LA DEMARCHE D'INVESTIGATION DANS LES SITUATIONS DE RECHERCHE POUR LA CLASSE (SIRC)

Denise GRENIER*

Résumé – Nous présentons une analyse du rôle de la démarche de recherche et de l'activité expérimentale dans nos SiRC, en lien avec la démarche d'investigation telle qu'elle est décrite dans les programmes scolaires français des collèges et lycées et les documents Ressources associés. La démarche d'investigation fait partie intégrante des SiRC. Cependant, l'interprétation de ce terme dans les textes officiels porte des aspects de fermeture qui vont à l'encontre de l'esprit d'invention nécessaire à la recherche et à l'apprentissage des raisonnements inductif et déductif. J'illustrerai cela par des exemples de documents officiels et des SiRC.

Mots-clefs : Activité mathématique, situation de classe, expérimental, démarche de recherche

Abstract – We present an analysis of the role of research processes and experimental activities in our Situation of Research in Class (SiRC), in connection with investigation activity in French junior high schools and high schools, as described in curricula and related documents. The investigation activity is a full part of SiRC. However, the interpretation of these words in regulatory texts may lead to restrictions that go against the spirit of invention required for carrying out research and inductive or deductive reasoning. I will illustrate this with examples of official documents and SiRC.

Key-words: Mathematical activity, class situation, experimental and research activity

I. INTRODUCTION

Cette contribution est issue d'une recherche menée depuis de nombreuses années dans l'équipe «combinatoire et didactique des mathématiques » et dans l'ERTé[1] Maths-à-Modeler. L'objet essentiel de ce travail est la construction, l'expérimentation et l'étude de Situations de Recherche pour la Classe (SiRC). Le modèle SiRC (Grenier et Payan2003, Grenier 2009) dont nous rappelons ci-après les caractéristiques, a des points communs avec les « situations-problèmes » et « problèmes ouverts » (Arsac et al. 1991), mais s'en distingue par des aspects essentiels (pour nous) du point de vue de la démarche de recherche, que nous exposerons et illustrerons.

Nous donnons dans ce texte des éléments d'analyse de l'activité mathématique, en essayant d'y situer la « démarche d'investigation » telle qu'elle est décrite dans les programmes scolaires actuels français. Beaucoup de questions se posent sur les choix des problèmes qui assureraient à la fois leur faisabilité en classe (dévolution, durée et gestion) et leur pertinence pour les objectifs visés (savoir faire des mathématiques). Les réponses ne sont pas faciles, contrairement à ce que peuvent laisser croire les commentaires des programmes et les propositions d'exercices des documents ressources. Nous devons construire des problèmes adéquats. Les Situations de Recherche pour la Classe présentées ici en sont des exemples, qui tentent de réunir les caractéristiques pour une vraie activité de recherche et les conditions d'un fonctionnement raisonnable dans la classe.

L'objectif des SiRC est l'apprentissage des savoir-faire fondamentaux pour faire des mathématiques, tels : expérimenter, étudier des cas particuliers, modéliser, formuler des conjectures et les étudier par la production d'exemples et contre-exemples, argumenter, distinguer condition nécessaire/condition suffisante, définir, prouver. Pour de nombreuses

* Équipe Combinatoire et Didactique des mathématiques, Institut Fourier, Université Grenoble 1 – France – dgrenier@ujf-grenoble.fr

1 Équipe de Recherche Technologique sur l'enseignement, Ministère de l'enseignement 2002-2010.

© Grenier D. (2012) La démarche d'investigation dans les situations de recherche pour la classe (SiRC). In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT10, pp. 1354–1364). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

SiRC, nous avons maintenant une analyse a priori fiable et des éléments de gestion pour la classe. Certaines sont intégrées dans des cursus de formation d'enseignants, et dans des enseignements universitaires pour lesquels les étudiants doivent être évalués – l'évaluation porte sur l'apprentissage des savoir-faire fondamentaux de l'activité mathématique que nous venons de décrire. L'intérêt de ces situations est renforcé du fait des programmes actuels du collège et lycée français.

