APPRENTISSAGE DE LA PROPORTIONNALITÉ PAR LA CONFRONTATION À LA NON-PROPORTIONNALITÉ VIA DES MANIPULATIONS

Valérie HENRY* – Pauline LAMBRECHT**

Résumé – L'activité dont il est question dans cet article propose d'intégrer des manipulations dans l'étude de la proportionnalité et de confronter une situation proportionnelle à une autre qui ne l'est pas. L'ingénierie proposée a l'espoir non seulement d'améliorer l'apprentissage de cette matière et ce, à long terme, mais également d'avoir un apport positif quant à la réflexion des élèves face à des questions mobilisant principalement le sens commun. Le protocole d'expérimentation complet (pré-tests, post-tests, séquences d'apprentissage, *classes-témoins* et *classes-tests*) ainsi que les premiers résultats sont développés dans cet article.

Mots-clefs : manipulations, grandeurs, proportionnalité, laboratoire, expérimentation

Abstract – The activity discussed in this paper suggests to integrate handlings for the study of proportionality and to confront a proportional situation to another non-proportional. The engineering suggested hopes not only to improve the learning of this subject and that, on the long view, but also to have a positive contribution to students' thinking about questions mobilizing mainly common sense. The complete experimental protocol (pre-test, post-tests, learning sequences, *control-classes* and *test-classes*) and first results are developed in this paper.

Keywords: handlings, magnitudes, proportionality, laboratory, experimentation

I. INTRODUCTION

Ce travail s'appuie sur une recherche actuellement en cours au Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques (CREM) de Nivelles en Belgique. Il s'agit de la conception et de la mise au point d'ingénieries didactiques (Brousseau 1989) appelées *Math & Manips* (Guissard, Henry, Agie et Lambrecht 2010), intégrant des manipulations, et destinées à diverses tranches d'âge de l'enseignement primaire et secondaire [6-18 ans]. L'apport de telles activités est parallèlement analysé dans une thèse de doctorat en cours aux Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix de Namur en Belgique. À l'instar de Dias et Durand-Guerrier (2005, p. 61), « nous soutenons l'intérêt et la possibilité de concevoir des situations d'apprentissage mettant en œuvre le recours à l'expérience dans la perspective de favoriser l'accès aux connaissances mathématiques pour le plus grand nombre d'apprenants ».

Ces *Math & Manips* qui présentent une forte composante a-didactique (Brousseau 1998) visent à provoquer chez certains élèves de la curiosité par des expérimentations dont les résultats semblent en contradiction avec leurs connaissances antérieures. Elles doivent amener les élèves à entrer dans un processus de questionnement visant à faire émerger un modèle qui correspond au mieux à la réalité de la situation. En particulier, l'activité présentée dans la section III, et qui fait l'objet de la thèse citée plus haut, confronte des situations de proportionnalité à d'autres qui ne le sont pas.

Le passage du contexte expérimental aux modèles mathématiques se fait dans différents contextes afin de favoriser le passage d'un registre de représentation sémiotique à un autre (Duval 1993). En effet, l'activité expérimentale débouche nécessairement sur un relevé d'informations qui devront être traitées de diverses manières. Les résultats seront analysés dans le langage courant, intégrés dans des tableaux de nombres et interprétés sous forme de graphiques, ce qui permet, par exemple dans le cas présenté à la section III, de mettre en

* ULG, FUNDP, CREM – Belgique – v.henry@ulg.ac.be
** FUNDP, CREM – Belgique – paulinel@crem.be

© Henry V., Lambrecht P. (2012) Manipulations, proportionnalité et non-proportionnalité. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT10, pp. 1365–1377). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

évidence différents aspects de la comparaison entre le modèle linéaire et les modèles non linéaires.

Le contexte dans lequel les élèves évoluent lors de la réalisation d'une *Math & Manip* doit les amener à entrer dans des démarches de modélisation. En effet, notre volonté de confronter les conceptions (Giordan et De Vecchi 1987) des élèves avec le vécu expérimental puis d'en faire naître un modèle mathématique les conduit à explorer différentes étapes d'un processus de modélisation telles que : conjecture, protocole, expérimentation, interprétation des résultats, construction d'un modèle, validation, comparaison entre résultats théoriques et expérimentaux, exploitation du modèle, …

L'intérêt de cette recherche est de présenter aux enseignants l'apport d'une activité expérimentale dans le processus de construction des savoirs mathématiques.

Dans cet article, nous nous centrons sur une activité proposée pour des élèves du début du secondaire et qui fait l'objet de la thèse de Pauline Lambrecht. Cette activité, décrite en détails à la section III, vise principalement à ébranler les conceptions initiales des apprenants relativement à la prégnance du modèle linéaire (De Bock, Van Dooren, Janssens et Verschaffel 2007). Dans la section II, nous décrivons les problématiques générales que nous avons identifiées ainsi que les questions de recherche qui ont émergé. La section IV se penche sur la méthodologie mise en place pour étudier ces questions de recherche et nous avançons quelques résultats dans la section V. Des résultats plus complets pourront être proposés lors de la présentation au colloque.

