aux négatifs (Gallardo 1995), (Gallardo 2002). Gallardo et Rojano avaient d'ailleurs distingué trois principales fonctions du signe moins : unaire (renvoyant au signifiant structural de nombre relatif, de nombre-solution, de nombre- résultat et de nombre négatif formel), binaire (concernant des signifiants opérationnels tels que soustraire en arithmétique ou en algèbre, retirer, compléter, calculer la différence entre deux nombres) et symétrique par référence au signifiant opérationnel qu'est prendre l'opposé d'un nombre (Gallardo et Rojano 1994).

1. Les erreurs des élèves

Plusieurs erreurs classiques observées chez les élèves peuvent alors être interprétées par un manque de compliance du signe aux situations rencontrées (Sfard et Linchevski 1994). Plusieurs surviennent dans la résolution d'équations lorsque celle-ci se base sur des méthodes qui impliquent des principes formels comme : « tout terme qui change de membre, change de signe ». Des interviews d'élèves de 12-13 ans montrent que ceux-ci éprouvent des difficultés à accepter des solutions négatives aux équations que ce soit dans un contexte de résolution de problèmes ou même de résolution d'équations arithmétiques (Gallardo 2002 ; Gallardo et Rojano 1993). Difficultés qui peuvent être rapprochées sans doute de deux autres observations : les opérations sont perçues, par des élèves de l'école élémentaire, comme des actions à accomplir : un « do something signal » (Kieran 1981) tandis que l'étape « x = » est vue comme un signal d'arrêt de la procédure en cours et non comme une solution à rapporter soit à l'équation, soit à un problème (Sfard et Linchevski 1994). (Filloy et Rojano 1989) soulignent le côté délicat du passage des équations arithmétiques aux équations algébriques, passage dont ils relèvent la trace dans des textes historiques. D'autres erreurs se manifestent dans la réduction de termes semblables (R. Herscovics et Linchevsky 1991) (N. Herscovics et Linchevski, 1994) ; (Vlassis 2004). A cela s'ajoutent des difficultés pour percevoir ce qui peut être négatif ou positif dans des expressions littérales. Quant à la règle des signes portant sur les opérations d'addition et de soustraction, plusieurs difficultés bien repérées lui sont associées.

2. Une fausse piste : l'usage d'un modèle pour « faire sens »

Parmi les modèles, celui qui a fait couler le plus d'encre est la droite des nombres sur laquelle nous nous attardons quelque peu. Pour Freudenthal, la droite des nombres est un excellent moyen de visualisation des principales opérations arithmétiques. Elle devrait être utilisée dès les premiers apprentissages arithmétiques et on y représenterait au fur et à mesure les différentes sortes de nombres enseignées : « The real numbers are pre- existent by their intuitive images, and so are the operations, the addition as a shift, the multiplication as dilatation, and the algebraic laws, as obvious or easily vizualized phenomena » (Freudenthal 1973). Cependant, ce chercheur estime qu'il ne faut pas surexploiter ce modèle, en particulier pour des cas tels que 3 – (– 7) et – 3 – (– 7) qui nécessitent une méthode « inductive - exploratoire ». Cette méthode consiste à analyser les régularités observées dans les opérations avec les naturels et à en « déduire » des règles dans les négatifs. Par exemple, la suite de calculs : 3–2=1, 3–1=2, 3–0=3, 3 – (– 1) = 4, 3 – (– 2) = 5 se justifie en raison d'une régularité : « A chaque fois que le 2e nombre diminue de 1, la réponse augmente de 1 ». D'autres auteurs estiment, quant à eux, que la droite des nombres est un modèle mental spontané pour les négatifs, en raison du fait que ce modèle est proche de « la vie de tous les jours » (Peled, Mukhopadhyay et Resnick 1989). Cependant, pour ces auteurs, les élèves peuvent avoir de la droite des nombres soit une conception correcte de « continuous number line », soit une conception erronée de « divided number line », zéro étant plus souvent associé à l'idée de barrière qu'à celle de nombre. Goldin insiste, lui, sur le caractère complexe de certains modèles, en particulier la droite des nombres qui requiert la capacité de regarder un nombre soit comme une position sur la droite (un point), soit comme un déplacement (flèche) (Goldin et Shteingold 2001) et une difficulté inhérente à la droite graduée en tant que modèle des nombres relatifs est de mélanger des nombres qui ont des statuts différents : soit états, soit transformations.