II. DEMARCHE DE RECHERCHE, DEMARCHE EXPERIMENTALE ET DEMARCHE D'INVESTIGATION

1. *L'activité mathématique du chercheur*

Rappelons d'abord la phrase de Lichnerowicz (in Nimier 1989, p. 19) : « L'activité mathématique pour moi, enfin pour n'importe quel chercheur en mathématiques est d'une espèce assez différente [de celle qui est communément admise] : vous vous posez une question, vous vous préoccupez d'un problème ». Plus proche de nous, Perrin (2007, p. 7) écrit, en le posant comme « maxime » : « Faire des mathématiques c'est poser et – si possible – résoudre des problèmes ».[2]

Pour faire des mathématiques, il faut savoir « chercher ». Une question se pose alors : Quelles conditions permettent de faire la dévolution aux élèves de la *démarche de recherche*, composante essentielle d'une activité mathématique conforme à celle évoquée par ces deux mathématiciens ? Cela ne va pas de soi, et c'est peut-être une erreur qui est souvent faite dans l'enseignement : poser différemment un exercice usuel (d'application d'une définition, d'un théorème ou d'une technique) pour en faire une situation « de recherche ». Autre erreur familière : cacher le problème mathématique sous un contexte « de la vie courante ». Ces effets non pertinents ont été étudiés par les didacticiens (je renverrai juste ici à Coulange 1998).

2. *La démarche expérimentale*

Dans son quotidien, un chercheur va faire des essais, résoudre des cas particuliers, calculer, dessiner, étudier des conjectures, changer de cadre ou de registre, se poser une nouvelle question, mais aussi s'informer sur ce qui a été fait, échanger et débattre avec d'autre chercheurs. Où commence et où s'arrête l'activité expérimentale dans tout ça ? Quel est le rôle de l'expérimental dans la résolution d'une question, d'un problème ? Il n'y a pas de réponse simple, car tout est imbriqué. Perrin (Op. cité) décrit une expérience mathématique en deux phases, l'une expérimentale, l'autre d'observation des résultats de l'expérience. Giroud (2011), dans sa thèse sur la démarche expérimentale dans les SiRC, la décrit comme « un ensemble d'actions et de rétroactions entre les différents léments suivants : questions, expérimentations, hypothèses, conjectures, preuves ».

3. *La « démarche scientifique » dans le programme de seconde*

En France, le récent programme de la classe de seconde (élèves de 15 à 16 ans) décrit ainsi la « démarche scientifique » dans l'introduction du programme de mathématiques pour la classe de seconde, BO n°30 du 23 juillet 2009, page 1, dont voici un extrait.

> L'objectif de ce programme est de former les élèves à la démarche scientifique sous toutes ses formes pour les rendre capables de :

[2] Il faudrait pouvoir citer plus largement ces deux textes, très intéressants pour le thème qui nous préoccupe ici.

- modéliser et s'engager dans une activité de recherche ;
- conduire un raisonnement, une démonstration ;
- pratiquer une activité expérimentale ou algorithmique ;
- faire une analyse critique d'un résultat, d'une démarche ;
- pratiquer une lecture active de l'information (critique, traitement), en privilégiant les changements de registres (graphique, numérique, algébrique, géométrique) ;
- utiliser les outils logiciels (ordinateurs ou calculatrices) adaptés à la résolution d'un problème ;
- communiquer à l'oral et à l'écrit.

Tout y est, ou presque. Il reste le plus difficile pour les enseignants, à savoir quels problèmes proposer aux élèves pour réaliser ces objectifs ambitieux. Ce que propose le document « ressources » associé[3] est nous semble-t-il très en deçà des ambitions avancées.

4. La démarche d'investigation dans les documents officiels pour le collège

Dans les programmes des collèges français actuels, la démarche d'investigation occupe une page entière dans le document commun aux quatre années de collège[4]. En voici un premier extrait.

> La démarche d'investigation présente des analogies entre son application au domaine des sciences expérimentales et à celui des mathématiques. La spécificité de chacun de ces domaines, liée à leurs objets d'étude respectifs et à leurs méthodes de preuve, conduit cependant à quelques différences dans la réalisation. Une éducation scientifique complète se doit de faire prendre conscience aux élèves à la fois de la proximité de ces démarches (résolution de problèmes, formulation respectivement d'hypothèses explicatives et de conjectures) et des particularités de chacune d'entre elles, notamment en ce qui concerne la validation, par l'expérimentation d'un côté, par la démonstration de l'autre. (Extraits de l'introduction commune aux quatre niveaux du programme de collège en mathématique – B.O. Spécial n°6 du 28 août 2008, p. 4)

Une remarque immédiate : la démarche d'investigation en mathématique ne se distinguerait de celle en sciences expérimentales qu'au moment de la validation. Or, l'observation expérimentale et le raisonnement inductif n'ont pas les mêmes fonctions en mathématiques et dans les autres sciences. Dans ces dernières, si aucune observation contraire ne vient contredire celles qui ont été faites, elles seront considérées comme valides (ce sera le cas sur un petit nombre d'observations en classe). C'est bien sûr faux en mathématiques.