II. PROBLÉMATIQUES

Nous présentons dans cette section les différents choix sur lesquels la thèse repose.

1. Transition primaire – secondaire

Dans les classes maternelles et primaires, les enseignants sont habitués à faire manipuler les élèves. Toutefois, certaines manipulations sont, plus que d'autres, susceptibles d'installer des concepts mathématiques fondamentaux. Nous nous efforçons de proposer des activités où la nécessité de la manipulation est réellement motivée par le contexte, et où l'expérimentation fournit la réponse à une question pertinente. Notre but est de mettre en évidence pour les enseignants les compétences qui sont développées par chacune de nos *Math & Manips*, ainsi que les notions qu'elles installent, mais aussi de montrer en quoi elles contribuent à une meilleure compréhension de notions parfois abstraites. Les *Math & Manips* s'inscrivent dans un contexte plus général de construction des savoirs par l'élève, elles visent à construire de nombreux concepts dans le domaine des grandeurs, font percevoir la nécessité de certains outils. Elles ne remplacent pas tous les exercices traditionnels mais leur donnent du sens.

La transition de l'enseignement primaire vers l'école secondaire est problématique à de nombreux niveaux. En mathématiques, on observe un glissement des mathématiques concrètes issues du monde sensible vers une formalisation de plus en plus importante. Le passage de l'arithmétique à l'algèbre en est un exemple frappant. Pour beaucoup d'élèves, ce cap est très difficile à franchir.

Notre recherche vise à réintroduire dans les classes du secondaire un espace où les liens entre le concret et les modèles mathématiques émergent des manipulations physiques réalisées par les élèves et où ces modèles deviennent une nécessité pour traiter les problèmes posés plutôt qu'une donnée préexistante.

Si dans l'enseignement des sciences l'idée des laboratoires s'est, de toute évidence, imposée très tôt, il n'en a pas été de même pour les mathématiques. Et pourtant les incitations n'ont cessé depuis un siècle. En 1904, Émile Borel propose la mise en place de laboratoires de mathématiques lors d'une conférence à Paris. Lors de cette conférence, il cherche à montrer l'intérêt, le rôle et la nécessité des exercices pratiques (de vrais exercices, expériences et manipulations de calculs numériques, de dessins géométriques, d'arpentage, de cosmographie ou de mécanique) qui permettent d'introduire « plus de vie et de sens du réel » dans l'enseignement des mathématiques (Borel 1904).

Alors qu'aux cours de sciences l'aspect expérimental a été réintroduit pour les élèves du degré supérieur du secondaire, dans les laboratoires de physique, de chimie et de biologie, le cours de mathématiques a tendance à devenir de plus en plus abstrait au fur et à mesure de la progression dans le cursus. Certains professeurs vont même jusqu'à rejeter toute forme de manipulation, estimant que le cours de mathématiques est exclusivement le lieu de la construction théorique, des démarches abstraites.

Dans les *Math & Manips*, nous proposons des activités qui donnent du sens aux concepts qu'elles introduisent et aux outils qu'elles nécessitent, et par là même, nous tentons de rendre un certain plaisir d'apprendre aux élèves démotivés par l'aspect théorique et abstrait des mathématiques.

2. *Illusion de linéarité*

Nous avons choisi de travailler la proportionnalité au début du secondaire en proposant une situation de non-proportionnalité notamment suite aux travaux de Dirk De Bock. En effet, avec son équipe, il a étudié le phénomène qu'il appelle « illusion de linéarité » à l'aide de questions telles que celle traduite ci-dessous qui ont été posées à des élèves issus de la deuxième primaire à la deuxième secondaire [7 à 14 ans].

> Maman a placé 3 essuies sur la corde à linge. Après 12 heures ils étaient secs. Grand-mère a placé 6 essuies sur la corde à linge. Combien de temps est-ce que ça leur a pris pour être secs ? (De Bock, Van Dooren, Janssens et Verschaffel 2007, p. 9)

Dans l'ouvrage qui présente leurs recherches (Op. cité), les auteurs soulignent que la tendance des élèves à utiliser un modèle linéaire est très forte, profondément enracinée et résistante au changement. Selon eux, plusieurs facteurs peuvent être à l'origine de ce fait : la nature intuitive du modèle linéaire en est un et les expériences vécues par les élèves dans leur classe en est un autre. C'est pourquoi la thèse s'appuie sur une activité intégrant une situation non proportionnelle à partir de manipulations en espérant améliorer l'aptitude des élèves à choisir un modèle adéquat pour traiter les diverses situations rencontrées.

Un enjeu important est d'établir le lien entre phénomène linéaire, tableau de proportionnalité et graphique en ligne droite d'une part, phénomènes non linéaires, tableaux de non-proportionnalité et graphiques de fonctions non linéaires d'autre part.