3. *Vers une position didactique*

Selon nous, l'approche didactique développée par la TSD, la Théorie des Situations Didactiques (Brousseau, Balacheff, Cooper, Sutherland et Warfield 1997) et par la TAD, la Théorie Anthropologique du Didactique (Chevallard 2006), puis par la TACD, la Théorie de l'Action Conjointe en Didactique (Sensevy et Mercier 2007) permet de dépasser les oppositions entre les approches précitées, en répondant aux questions qu'elles posent. Nous schématiserons les usages que nous faisons de ces approches en quelques points, utiles pour notre propos :

- L'activité de mathématisation y est modélisée par la description des conditions d'invention et d'usage innovant d'objets sémiotiques et de notions, usages qui sont donc toujours situés (TSD). Décrire cette activité suppose en effet de rendre compte d'une dialectique entre, d'un côté, un répertoire et des formes discursives (des notions) et, de l'autre, les signes graphiques, scripturaux, gestuels, etc. (des notations) (TSD et TAD). Ainsi, pour nous, les notations permettent à la fois d'évoquer les notions et de réaliser le travail mathématique par une manipulation réglée qui est source d'une économie de pensée et d'action.
- La construction des pratiques mathématiques, qui n'est qu'une petite partie du processus de mathématisation d'un type de questions, correspond à un double processus : de stabilisation des systèmes de notations et de leurs règles de fonctionnement ; de normalisation de ces systèmes de notations et de réduction de leur coût d'usage. Il suppose cependant la production d'interprétations stables de ces pratiques, que donnent les notions mathématiques et les discours qu'elles permettent de tenir (TSD et TAD).
- La mémoire et l'usage des savoirs sont pour nous des processus collectifs, et en quelque sorte contractuels. Les savoirs et leurs usages sont en effet médiatisés par la mise en place d'un répertoire d'objets sémiotiques, de termes langagiers et de formes discursives du professeur et des élèves, permettant pour ce qui nous intéresse ici un mouvement entre « notions » et « notations » que le professeur doit gérer en proposant des situations adaptées (TACD).

Nous allons donc présenter la manière dont nous envisageons ce que peut être une extension praxémique des pratiques relatives aux décimaux, en direction des décimaux relatifs, et les manières de stabiliser les pratiques ainsi développées pour obtenir les algorithmes de calcul efficaces que l'on attend aujourd'hui comme signe de l'acquisition de compétences, par les élèves. Nous allons proposer en parallèle une alternative, qui a contre elle de demander une bien plus vaste culture mathématique et des pratiques de plus haut niveau scolaire (elle suppose d'être entré dans le processus d'algébrisation de la géométrie, reporté aujourd'hui en France après la Troisième) mais permet en revanche une introduction aisée de la multiplication. Nous discuterons enfin des effets observables de notre proposition.

II. UN USAGE DIDACTIQUE DES EXTENSIONS PRAXÉMIQUES

4. Une première approche du cas des relatifs, comme quasi opérateurs

En dépit d'analogies, le cas des nombres relatifs se différencie de celui des complexes en raison de leur usage dans la culture : codage de températures, de profondeurs sous-marines, niveaux d'ascenseur, échelles de temps, gestion de comptes, etc. En revanche, il n'est pas évident de donner par ces moyens un « sens » acceptable aux opérations et en particulier à la multiplication ainsi qu'en témoignent plusieurs réactions d'adultes : « Là où j'ai commencé à décrocher en math, c'est quand on m'a dit que moins par moins donne plus. Je n'ai jamais compris que, par exemple, –2 fois –3 cela donne +6. J'en ai conclu que les maths, c'était pas mon truc ».

Mais déjà, certains calculs tels que 7 + (–2) ou 7 – (–2) font problème, comme le montrent les précautions prises par J. Tannery (1911) dans ses *Leçons d'arithmétique*. Tout comme les bilans de gains ou pertes ou ceux de déplacements, ils ne se prêtent à une interprétation première qu'en termes de transformations ou d'instructions opératoires. De plus, l'interprétation de la soustraction suppose de remplacer la deuxième instruction par l'instruction opposée pour considérer un déplacement de gauche à droite dans des cas tels que + 4 et – (– 4) et de droite à gauche dans des cas tels que + (– 4) et – (+ 4).