Que se cache-t-il derrière cette affirmation d'une (grande) « proximité » entre les deux domaines ? Le risque est de masquer les spécificités du raisonnement mathématique, indispensable pour mener la résolution d'un problème, pour construire et étudier des conjectures. Il n'est peut-être pas prévu que les conjectures des élèves puissent être fausses ! Ce qui est effectivement rarement le cas avec des logiciels de géométrie dynamique qui donnent des conjectures évidemment vraies, ou avec des calculatrices sophistiquées qui donnent des calculs justes. Or les incertitudes font partie intégrante d'une situation permettant une vraie investigation.

Continuons la lecture de la page consacrée à la démarche d'investigation. Un « canevas d'une séquence d'investigation » est proposé. Ce canevas est commun aux disciplines scientifiques, il est dit qu'il doit être « aménagé » pour chacune d'elles. Il contient sept « moments essentiels » non nécessairement linéaires, des aller et retours entre eux étant possibles. Les voici :

- le choix d'une situation-problème
- l'appropriation du problème par les élèves
- la formulation de conjectures, d'hypothèses explicatives, de protocoles possibles

[3] Ressources pour la classe de seconde, notations et raisonnement mathématiques, juillet 2009. Ministère de l'éducation nationale, site Éduscol.

[4] *B.O. Spécial n°6 du 28 août 2008.*

- l'investigation ou la résolution du problème conduite par les élèves
- l'échange argumenté autour des propositions élaborées
- l'acquisition et la structuration des connaissances
- la mobilisation des connaissances.

Chacun de ces moments est décrit, nous ne ferons ici que quelques remarques sur leurs choix, leurs intitulés et leur description. Les sept « moments » sont de types et d'importance très inégaux, rien n'est dit à ce sujet. Il y a ceux qui ne concernent que l'enseignant tel le choix d'une situation-problème (moment qui se situe hors du temps de la classe). Les phases didactiques et adidactiques ne sont pas clairement distinguées : ainsi, dans la description du moment d'appropriation du problème par les élèves, il est dit l'enseignant peut intervenir pour guider et recentrer le travail, reformuler la question. Que reste-t-il comme investigation à l'élève ? L'acquisition des connaissances est-elle un « moment » ? Les deux derniers moments font-ils vraiment partie de l'investigation ? On peut se demander si ce canevas donnera réellement aux enseignants des outils pour choisir et gérer une situation d'investigation pertinente pour les élèves.

Le document « Ressources pour les classes de 6^e, 5^e, 4^e et 3^e du collège » sur le thème « raisonnement et démonstration » contient un paragraphe intitulé « démarche d'investigation et raisonnement » (page 3).

b) Démarche d'investigation et raisonnement

Dans le domaine scientifique, la démarche d'investigation occupe une place essentielle à chaque fois qu'une question est posée et que la réponse ne peut être donnée immédiatement à partir de connaissances disponibles. La mise en œuvre d'une telle démarche dans une séquence d'enseignement doit déboucher sur des acquisitions de connaissances et de compétences.
En mathématiques, elle trouve véritablement sa place dans la résolution de problèmes (ou de questions ouvertes) et doit donner l'occasion, par sa mise en œuvre, d'acquérir ou de consolider des compétences pour concervoir ou utiliser un raisonnement.

✓ *Les étapes possibles d'une démarche d'investigation en mathématiques*

Réflexion sur le problème posé :

1. appropriation du problème, vocabulaire, contexte,
2. confrontation avec les savoirs disponibles (il est donc nécessaire de « connaître son cours »),
3. recherche éventuelle d'information sur le thème.

Élaboration d'une conjecture :

1. recherche, avec mise en place éventuelle d'une première expérimentation
2. émission de la conjecture,
3. confirmation, avec mise en place éventuelle d'une seconde expérimentation.

Mise en place d'une preuve argumentée.

Figure 1 *– extrait du document « ressources pour les classes de 6^e, 5^e, 4^e et 3^e du collège » thème « raisonnement et démonstration »*

La démarche d'investigation est donc prévue dans des problèmes relatifs à une notion qui fait l'objet d'un « cours » qu'il faut connaître. L'activité de recherche est donc ici biaisée, puisque l'on sait déjà ce qui va résoudre la question. Et même plus, une vraie investigation est-elle possible si le savoir à mettre en jeu est désigné à l'avance ? Pour comprendre un peu mieux ce qu'il y a derrière ces étapes suggérées, étudions les deux exemples proposés dans ce même document, rubrique « raisonnement déductif et démarche d'investigation ».