3. *Analyse a priori*

Dans de nombreux manuels belges, la proportionnalité est étudiée à partir d'une situation présentant deux grandeurs proportionnelles pour lesquelles un coefficient de proportionnalité est mis en évidence. Suivent ensuite de nombreux exercices utilisant les coefficients de proportionnalité pour compléter des tableaux de valeurs. C'est ce que nous appelons par la suite « enseignement classique ». Nous pensons qu'un tel concept ne peut être défini et interprété par les élèves sans recourir à des contre-exemples. Nous tenons donc à proposer une ingénierie (Artigue 1989) dans laquelle une situation de proportionnalité est confrontée à une autre impliquant deux grandeurs non proportionnelles pour définir ce concept.

Les nombreux exercices réalisés dans les classes sont un atout pour ancrer les concepts mais nous craignons que ces apprentissages ne soient efficaces qu'à court terme s'ils ne sont pas accompagnés de faits marquants créant des images mentales. Nous espérons que les manipulations proposées dans l'activité de la section III joueront ce rôle.

De plus, nous supposons que les manipulations pourraient améliorer la réflexion des élèves par le rapprochement du monde sensible à la salle de classe. Les élèves s'habituent à des cours de mathématiques où ils appliquent ce qu'on leur enseigne sans toujours réfléchir au contexte des questions posées. Dirk De Bock et son équipe (2007) l'ont déjà souligné.

Les questions de recherche de la thèse sont ainsi centrées sur :

- l'apport des situations de non-proportionnalité dans l'étude de la proportionnalité ;
- l'apport des manipulations quant à la démarche mise en place par les élèves face à des questions de mathématiques mobilisant principalement le sens commun ;
- l'apport des manipulations pour les apprentissages à long terme liés à la proportionnalité.

Afin d'étudier ces questionnements, nous avons développé l'ingénierie présentée dans la section suivante ainsi que la méthodologie dont il est question dans la section IV.

III. ACTIVITE PROPOSÉE

La *Math & Manip*, intitulée « Des cylindres », s'adresse à des élèves du premier degré de l'enseignement secondaire [12-14 ans]. L'expérience proposée aux élèves leur fait découvrir que le volume d'un cylindre ne se modifie pas de la même manière si on agit sur sa hauteur ou sur son diamètre. Les tableaux de nombres issus des relevés expérimentaux permettent d'observer et de construire avec les élèves les caractéristiques d'un phénomène proportionnel par comparaison avec un phénomène qui ne l'est pas. Les graphiques qui en découlent leur font rencontrer tout d'abord la fonction linéaire, puis une première approche de la fonction $y = ax^2$. L'accent est mis sur la confrontation des deux situations. Cette ingénierie a notamment été présentée lors du colloque de la CII-Collège à Orléans (Guissard M.-F., Henry V., Lambrecht P. et Vansimpsen S., à paraître).

Pour commencer, une situation simple est présentée aux élèves de sorte qu'ils se familiarisent avec le matériel qu'ils vont utiliser dans la suite du travail. Il s'agit du remplissage d'une casserole cylindrique jusqu'à la moitié de sa hauteur dans un premier temps et jusqu'à sa hauteur totale dans un second temps. Avant toute expérimentation, il est demandé aux élèves d'estimer le nombre de verres qui leur sera nécessaire pour atteindre ces différentes hauteurs. Cette première partie de la *Math & Manip* a pour objectif de mettre en évidence des points essentiels d'une démarche scientifique : placement des repères, précision, utilisation d'un matériel adéquat, etc.

Ensuite, les élèves reçoivent un récipient cylindrique assez haut (tel qu'un verre à long drink dans lequel ils versent un certain nombre de mesurettes[1], trois par exemple. Après avoir marqué la hauteur atteinte par le liquide, ils font deux nouvelles marques au double et au triple de la hauteur initiale. Les élèves estiment alors et vérifient ensuite par expérimentation

[1] On appelle mesurette un petit récipient servant à doser notamment des liquides.

les nombres de mesurettes qu'il faudra verser dans le cylindre pour atteindre ces différentes hauteurs. Ils écrivent leurs résultats dans un tableau comme l'illustre le tableau 1.

Hauteur	Nombre de mesurettes
haut. 1 = 3,5 cm	3
haut. 2 = 7 cm	6
haut. 3 = 10,5 cm	9

Tableau 1

Il est demandé aux élèves de repérer et d'écrire les différents liens qu'ils observent entre les valeurs du tableau, en les symbolisant par des flèches. Les réactions des élèves sont principalement de deux sortes : certains remarquent dans ce tableau des liens de type multiplicatif et d'autres des liens de type additif.

	Hauteur	Nbre de mes.	
$\times 2$	haut. 1 = 3,5 cm	3	$\times 2$
$\times 3$	haut. 2 = 7 cm	6	$\times 3$
	haut. 3 = 10,5 cm	9	

	Hauteur	Nbre de mes.	
$+3{,}5$	haut. 1 = 3,5 cm	3	$+3$
$+3{,}5$	haut. 2 = 7 cm	6	$+3$
	haut. 3 = 10,5 cm	9	

Tableaux 2 et 3

Les relations mises en évidence dans les tableaux doivent permettre aux élèves d'imaginer combien de mesurettes seraient nécessaires pour atteindre quatre fois, cinq fois voire dix fois la hauteur initiale et de construire un graphique reprenant ces différents résultats.