Cependant, ces *instructions de calcul* devraient en toute rigueur être notées d'une manière particulière : un signe « plus » ou « moins » suivi du nombre en question, le tout encapsulé dans un rond ou, tout simplement, des crochets : par exemple, [+ 3] signifie « ajouter 3 » et de même [– 2] signifie « retrancher 2 ». Une opération serait ensuite définie sur ces objets : il s'agit de les « composer », de « faire l'un puis l'autre » et cette opération unaire ne serait désignée par aucun autre signe que l'apposition. comme l'action de surcompter 8 après 3. Cela donnerait par exemple, que [+ 1] [+ 2] = [+ 3] et s'interprèterait « ajouter 1, puis ajouter 2 à un nombre revient à lui ajouter 3 », ce qui peut encore s'écrire : a+1 + 2 = a + 3, dans une interprétation alternative de cette écriture en termes de transformations de a (proche de la notation polonaise inverse), où la composition est codée par l'apposition. De même, [+ 5] [– 3] = [+ 2] et [– 3] [– 7] = [[– 10], s'interprètent par a + 5 – 3 = a + 2 et a – 3 – 7 = a – 10. On introduirait à ce stade les problèmes venus de [– 5] [+ 2] = [– 3] et de son interprétation en a – 5 + 2 = a – 3.

Le système de manipulations d'instructions est en effet modélisé de manière à engager les élèves dans une extension praxémique : « calculer avec des nombres pour rendre compte du comportement des instructions de calcul ». Dans certains cas, c'est facile d'aller plus loin en omettant le « a » et en exploitant les nombres connus jusque-là (nombres naturels ou rationnels positifs) : par exemple, [+1] [+2] = [+3] peut s'écrire a+1+2=a+3, ou par réduction sémiotique +1+2=+3 qui est modélisé en nombres par 1 + 2 = 3, puisque les deux calculs sont semblables. Alors, [+ 5] [– 3]= [+ 2] devient +5–3=+2 qui est modélisé en nombres par 5–3=2 mais [+3] [–5]=[–2] devient +3–5=–2 qui est modélisé en nombres par *3–5=–2, ce qui est un symbole sans interprétation*. Pour coder des compositions d'instructions « retrancher » par des écritures en forme de soustractions considérées jusqu'ici impossibles, l'extension praxémique conduit donc à *rencontrer* puis *accepter une forme nouvelle*, dont l'interprétation demande la notion de *nombre négatif,* qui nomme l'objet inouï « moins deux » pour l'étudier. On sait, depuis Michel Serfati qu'il fallut le génie de Leibniz pour oser ce type d'audace (Serfati 2005).

Un projet peut ainsi être proposé à l'étude: *explorer ces nouveaux objets qui permettent de coder les instructions de calculs soustractifs, afin de décider si il est possible de les considérer comme des nombres*. On devra pour cela conduire l'extension praxémique jusqu'à la mise en place d'une multiplication, ce qui suppose une audace certaine appuyée sur une propriété algébrique, la conservation nécessaire de la distributivité des calculs. Il s'agit donc d'un projet délicat à conduire, et, par exemple, on remarquera que, pour ne pas engager les élèves et les professeurs dans la manipulation d'expressions impraticables, *on ne définit pas les compositions d'instructions de calcul*, puisque l'opération inverse n'est pas pensée en dehors du modèle numérique.