Premier exemple du document Ressources, page 4

Exemple 1*, en troisième (élèves de 14 à 15 ans) :*

$\sqrt{2}$ est-il un nombre décimal

Pour étudier la question « est-ce vraiment un nombre décimal ? », il faut qu'il y ait un doute, des expérimentations accessibles et des connaissances disponibles pour établir la preuve. On peut préparer le « milieu pour une investigation », en ayant travaillé auparavant les deux propriétés suivantes concernant la multiplication des nombres décimaux : « Le carré d'un nombre décimal ayant n chiffres après la virgule est un nombre décimal ayant $2n$ chiffres après la virgule » et « Le dernier chiffre du carré d'un nombre décimal est le dernier chiffre du carré de la dernière décimale de ce nombre ». Si les élèves savent que $\sqrt{2}$ n'est pas un décimal, et alors il n'y a pas de vraie investigation en jeu qui aboutirait à des conjectures (vraie ou fausse) à débattre, il reste malgré tout à construire une preuve. Si les élèves savent seulement que, par définition, c'est le nombre positif dont le carré est égal à 2, quelle investigation peuvent-ils faire ? Le document Ressources en décrit une possible, qui me semble peu probable dans son déroulement (voir ci-après). En effet, si l'utilisation de la calculatrice permet d'afficher une valeur décimale prise comme un *nombre* décimal, et que le carré de ce nombre donne 2, quelle rétroaction la situation apporte-t-elle à l'élève pour qu'il mette en doute ce résultat ? Le raccourci fait dans le document Ressources affirmant que la calculatrice conduit à la bonne conjecture est, de mon point de vue, assez utopique, sauf si l'enseignant induit les « bonnes » questions (comme il est prévu dans le canevas décrit ci-dessus).

Première expérimentation : la calculatrice donne, comme valeur de $\sqrt{2}$ une première conjecture :

$$\boxed{1{,}414213562}$$

qui doit amener la remarque : « Quelle est la dixième décimale ? ».

Une deuxième expérimentation pourrait être d'effectuer $1{,}414213562 \times 1{,}414213562$ avec la calculatrice, ce qui donne 2.

L'infirmation de la conjecture : « $\sqrt{2} = 1{,}414213562$ » pourrait être élaborée à partir de la remarque d'un élève qui a commencé à poser l'opération et qui dit « le dernier chiffre après la virgule est un 4 ».

Émission d'une nouvelle conjecture : « il n'y a pas de nombre décimal dont le carré est 2 ».

Et la preuve : s'il y en avait un, il s'écrirait 1,41421356 …..... 1
ou 1,41421356 …..... 2
ou 1,41421356 …..... 3
ou 1,41421356 …..... 4 etc.

- ✓ tous les cas peuvent être examinés avec le raisonnement précédent, ***raisonnement par disjonction des cas.***
- ✓ d'où la conclusion : ***raisonnement par l'absurde.***

Figure 2 *– Commentaires du document « ressources ... accompagnant l'exemple 1*

Second exemple du document Ressources (page 5)

Exemple 2, à partir de la quatrième : Deux points A et B étant donnés, déterminer l'ensemble de tous les points C tels que le triangle ABC soit un triangle rectangle en C

On peut supposer que ce problème induit une investigation seulement si l'élève ne connaît pas le théorème qui répond à la question : l'ensemble des points C du plan est le cercle de diamètre [AB] privé de A et B. Cette remarque qui peut sembler banale ne va pas de soi pour certains enseignants. Lors d'un stage de formation continue, j'ai fait étudier cet exemple du point de vue de la démarche d'investigation, sans donner les commentaires du document. Pour une large majorité de ces enseignants, il n'y avait que deux possibilités : soit l'élève connaissait le théorème (donc, le résultat) et le travail qu'on lui demandait était d'écrire la preuve ; soit, il devait utiliser un logiciel de géométrie dynamique, pour avoir la conjecture. Dans chacun de ces choix, la part laissée à l'élève pour expérimenter et chercher est très réduite, car considérée comme inaccessible, le problème ne pouvait donc remplir son objectif[5].

Les commentaires du document Ressources (voir ci-après) situent bien le problème dans la recherche du théorème. Cependant, ils mettent sur le même plan la construction des points *C* avec les instruments matériels et celle avec un logiciel de géométrie dynamique. Or, du point de vue de l'investigation, ce n'est pas du tout la même activité pour l'élève. On aurait pu s'attendre au contraire que dans un tel paragraphe, les deux soient bien dissociés.