Dans l'activité, l'accent est porté sur la multiplication car, même si les liens additifs sont plus prégnants chez les élèves comme le souligne Brousseau, notamment dans la section où il décrit la situation-problème du « puzzle » (1998, pp. 237-241), ces liens dépendent des valeurs initiales et de l'organisation du tableau. De plus, ces liens peuvent apparaître dans des tableaux qui ne sont pas de proportionnalité (correspondant à une fonction affine par exemple).

La deuxième partie de l'activité consiste à conjecturer puis observer et comprendre ce qui se passe si on fait varier le diamètre du cylindre, pour une hauteur fixée. L'importance de la démarche qui consiste à ne faire varier qu'une seule grandeur à la fois est explicitée.

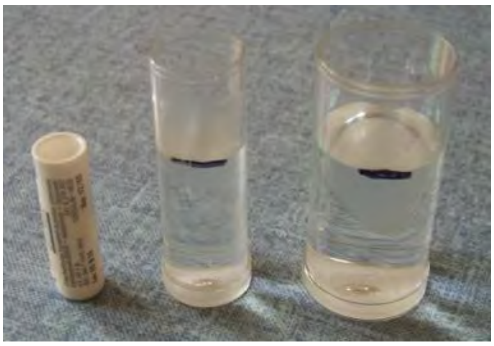

Figure 1

Les élèves reçoivent les trois cylindres de la figure 1. Les deux cylindres transparents ont des diamètres double et triple du plus petit. Ce dernier est utilisé comme mesurette étalon.

La question posée est la suivante : combien de fois faut-il verser le petit cylindre pour remplir les cylindres de diamètres double et triple jusqu'à la même hauteur que celle du cylindre de départ ?

Après avoir noté leurs estimations dans un tableau, les élèves effectuent la manipulation pour vérification.

Les estimations que font les élèves en général sont : deux mesurettes pour remplir le cylindre de diamètre double et trois mesurettes pour celui de diamètre triple. Le passage par l'écriture des estimations est important car les élèves sont ensuite confrontés à la non-concordance des résultats avec leurs prévisions. Cela les incite à se poser davantage de questions et à chercher des justifications aux résultats obtenus. Les erreurs liées à l'expérimental sont présentes et cruciales pour les élèves. Cependant, nous ne développons pas ce point ici, il le sera dans la thèse.

En réalisant l'expérience, les élèves observent que quatre et neuf mesurettes sont nécessaires pour remplir les cylindres de diamètres double et triple jusqu'à une même hauteur.

Comme pour le travail concernant la variation de la hauteur, il est demandé de placer, dans un tableau, les résultats obtenus pour la variation du diamètre. À nouveau, les liens découverts entre ces différentes valeurs doivent être mis en évidence afin d'en dégager les valeurs correspondant à des diamètres quatre fois ou cinq fois plus grands que celui de départ.

Diamètre	Nbre de mes.
diam. 1 = 0,8 cm	1
diam. 2 = 1,6 cm	4
diam. 3 = 2,4 cm	9
diam. 4 = 3,2 cm	16
diam. 5 = 4 cm	25

$\times 2$, $\times 3$, $\times 4$, $\times 5$; $\times 2^2$, $\times 3^2$, $\times 4^2$, $\times 5^2$

hauteur = 3,5 cm

Tableau 4

Les liens mis en évidence dans le tableau 2 font suite à une discussion au sein de la classe. Ils sont argumentés de diverses manières. Les élèves expliquent, par exemple, que deux mesurettes n'étaient pas suffisantes et l'illustrent par un dessin tel que celui de la figure 2.

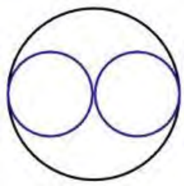

Figure 2

L'analogie avec des récipients parallélépipédiques à base carrée, comme dans la figure 3, permet d'observer à quoi correspondent les facteurs multiplicatifs 4, 9 et de conjecturer les nombres de verres qui seront nécessaires au remplissage d'autres cylindres.

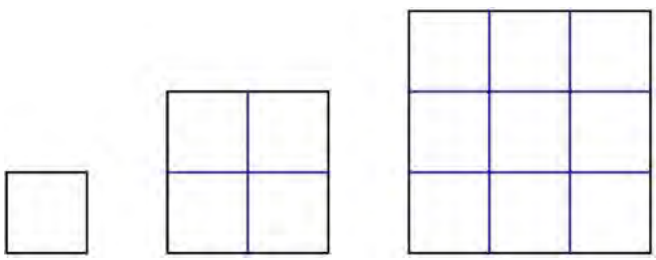

Figure 3

Les résultats sont ensuite placés dans un graphique. Une synthèse est produite à partir des tableaux et graphiques construits au cours de l'activité. Elle met notamment en évidence des caractéristiques permettant de distinguer les phénomènes proportionnels des autres.

La figure 4 illustre les graphiques des deux situations rencontrées.