5. *Une proposition alternative, par l'algébrisation de la géométrie*

Sans devoir chercher très loin, un avenir possible des relatifs se situe à la fois dans le cadre de la géométrie analytique et dans celui de l'analyse, en particulier dans l'étude des fonctions de R dans R. En effet, démontrer des propriétés de figures géométriques avec du calcul sur des coordonnées et des équations dans un repère donné suppose de choisir ce dernier de manière à simplifier les calculs, ce qui revient souvent à situer les figures en question à cheval sur plusieurs quadrants formés par ce repère. C'est une conquête, si l'on en juge par l'habitude qu'avait Descartes, de travailler dans un repère où il n'y avait que des coordonnées positives. Les fonctions, elles, avant d'être objets de l'analyse réelle où sont mobilisés tant les nombres négatifs que les nombres positifs, se doivent d'être modèles de phénomènes divers (intra ou extra-mathématiques) dont certains, tels les mouvements, mobilisent des échelles, de temps et d'espace entre autres, sur lesquelles il est commode de repérer une origine et, de part et d'autre, des nombres négatifs et des nombres positifs. Cependant, cette analyse ne peut se cantonner au calcul sur des coordonnées et doit s'étendre aux paramètres. Prenons un exemple au carrefour de la géométrie analytique et de l'analyse. Si l'ensemble des paraboles, sous-ensemble des coniques, peut être représenté par un ostensif unique : une équation du type $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ sur les coefficients de laquelle porte une contrainte, c'est parce qu'on considère que les paramètres a, b ... f peuvent dénoter des valeurs numériques tant négatives que positives.

La formule de Chasles exprime pour sa part que la distance algébrique de A à C vaut la somme des distances algébriques respectives de A à B et de B à C, quelles que soient les positions des points A, B et C sur un axe orienté, c'est-à-dire quels que soient les signes de ces distances : le concept de nombre relatif permet ici de réduire quatre cas distincts en une seule écriture. On peut imaginer que la première rencontre des élèves avec cette démarche de réduction soit le travail de la classe des fonctions $y = ax + b$, qui rassemble toutes les droites (sauf celles parallèles à l'axe Oy), dont certaines caractéristiques : croissance et position par rapport à l'origine sont distinguées en fonction des signes respectifs des paramètres a et b, soit la pente et l'ordonnée à l'origine. Cette piste mérite d'être explorée explicitement, ce que nous ne ferons pas ici parce qu'elle est impraticable en France, où les relatifs arrivent bien avant la représentation graphique des fonctions affines.

6. *Une proposition pragmatique prudente, où une extension praxémique produit des routines*

Le programme de 5^{e} du 28 août 2008, niveau auquel se déroule l'expérimentation relatée ici, prévoit d'enseigner les relatifs mais pas les relations et applications. Au-delà d'une métaphysique qui chercherait à discriminer entre les objets proprement mathématiques des autres, nous devons convenir que l'objet « instruction de calcul » est à ranger, comme les « programmes de construction » en géométrie, parmi les objets protomathématiques que les élèves peuvent rencontreront ici ou là. C'est ainsi qu'il a figuré en 2007 dans un problème du Brevet des Collèges, examen qui se passe en 3^{e}, dernière année du Collège. Le programme précise que la compétence qui consiste à « Sur des exemples numériques, écrire en utilisant correctement des parenthèses, un programme de calcul portant sur des sommes ou des différences de nombres relatifs » n'est pas exigible au niveau du socle commun. De ce fait, un grand nombre de professeurs ne recourent pas souvent à l'idée de *programmes de calcul*, bien que ces programmes ne conduisent à calculer que la valeur d'expressions de degré inférieur à 2 et des fractions rationnelles simples. Nous avons donc mobilisé le nom d'un objet sans autre usage, ce qui risque de poser à terme un problème de survie à notre ingénierie : il faudra le faire vivre au delà, comme un précurseur de la notion de fonction.

Nous exposons donc la forme qui a été expérimentée, au terme du travail collaboratif avec des professeurs de Collège, en France, dans le cadre d'une recherche sur les « parcours d'étude et de recherche » (AMPERES), comme nous l'avons annoncé en introduction. Le problème à résoudre est donc le suivant : *à toute extension praxémique, on doit associer des formes langagières, qui jouent la fonction de théorie.* Il s'agit de réguler l'inventivité demandée aux élèves en leur proposant des outils de contrôle de leurs pratiques. L'idée de « programmes de calcul » sert alors de *métaphore fondamentale3*[4] pour interpréter le calcul sur les relatifs. Nous voulons dire par ce terme que les discours sur ce que les élèves sont engagés à écrire doivent être pensés a priori par le professeur aussi soigneusement que les systèmes de notations et leur manipulation, et par exemple que l'égalité « 659–62+61 = 659–1 »doit pouvoir se dire « le programme 'soustraire 62 puis ajouter 61' équivaut au programme 'soustraire 1' » ou mieux « soustraire 62 puis ajouter 61 c'est soustraire 1 », pour que le calcul 659 – 1 = 658 prenne pour les élèves un sens fondé non plus sur la soustraction mais sur l'expérience des programmes de calcul, et pour que le symbole composé « – 1 » puisse être isolé du nombre 659, parce que ce symbole représente « un programme de calcul », objet qui a acquis une certaine existence par les pratiques qui l'ont mobilisé.