D'autre part, le déroulement fictif présenté pour la situation ne distingue pas les apports de l'enseignant du travail personnel des élèves.

Première expérimentation : tracé d'un certain nombre de points avec une équerre ou avec un logiciel de géométrie dnamique (dans les deux cas, l'élève est amené à raisonner pour faire sa construction).

Observation : cela semble être un cercle. Mais quel est son centre ?

Émission d'une conjecture : l'ensemble des points est le cercle de diamètre [AB].

Vérification expérimentale avec une règle graduée, un compas ou le logiciel : la distance du milieu de [AB] aux points tracés est-elle égale à la moitié de AB ?

Un triangle tracé en partant d'un point du cercle est-il toujours rectangle ?

Justification :

Qu'est-ce qui permet de montrer que C est sur le cercle de centre M et de diamètre [AB] (privé des deux points A et B) ?

La diagonale d'un rectangle ?

Des triangles isocèles (grâce aux angles) ?

Les médiatrices des côtés de l'angle droit ? Et réciproquement ?

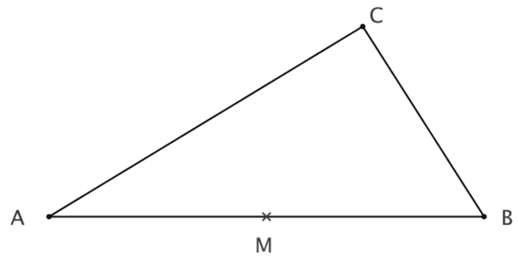

***Figure 3** – Commentaires du document « ressources … » accompagnant l'exemple 2*

En conclusion de cette étude partielle, il nous semble que l'investigation proposée aux élèves est (trop) contrainte à la fois par la désignation des notions ou propriétés visées, l'utilisation d'outils externes (calculatrice, logiciel) qui donnent les « bonnes » conjectures, et une interaction fréquente de l'enseignant avec la situation (pour guider, recentre, reformuler). Nous n'avons trouvé aucune remarque dans ce texte sur l'importance du doute, la part de l'empirique, celle de l'intuition, la gestion des erreurs et des impasses, etc., ni aucun moyen ou critère pour que l'enseignant puisse faire sa propre analyse a priori et choisir les situations pertinentes et leur gestion (sauf quelques remarques très générales).

III. LA DEMARCHE D'INVESTIGATION DANS LES SITUATIONS DE RECHERCHE POUR LA CLASSE

1. Nos postulats pour la garantie d'une vraie activité mathématique

- Il n'y pas réellement la possibilité d'une investigation par l'élève sans un enjeu de vérité dont il peut s'emparer, qu'il peut tester et non évident à prouver.

[5] Un enseignant de collège de l'académie l'a expérimentée avec succès dans sa classe, avec règle, équerre et compas.

- Il n'y pas réellement possibilité d'une investigation par l'élève si une « boîte à outils » (théorèmes, propriétés, algorithmes) est disponible et désignée de manière évidente pour la résolution.
- Il n'est ni nécessaire ni suffisant d'aller chercher des contextes « de la vie courante » pour faire pratiquer une démarche de recherche, expérimentale ou d'investigation : cela ne garantit pas la pertinence du problème, et peut même apporter des bruits qui font obstacle à l'investigation.
- Il n'est pas raisonnable de faire travailler la démarche de recherche – et donc la démarche d'investigation – en même temps que l'apprentissage de notions nouvelles difficiles. En conséquence, les problèmes seront accessibles à de nombreux niveaux de connaissance (parfois du primaire à l'université) sans être caducs.

2. Le modèle de Situation de Recherche pour la Classe

Il était déjà en gestation dans Arsac et al. 1995 et Grenier et Payan 1998. Rappelons ici la caractérisation du modèle SiRC, telle qu'elle a été reprise dans Grenier 2009, car les ressemblances avec le sujet qui nous intéresse ici sont évidentes. Comme tout modèle, celui-ci est une référence (aussi bien épistémologique que pratique) pour les situations que nous construisons, qui peuvent s'en démarquer plus ou moins.