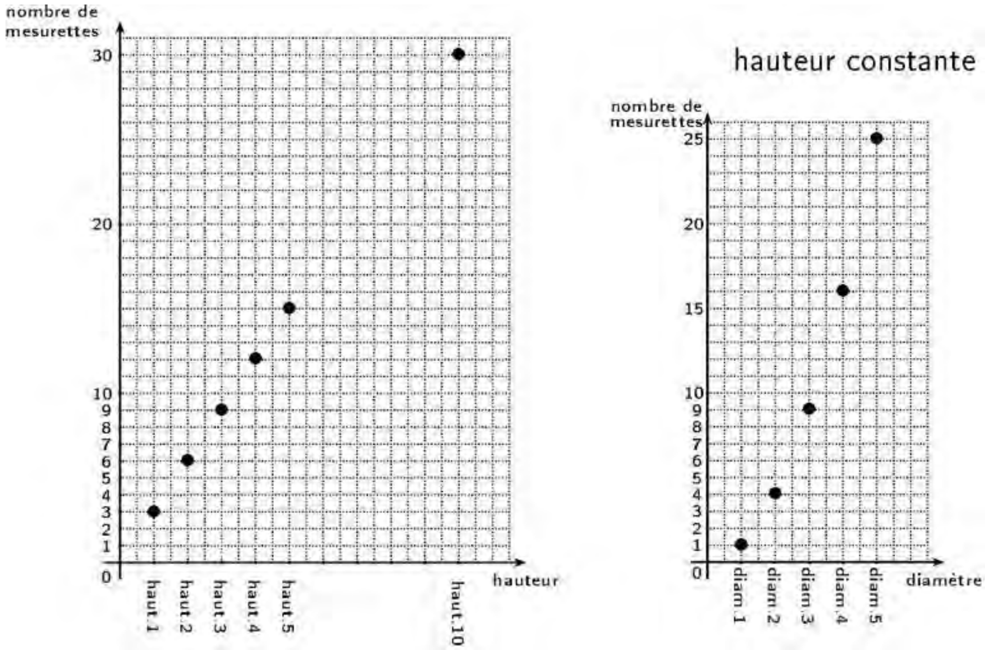

Figure 4

L'activité proposée a permis aux élèves de rencontrer une situation de proportionnalité et une autre qui ne l'est pas dans un contexte particulier : celui du cylindre.

Pour compléter cette démarche, il est nécessaire de leur présenter d'autres solides et de se poser les mêmes questions. Ceci vise à éviter toute généralisation abusive et à déterminer rapidement le domaine de validité des « règles » mises en évidence. La question suivante leur est donc posée : parmi les récipients de la figure 5, quels sont ceux pour lesquels le volume varie proportionnellement à la hauteur ?

Figure 5

IV. MÉTHODOLOGIE

Pour traiter les questions de recherche présentées dans la section II.3, nous avons mis en place un protocole d'expérimentation décrit dans cette section et basé sur l'introduction, dans certaines classes, appelées *classes-tests*, de l'activité décrite ci-dessus tandis que d'autres classes, qualifiées de *classes-témoins,* poursuivent l'enseignement classique dont il est question à la page 3. Bien que nous soyons conscients des limites de cette méthodologie, celle-ci nous paraît néanmoins pertinente pour apporter des éléments de réponse à nos questions de recherche.

Une première expérimentation a eu lieu au cours de l'année scolaire 2009-2010. Les résultats ont permis d'observer des améliorations à apporter en vue d'une seconde expérimentation qui s'est déroulée pendant l'année scolaire 2010-2011. Nous détaillons brièvement ci-dessous ces deux expérimentations de même que les problèmes rencontrés et solutions proposées pour y remédier.

Le protocole d'expérimentation est le suivant. L'ensemble des élèves passe un pré-test suivi d'une séquence d'apprentissage élaborée soit à partir de l'ingénierie présentée dans la section III, soit à partir du cours habituel des enseignants. Celle-ci se clôture avec un premier post-test permettant d'analyser l'impact de l'ingénierie à court terme. La séquence d'apprentissage complète, post-test y compris, dure deux semaines de cours, c'est-à-dire huit périodes de cinquante minutes. Un second post-test réalisé en fin d'année scolaire permet quant à lui de se rendre compte des apprentissages à long terme. Outre ces tests qui nous donneront une analyse quantitative, d'autres méthodologies pourront être mises en place (questionnaires, interviews d'enseignants, …) pour permettre une approche plus qualitative.

1. Pré-test

Le pré-test a pour objectif d'analyser le niveau des connaissances des élèves à propos de l'utilisation des règles de proportionnalité ainsi que de repérer l'usage abusif de ces propriétés. Il est composé d'une série de questions du même type que celles de Dirk De Bock (2007) qui font référence à des situations proportionnelles et à d'autres qui ne le sont pas.