Penser « programmes de calcul » permet donc de définir métaphoriquement l'équivalence des programmes « soustraire 62 puis ajouter 61 » et « soustraire 1 ». Ce faisant, le symbole binaire – (trait) ou + (croix) devient prédicat portant sur 62, 61, ou 1, et il se trouve détaché du diminuande 659. L'extension praxémique associée à la métaphore informatique conduit donc à une double interprétation de ce que l'écriture 659 – 1 dénote. Soit le calcul de la différence de deux nombres, soit une soustraction opérée sur un diminuande. L'intervention du symbole « – 1 » dote la notation 659 – 1 d'une dénotation qui peut être partagée par les élèves d'une classe de Collège. Du point de vue des élèves, un opérateur tel que – 2 est en effet codé d'une manière qui se rapproche fortement du souvenir de l'écriture d'un nombre, en vigueur depuis leur entrée à l'École : même si ce nombre possède la particularité nouvelle d'être affecté d'un signe représentant ailleurs une opération, dans ce cas une soustraction » explique Matheron (mémoire pour l'HDR, non publié). Car, poursuit l'auteur « Les ostensifs conduisent, par un phénomène de proximité engendré par la perception, à une extension de leur usage, au-delà de celui pour lequel ils ont été créés ». L'extension se trouve légitimée par le moyen de la nommer que donne le professeur, et le mouvement d'*enquête* sur les objets ainsi proposés aux élèves peut donc commencer. C'est en ce sens que nous pensons l'enseignement proposé comme relevant d'une « démarche d'investigation », puisque nous avons dorénavant mis en place un monde d'objets nouveaux que les élèves peuvent explorer soit, à partir des usages qu'ils vont imaginer soit, à partir des usages sociaux sur lesquels ils vont enquêter soit, à partir des questions qui leur sont posées par le professeur, mais dans tous les cas, sous sa direction. Dans l'ingénierie proposée, l'investigation, pour utiliser cet

[4] On notera que cette métaphore est informatique, elle utilise la connaissance sociale partagée de ce que les ordinateurs – qui seraient mieux nommée calculateurs – exécutent des « programmes » et que toute écriture d'une succession de calculs – toute expression algébrique – peut être considérée comme un programme et « exécutée ».

anglicisme, a porté d'abord sur les pratiques formelles que permet le nouveau type de symboles et sur les divers cas de figure qu'ils peuvent rencontrer. Elle se déroule donc « sous contrat », c'est-à-dire sur les questions que le professeur pose à leur tour, avec la double garantie de ne rencontrer qu'une difficulté à la fois et que celle)ci soit surmontable.

Quels sont les problèmes posés aux élèves et qui déclinent la question originelle : « Peut-on donner un sens numérique au fait que soustraire 62 puis ajouter 61 à un nombre suffisamment grand revient à soustraire 1 à ce nombre ? » Ils font d'abord varier les cas conduisant à écrire « –1 » ou « –2 », puis ils conduisent à explorer +1 et +2, à comprendre qu'un tel symbole a plusieeturs équivalents, à travailler de manière à obtenir le symbole minimal, à traiter de ces questions en oubliant de nommer le nombre à fonction d'opérande, qui est conservé dans le cours du travail, à composer des symboles par des opérations binaires, à explorer les cas possibles en tentant de savoir si l'étude a été exhaustive, etc. L'ensemble de ces sous questions décline la question initiale, relative à ce que nous avons pensé comme « enquête sur l'attribution possible d'un sens à une extension praxémique ».