- Une SiRC est proche d'une question vive de la recherche mathématique. Cette condition, assez contraignante, a pour but d'éviter que la question ou la réponse semblent évidentes ou familières. L'objectif est de donner une pertinence à l'activité de recherche. Cette condition peut être artificiellement recréée par la mise en scène du problème, lorsque celui-ci est résolu dans la recherche.
- La question initiale est facile d'accès et pertinente à des niveaux différents. Notre intention est de rompre avec la pratique didactique usuelle qui tend à attribuer tout problème à un niveau scolaire précis. Les savoir-faire transversaux doivent en effet être pris en charge tout au long de la scolarité, du primaire à l'université. Pour remplir cette condition, les énoncés des SiRC sont forcément peu mathématisés, mais nous cherchons à éviter les « bruits » non mathématiques courants dans les problèmes dits « concrets », qui complexifient la tâche de l'élève et l'empêchent parfois de rentrer dans les mathématiques.
- Des stratégies initiales existent, mais elles ne résolvent pas complètement la question. En d'autres termes, il faut assurer la dévolution du problème, tout en laissant une incertitude qui ne peut être réduite par la seule application de techniques ou propriétés usuelles connues (c'est ainsi que Brousseau décrit, dans sa théorie, une « bonne » situation). Le cadre théorique de résolution n'est ni donné, ni évident, mais il est possible de s'emparer du problème sans cela.
- Plusieurs avancées dans la résolution sont possibles, par essais-erreurs, étude de cas particuliers, production d'exemples, etc. Il s'agit de favoriser la construction par les élèves de conjectures — issues de l'exploration de la question — qui ne seront pas évidemment vraies, mais pourront être examinées au moyen d'exemples et de contre-exemples construits par les élèves eux-mêmes.
- On peut changer les hypothèses, ou la question initiale, et s'emparer d'un nouveau problème. La question initiale peut déboucher sur des questions annexes : fermeture du problème par choix de valeurs de certains paramètres, ou question nouvelle issue de l'activité de recherche.

Enfin, une SiRC est caractérisée par des variables (didactiques ou adidactiques), et au moins une **variable de recherche** (Godot 2005), paramètre du problème qui pourrait être une variable didactique, mais qui est laissé à la disposition de l'élève. Cette variable de recherche détermine ce qui, dans la situation, conduit à une activité mathématique, parce que :

- il y a, à la charge de l'élève, une question et un enjeu de vérité, dont il peut s'emparer mais qui ne sont pas résolubles rapidement,
- il n'y a pas de « boîte à outils » (théorèmes, propriétés, algorithmes) disponible de manière évidente pour la résolution.

On s'accordera aisément sur le fait que très peu de problèmes de la recherche actuelle en mathématiques peuvent être transposés ainsi. Le choix des « bonnes » questions de recherche et de leur transposition pertinente en SiRC est donc une tâche difficile. Mais c'est peut-être à ce prix que l'on peut assurer une vraie activité mathématique. Les mathématiques discrètes sont un domaine privilégié, mais pas le seul comme b-nous le verrons ensuite.

Des analyses *a priori*, des organisations didactiques et les objets des phases collectives et d'institutionnalisation, sont décrits dans Grenier 2009. Nous renvoyons le lecteur à ce texte. Ils montrent que l'on peut assurer la dévolution d'une investigation « mathématique » ouverte, à des niveaux très différents. Des exemples de ces SiRC et leur analyse ont été présentées aux colloques EMF2006 et AMQ2006[6] à Sherbrooke (Grenier et Payanb 2007, Grenier 2008b), ainsi que dans un ouvrage de vulgarisation (Grenier 2008a). En particulier, nous montrons comment, dans la situation « pavage de polyminos par des dominos ou triminos » l'investigation, induite par la *manipulation* de polyminos matériels, permet la résolution de cas particuliers et l'énoncé de conjectures (vraies ou fausses) à tous les niveaux scolaires, avant de devenir un outil de preuve. La preuve reste à faire, mais tous les éléments en ont été construits par les élèves.

Dans ses travaux, Ouvrier-Buffet (2003) a étudié *l'activité de définition* dans un domaine mathématique pour lequel les étudiants n'avaient aucun support théorique disponible – les mathématiques discrètes. Ses travaux montrent bien comment la phase expérimentale, les essais et les recherches systématiques sur un objet qui reste à découvrir, aboutissent à des « zéros-définitions », ce qui était le but de ces problèmes. Ceci est repris dans Ouvrier-Buffet 2010 avec la question « comment permettre à des étudiants d'avoir une expérience mathématique ? »

Toujours dans le domaine des mathématiques discrètes, Cartier (2008a et 2008b) a étudié un problème qui se modélise par deux types de graphes, l'un étant pertinent et l'autre non. C'est clairement l'investigation qui permet de choisir le « bon » modèle. Les notions en jeu sont celles du programme de la spécialité Maths de Terminale ES. Ses travaux analysent aussi comment les choix de transposition faits réduisent l'activité de modélisation à quasiment rien, alors que le modèle « graphe » est pertinent et accessible même à des élèves de primaire.