Nous avons délibérément choisi de ne conserver que des questions possédant une et une seule réponse. En effet, nous avions opté au départ pour certaines situations absurdes : « Un nouveau-né de 50 cm pèse 4 kg. Combien pèsera-t-il lorsqu'il fera 1,5 m? » par exemple. Il n'est pas dans l'habitude des élèves de donner une réponse approximative à une question au cours de mathématiques et encore moins de faire remarquer à l'enseignant qu'on ne peut trouver de réponse exacte à la question posée. Nous aurions en plus été confrontés à la difficulté d'interprétation d'une réponse donnée : celle-ci résulterait-elle d'un simple effet de contrat (Brousseau 1990) de type « âge du capitaine » (Baruk 1985) ou d'une véritable conviction de l'élève ? De plus, nous avons dû nous rendre compte que ces questions ne nous amenaient aucune information pour notre recherche et avaient déjà été traitées par Dirk De Bock et son équipe (2007).

Pour les situations de proportionnalité, nous commençons par une question très simple du type : « Une paire de ciseaux pèse 50 grammes. Quel est le poids de deux paires de ciseaux ? ». Ce genre de question nous permet de savoir si les élèves maîtrisent les règles de proportionnalité. De plus, elle met les élèves en confiance car ils sont généralement rebutés par les questions de type « problème ». Nous demandons effectivement aux élèves de justifier chacune de leur réponse de manière à pouvoir les interpréter le plus correctement possible.

Les situations inversement proportionnelles sont des situations classiques pour lesquelles les élèves appliquent régulièrement un raisonnement linéaire. Par exemple, ils sont nombreux à répondre « 3 » à la question suivante : « Avec une bouteille d'eau, je remplis 6 verres de 20 cl. Combien aurais-je pu remplir de verres de 10 cl ? ». Nous avons donc choisi de placer plusieurs de ces situations dans le pré-test.

Nous proposons également deux sortes de situations affines. La première est très fortement inspirée de Dirk De Bock (2007) et a été à la base du pré-test. Par exemple : « Sur une corde à linge, une chemise prend une heure pour sécher. Combien de temps faut-il pour faire sécher trois chemises placées les unes à côté des autres sur cette corde ? ». Ce genre de situation est la plupart du temps associée par les élèves à une situation de proportionnalité. La seconde sorte de situation affine est du type suivant : « Pierre est allé au cinéma. Sa place lui a coûté 6 €. Pendant l'entracte, il a acheté 3 friandises. Toutes les friandises coûtent le même prix. Sa sortie au cinéma lui a coûté en tout 12 €. Combien sa sortie au cinéma lui aurait-elle coûté s'il avait acheté 4 friandises ? »

À toutes ces questions s'en ajoute une qui n'est volontairement pas mise dans un contexte : « Un carré ABCD a une aire de 9 cm². Le côté d'un carré A'B'C'D' est 2 fois plus long que le côté du carré ABCD. Quelle est l'aire du carré A'B'C'D' ? ». Contrairement aux autres questions, celle-ci est plus spécifique à la *Math & Manip* proposée. En effet, il est question de la variation de l'aire d'un carré en fonction de son côté, problème de même type que la variation du volume du cylindre en fonction de son diamètre.

Il est intéressant de remarquer que la plupart des erreurs relevées dans les réponses des élèves proviennent en fait d'un raisonnement linéaire appliqué à une situation non proportionnelle. Nous appelons « erreur » les réponses qui proviennent d'un raisonnement inadapté. Une réponse fausse amenée par une erreur de calcul peut donc être considérée comme correcte si le raisonnement l'est.

2. Post-test

Dans le but de vérifier si les manipulations améliorent la pertinence des démarches des élèves, une première partie du post-test est composée de questions semblables à celles du pré-test.

Nous avons souhaité garder le même ordre dans les questions posées au pré-test et au post-test pour éviter que ce facteur puisse influencer les résultats.

La deuxième partie du post-test a, pour sa part, l'objectif d'évaluer les apprentissages liés à l'étude de la proportionnalité et de permettre ainsi une comparaison entre les *classes-tests* et *classes-témoins*.

Pour chacune des situations proposées, les élèves doivent dire s'ils se trouvent face à des situations de proportionnalité ou non et expliquer les raisons qui guident leur choix. Contrairement à la première partie du post-test, ce ne sont plus des énoncés de « problèmes », ce sont des situations présentées sous différentes formes : des tableaux, des graphiques, des situations géométriques, … Ces situations ainsi que leur présentation sont fortement inspirées d'une publication du CREM (2002).

Nous avons pris soin de présenter les tableaux sous différentes formes : verticale, horizontale ou encore comme dans la situation de la figure 6.

Situation 1

Agrandissements de photos

10 cm × 15 cm
13 cm × 18 cm
20 cm × 23 cm
30 cm × 45 cm
40 cm × 60 cm

Proportionnalité ou *non-proportionnalité ?*
car

Figure 6

3. *Expérimentation 2009-2010*

Tous les enseignants du premier degré secondaire [12-14 ans] d'une école ont accepté d'adhérer à notre projet. Seize classes ont donc fait partie du protocole d'expérimentation. Sur ces 16 classes, il y avait 8 premières années secondaires [12-13 ans] et 8 classes de deuxièmes [13-14 ans]. Nous avons de cette façon eu la possibilité d'avoir 4 *classes-tests* et 4 *classes-témoins* pour chacune de ces années.