III. DISCUSSION ET CONCLUSION

Tous les types de travail mathématique ne sont pas représentés dans cet exemple particulier, mais nous tenions à faire voir comment l'idée d'investigation, déclinée ici dans les deux dimensions d'enquête sur des pratiques et d'étude de savoirs, permet de traiter efficacement des problèmes d'enseignement que l'idée trop simple de recherche d'un sens concret pour une forme symbolique ne permettait pas de régler.

Ainsi la *démarche d'investigation* ne vaut pas seulement pour produire une théorie pour un phénomène, selon un processus relevant d'une description empiriste. Elle peut aussi permettre de mettre en place une technique efficace pour traiter de manière commode une question pratique. L'enquête produite par l'un des groupes AMPERES, conduite très fermement sous la direction du professeur, relève d'une des interprétations de ce que Chevallard appelle un « parcours d'étude et de recherche » relatif à une question prise en charge par un collectif d'élèves qui enquête sur un type bien identifié de pratiques sociales sans se soucier vraiment ni d'en étudier les attendus théoriques ni de rechercher à identifier la classe de problèmes correspondant à la réponse pratique obtenue dans ce cas de figure : au point que les élèves des trois classes observées ne poseront ni la question de « la multiplication de ces nombres » ni même la question de l'identification de ces symboles comme « des nombres d'un type nouveau ».

REFERENCES

Brousseau G., Balacheff N., Cooper M., Sutherland R., Warfield V. (1997) *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970-1990*. Dordrecht : Kluwer academic publishers.

Chevallard Y. (2006) Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. In *Actes du premier congrès international sur la théorie anthropologique du didactique* (pp. 705-746).

Filloy E., Rojano T. (1989) Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the learning of mathematics* 9(2), 19-25.

Freudenthal H. (1973) Soviet research on teaching algebra at the lower grades of the elementary school. *Educational Studies in Mathematics* 5(1), 391-412.

Gallardo A. (1995) Negative Numbers in the Teaching of Arithmetic. Repercussions in Elementary Algebra. In Owens D. et al. (Eds.) (vol.1, pp. 158-163) *Proceedings of PME17, North American Chapter* Columbus (OH-USA).

Gallardo A. (2002) The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics* 49(2), 171-192.

Gallardo A., Rojano T. (1989) Areas de difficultades en la adquisicion del lenguaje aritmetico-algebraico. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 9(2), 155-188.

Gallardo A., Rojano T. (1990) Avoidance and acknowledgement of negative numbers in the context of linear equations. In *Proceedings of PME14, North American Chapter* (Vol. 2, pp. 43-48). Mexico.

Gallardo A., Rojano T. (1993) Negative solutions in the context of algebraic word problems. In *Proceedings of PME15. North American Chapter* (pp. 121-127). Pacific Grove (CA, USA).

Goldin G., Shteingold N. (2001) Systems of representations and the development of mathematical concepts. *The roles of representation in school mathematics 2001*, 1-23.

Herscovics N., Linchevski L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics* 27(1), 59-78.

Herscovics R., Linchevsky L. (1991) Crossing the didactic cut in algebra: grouping like terms in an equation. In *Proceedings of PME13, North American Chapter* (Vol.1, pp.196-202).

Kieran C. (1981) Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics* 12(3), 317-326.

Matheron Y. (2009) *Mémoire et étude des mathématiques: une approche didactique à caractère anthropologique*. Presses universitaires de Rennes.

Mercier A. (2008). Pour une lecture anthropologique du programme didactique. *Education & Didactique* 2(1), 7-40.

Peled I., Mukhopadhyay S., Resnick L. B. (1989) Formal and informal sources of mental models for negative numbers. In *Proceedings of the 13th international conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.3, pp. 106-110).

Sensevy G., Mercier A. (2007) *Agir ensemble : L'action didactique conjointe du professeur et des élèves*. Presses universitaires de Rennes

Serfati M. (2005) *La révolution symbolique : la constitution de l'écriture symbolique mathématique*. Paris : Transphilosophiques (Petra.).

Sfard A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22(1), 1-36.

Sfard A., Linchevski L. (1994) The gains and the pitfalls of reification—the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics* 26(2), 191-228.

Vlassis J. (2004) Making sense of the minus sign or becoming flexible in « negativity ». *Learning and instruction* 14(5), 469-484.