Deloustal-Jorrand (2004), quant à elle, a au contraire construit une SiRC mettant en jeu des notions géométriques très institutionnalisées (les quadrilatères), l'activité de recherche étant assurée à la fois par le choix du sous-ensemble de quadrilatères à étudier et les questions posées, comme celle-ci par exemple :

> On se place dans l'ensemble des quadrilatères ayant deux côtés opposés de même longueur. A quelles conditions sur les diagonales les deux autres côtés sont-ils parallèles ?

---

6 Association Mathématique du Québec

L'étude de cas particuliers, les tracés de figures génériques et la reformulation de la question sont nécessaires pour faire des conjectures, non évidentes à prouver. En effet, aucune des propriétés connues n'est suffisante pour résoudre la question, mais les propriétés classiques sur les quadrilatères vont permettre d'en faire la dévolution et d'initier la résolution.

Dans la situation « Polyèdres réguliers de l'espace » (Tanguay et Grenier 2009, 2010), une SiRC a été construite sur une propriété bien connue (celle des cinq polyèdres de Platon) par un choix des questions (définir, construire, prouver) et une mise en scène du problème (manipulation de matériel sommets-arêtes). Nous décrivons comment la manipulation induit une démarche d'investigation qui, avant d'aboutir à des conjectures, permet de repérer des conceptions erronées (parfois étonnantes) sur les objets du plan concernés (polygones, régularité, angle « digone »), les objets de l'espace (polyèdre, angle dièdre) et les rapports entre eux. En particulier, nous y avons repéré l'absence totale de la notion d'angle dièdre chez les étudiants de niveau licence préparant le concours d'enseignement (à Grenoble comme à Montréal), alors que celle-ci est présente (mais implicite) dès qu'on fait de la géométrie dans l'espace au lycée (Grenier et Tanguay 2008).

3. Les raisonnements inductif et déductif

Entraîner les élèves à ces deux types de raisonnement – inductif et déductif – est un des objectifs des programmes de collège et lycée. Le raisonnement inductif a pour objectif essentiel de généraliser à d'autres objets une propriété connue sur certains objets et de construire des objets nouveaux. L'induction mathématique se différencie de l'induction dans les autres sciences, en particulier en sciences physiques, par sa validité intrinsèque. Citons H. Poincaré :

> L'induction, appliquée aux sciences physiques, est toujours incertaine, parce qu'elle repose sur la croyance à un ordre général de l'Univers, ordre qui est toujours en dehors de nous. L'induction mathématique, c'est-à-dire la démonstration par récurrence, s'impose au contraire nécessairement, parce qu'elle n'est que l'affirmation d'une propriété de l'esprit lui-même. (H. Poincaré, La science et l'hypothèse)

L'activité consistant à expérimenter et étudier des cas particuliers joue un rôle important, quasi nécessaire, dans l'apprentissage du raisonnement inductif, car il permet de justifier la formulation de conjectures – non posées au hasard, et l'étude de ces conjectures par des allers-retours entre l'expérimental et la mise en en place de leur preuve.

Le *raisonnement par récurrence* présente la caractéristique particulière d'être à la jonction de l'inductif et du déductif. Dans mon étude des conceptions d'étudiants et d'enseignants sur le récurrence (Grenier 2002 et 2003), il apparaît que le concept est largement absent, la récurrence étant réduite à une ou deux techniques non constructives dont la justification comme outils de preuve est parfois mise en doute. En conséquence, le champ des problèmes associé généralement par les enseignants à ce concept mathématique est extrêmement réduit. Des problèmes de différents types, permettant de construire une connaissance plus idoine de la récurrence ont été étudiés (Grenier 2012).

IV. CONCLUSION

En guise de conclusion, je vais réagir à une question souvent posée, celle du transfert, dans l'activité quotidienne de l'élève, des savoir-faire en jeu dans les SiRC. En fait, cette question se pose pour tous les apprentissages quels qu'ils soient, et à ma connaissance, il n'y a pas de réponse universelle connue. En revanche, nous sommes nombreux, enseignants et chercheurs, à convenir que nos élèves et étudiants ne savent pas « faire des mathématiques ». Ce qui montre que les « contenus standards » du second degré – et au-delà – sont inadéquats pour l'apprentissage des savoir faire qui constituent une vraie activité mathématique. Il est donc temps de proposer autre chose à nos élèves que la pratique de « techniques » ou de « méthodes » bien définies, pour résoudre des « types de problèmes » bien précis, qui ne leur permettent de résoudre que les problèmes ... qu'ils ont déjà rencontrés ! C'est l'organisation didactique globale qui doit être repensée, dans laquelle les situations de type SiRC rempliraient tout simplement les objectifs qui leur sont assignés, en accord avec les programmes actuels.