Nous avons proposé à ces enseignants des séquences d'apprentissage complètes sur l'étude de la proportionnalité. L'une d'elles intègre la *Math & Manip* tandis que l'autre propose de réaliser une activité classique du manuel suivi par l'école. Cette activité fait intervenir des tableaux de nombres ainsi que des graphiques, tout comme dans la *Math & Manip*. De plus, nous avons proposé aux élèves des *classes-témoins* de réaliser les problèmes tout autant classiques de règle de trois issus du manuel. Ensuite nous avons complété les séquences d'apprentissage, tant pour les *classes-tests* que pour les *classes-témoins*, par une activité permettant de rencontrer une fonction affine ainsi qu'une autre travaillant les coefficients de proportionnalité.

Suite à un contretemps, le pré-test, initialement prévu un mois avant le début de l'implémentation des séquences d'apprentissage, n'a pu avoir lieu que le vendredi précédant ces séquences d'apprentissages. Deux semaines ont alors été consacrées à l'étude de la proportionnalité, suivant les séquences proposées. À la fin de ces deux semaines, le post-test a été passé par l'ensemble des élèves durant leur cours de mathématiques sous forme de test.

Un second post-test était envisagé mais n'a pas été réalisé, nous en reparlons ci-dessous.

4. *Problèmes rencontrés et décisions pour la seconde expérimentation*

Nous décrivons ci-dessous les constatations issues de cette première expérimentation ainsi que les changements qui ont été apportés pour la deuxième expérimentation.

Premièrement, le contretemps qui nous a contraints à faire passer le pré-test juste avant de commencer les expérimentations a engendré des difficultés pour exploiter les données de cette première expérimentation.

En effet, nous n'avons pas eu le temps d'analyser les réponses des élèves au pré-test et de vérifier la bonne répartition des *classes-tests* et *classes-témoins*. Nous avons dû nous fier aux enseignants qui nous ont dit avoir des classes de même niveau. Nous nous sommes donc basés sur une répartition des *classes-tests* et *classes-témoins* au sein des classes d'un même enseignant. Les pré-tests ont révélés par la suite que le niveau des *classes-témoins* était plus élevé que celui des *classes-tests*.

Cette différence de niveau au départ empêche d'analyser l'évolution des élèves à grande échelle. Nous avons dès lors abandonné l'idée du second post-test à long terme étant donné le peu d'informations que nous pourrions en retirer.

Néanmoins, nous comptons exploiter les données issues de cette première expérimentation en identifiant, par une méthode de clusters, des échantillons d'élèves ayant adopté un même comportement lors du pré-test dans les *classes-tests* et *classes-témoins*. Si la taille de ces échantillons est suffisamment significative, leurs résultats au post-test pourront être exploités.

Deuxièmement, lors des corrections des pré-tests, nous nous sommes rendus compte que l'ensemble des élèves de deuxième secondaire [13-14 ans] avaient un très bon niveau, tant dans les *classes-témoins* que dans les *classes-tests*. Nous avons alors décidé de centrer l'expérimentation de l'année suivante uniquement sur les élèves de première secondaire [12-13 ans].

Troisièmement, la confrontation des résultats des pré-tests et post-tests a mis en avant des comportements des élèves très différents face à des questions que nous pensions similaires. Nous avons alors décidé de vérifier l'équivalence des questions pour mettre ainsi au point un post-test dont les questions soient réellement équivalentes à celles du pré-test.

Plusieurs enseignants ont accepté de faire passer un questionnaire à leurs élèves, dans lequel les questions dont nous voulions tester l'équivalence ont été mélangées. Nous avons proposé ce questionnaire jusqu'à obtenir l'équivalence parfaite des questions du pré-test et du post-test pour la seconde expérimentation.

Par exemple, nous pensions les deux questions suivantes tout à fait semblables :

- Quatre amis achètent ensemble un gros paquet de chocolats. Cela leur revient à 2 € chacun. S'ils avaient été huit amis pour payer le même paquet de chocolats, combien paierait chaque ami ?
- Avec une bouteille d'eau, je remplis 6 verres de 20 cl. Combien aurais-je pu remplir de verres de 10 cl ?

Lorsque ces questions ont été présentées dans le test d'équivalence, nous nous sommes aperçus que les élèves ne les résolvaient pas de la même manière, ceci étant parfois dû à une mauvaise compréhension de la situation. Nous avons alors remplacé la première question par la suivante :

- Avec un gros sac de bonbons, j'ai pu faire 6 sachets de 300 grammes. Combien de sachets de 100 grammes aurais-je pu faire ?

Les tests qui ont suivis ont bien montré que la question portant sur la bouteille d'eau amenait les mêmes types de réponses (dans un même pourcentage) que celle-ci-dessus.

Les questions équivalentes à celles du pré-test ont donc été placées dans la première partie du post-test.

5. *Expérimentation 2010-2011*

Tous les enseignants de la première année du secondaire [12-13 ans] d'une seconde école ont accepté d'adhérer à notre projet. Nous avons ainsi eu 10 classes prêtes à suivre les séquences d'apprentissages que nous leur proposions. Sur ces 10 classes, 5 d'entre elles ont été *classes-témoins* et les 5 autres *classes-tests*.

Nous avons proposé aux enseignants, tout comme pour l'expérimentation précédente, des séquences d'apprentissage complètes sur l'étude de la proportionnalité : l'une d'elle intégrant la *Math & Manip*, l'autre proposant de réaliser les activités classiques issues du cours conçu par les enseignants de l'école. Les séquences d'apprentissage comportent, tant pour les classes témoins que pour les classes tests, un travail sur les coefficients de proportionnalité.

Le pré-test nous a assuré que les élèves avaient des niveaux équivalents. Bien que le cours des enseignants était d'avance bien construit et intégrait notamment des situations de non-proportionnalité, nous avons préféré attribuer le rôle de *classe-test* à l'ensemble des classes de deux enseignants et celui de *classe-témoin* aux classes des deux autres enseignants. Ces derniers n'ont ainsi pas été du tout au courant de la *Math & Manip* proposée afin de ne pas influencer leur cours témoin.

Les deux semaines consacrées aux séquences d'apprentissage sur la proportionnalité ont été clôturées par le premier post-test dont l'équivalence des questions avec celles du pré-test avait été assurée auparavant. Les élèves ont répondu au second post-test destiné à comparer leurs apprentissages à long terme au mois de juin 2011.

V. RÉSULTATS

Une des questions de recherche concerne l'apport de situations de non-proportionnalité dans l'étude de la proportionnalité. L'expérimentation de cette année scolaire 2010-2011 ne nous donne pas de réponse étant donné que les élèves des *classes-témoins* ont également été confrontés à ces deux types de situations. Par contre, la première expérimentation (2009-2010) nous fournit des données. Les analyses doivent encore être réalisées après avoir sélectionné les échantillons d'élèves adoptant un même comportement face à une sélection de questions.

Les *classes-témoins* de l'expérimentation de l'année scolaire (2010-2011) ayant reçu un cours dans lequel les situations de non-proportionnalité étaient présentes nous permettent d'isoler l'étude de l'apport des manipulations quant à la pertinence des démarches des élèves face à des questions de mathématiques mobilisant le sens commun. L'évolution des comportements des élèves vis-à-vis des questions du pré-test à celles du post-test doit encore être établie. Les premiers résultats seront présentés lors du colloque.

L'impact des manipulations ne sera pas nécessairement visible autant que ce que nous espérons. En effet, les élèves des *classes-tests* n'auront qu'une seule *Math & Manip* à leur actif or nous pensons que c'est à long terme, en réalisant des manipulations régulièrement au cours des années, que la réflexion peut s'améliorer.

La dernière question de recherche est centrée sur l'apport des manipulations pour les connaissances à long terme. Le second post-test, réalisé en juin 2011, permettra de donner des éléments de réponse.

Les analyses étant en cours, nous présenterons l'ensemble des résultats en février 2012, lors du colloque.

RÉFÉRENCES

Artigue M. (1989) Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 9(3), 281-308.

Baruk S. (1985) *L'âge du capitaine : de l'erreur en mathématiques*. Paris : Seuil.

Borel É. (1904) *Les exercices pratiques de mathématiques dans l'enseignement secondaire*. Conférence prononcée le 3 mars 1904, Musée Pédagogique, Paris. http://smf.emath.fr/Publications/Gazette/2002/93/smf_gazette_93_47-64.pdf

Brousseau G. (1989) Obstacles épistémologiques, conflits socio-cognitifs et ingénierie didactique. In Bednarz N., Garnier C. (Eds.) (pp. 277-285) *Construction des savoirs – Obstacles et conflits*. Montréal : CIRADE Les éditions Agence d'Arc inc.

Brousseau G. (1990) Le contrat didactique : le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques* 9(3), 309-336.

Brousseau G. (1998) *La théorie des situations didactiques*. Recueil de textes de Didactique des mathématiques 1970-1990 présentés par N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland et V. Warfield. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CREM (2002) *Des grandeurs aux espaces vectoriels, la linéarité comme fil conducteur.* Nivelles : Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques.

De Bock D., Van Dooren W., Janssens D., Verschaffel L. (2007) *The illusion of linearity. From analysis to improvement*. New-York : Springer.

Dias T., Durand-Guerrier V. (2005) Expérimenter pour apprendre en mathématiques. *Repères-IREM* 60, 61-78.

Duval R. (1993) Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 5, 37-65.

Giordan A., De Vecchi G. (1987) *Les origines du savoir*. Neuchâtel : Delachaux.

Guissard M.-F., Henry V., Agie S., Lambrecht P. (2010) Math & Manips. *Losanges* 7, 39-46.

Guissard M.-F., Henry V., Lambrecht P., Vansimpsen S. (À paraître) Compte-rendu de l'atelier *Math & Manips* : l'apport des manipulations à la confrontation des modèles linéaire et non linéaires. In *Actes du Colloque de la CII-Collège 2010*. Orléans.