REFERENCES

Arsac G. Germain G., Mante M. (1991) *Problème ouvert et situation-problème.* Lyon :IREM.

Arsac G., Gréa J., Grenier D., Tiberghien A. (1995) (Eds) *Différents types de savoirs et leur articulation*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Cartier L. (2008a) A propos du théorème d'Euler et des parcours eulériens dans les graphes. *Petit x* 76, 27-53 :

Cartier L. (2008b) *Le graphe comme outil pour enseigner la preuve et la modélisation.* Thèse de l'Université Joseph Fourier. Grenoble.

Coulange L. (1998) Les problèmes « concrets à mettre en équation » dans l'enseignement. *Petit x* 47, 33-58.

Deloustal-Jorrand V. (2004) *Etude épistémologique et didactique de l'implication en mathématique*. Thèse de l'Université Joseph Fourier. Grenoble.

Giroud N. (2011) *Le rôle de la démarche expérimentale dans les SiRC*. Thèse de l'Université Joseph Fourier. Grenoble.

Godot K. (2005) *Situations de recherche et jeux mathématiques pour la formation et la vulgarisation*. Thèse de l'Université Joseph Fourier. Grenoble.

Grenier D. (2002) Different aspects of the concept of induction in school mathematics and discrete mathematics. In A*ctes du European Research in Mathematics Education,* Klagenfurt, august, 23-27.

Grenier D. (2003) The concept of « induction » in mathematics. *Mediterranean Journal For Research in Mathematics Education* 3.

Grenier D. (2008a) Expérimentation et preuve en mathématiques. In Viennot L (Ed.) *Didactique, épistémologie et histoire des sciences. Paris :* PUF.

Grenier D. (2008b) Des problèmes de recherche pour l'apprentissage de la modélisation et de la preuve en mathématique. In *Actes du colloque AMQ, Sherbrooke*, Québec, juin 2006.

Grenier D. (2009) Changer le rapport des élèves aux mathématiques en intégrant l'activité de recherche dans les classes. In *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques*, ed. IREM de Paris7.

Grenier D. (2012) Une étude didactique du concept de récurrence. *Petit x* 88, 27-47.

Grenier D. (à paraître) Some specific concepts and tools of Discrete Mathematics. In *Actes de l'International Congress on Mathematics Education ICME11*, Monterrey, juillet 2008.

Grenier D., Payan Ch. (1998) Spécificités de la preuve et de modélisation en Mathématiques Discrètes. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 18(1), 59-100.

Grenier D., Payan Ch. (2003) Situation de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Cahiers du séminaire national de l'ARDM*, Paris.

Grenier D., Payan Ch. (2007) Des « situations recherche » pour l'apprentissage des savoirs transversaux. In *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone* EMF, Sherbrooke, mai 2006.

Grenier D., Tanguay D. (2008) L'angle dièdre, notion incontournable dans les constructions pratique et théorique des polyèdres réguliers. *Petit x* 78, 26-52.

Nimier J. (1989) *Entretiens avec des mathématiciens.* Lyon : IREM.

Ouvrier-Buffet C. (2003) *Construction de définitions / construction de concept : vers une situation fondamentale pour la construction de définition en mathématiques*. Thèse de l'Université Joseph Fourier. Grenoble.

Ouvrier-Buffet C. (2010) Mathématiques discrètes : un champ d'expérimentation mais aussi un champ des mathématiques. In *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques :* IREM de Paris7.

Perrin D. (2007) L'expérimental en mathématiques. *Petit x* 73, 6-34.

Poincaré H. (1902) *La Science et l'Hypothèse.* Paris: Flamarion.

Tanguay D., Grenier D. (2010) Experimentation and Proof in a spatial Geometry Teaching Situation. *For the Learning of Mathematics*.30(3), 36-42.

Tanguay D., Grenier D. (2009) A classroom situation confronting experimentation and proof in solig geometry. In *Proceedings of ICMI Study19 Proof and Proving, in Mathematics Education*, vol.2, 232-238, ISBN 978-986-01-8210-1.