DEMARCHE D'INVESTIGATION EN THÉORIE DES NOMBRES : UN EXEMPLE AVEC LA CONJECTURE D'ERDÖS-STRAUS

Marie-Line GARDES*

Résumé – Après avoir définie la démarche d'investigation en mathématiques et plus précisément sa dimension expérimentale, nous montrerons en quoi la théorie des nombres offre un champ d'investigation intéressant pour l'enseignement. Nous exposerons ensuite une mise en œuvre d'une dimension expérimentale en classe sur une situation autour de la conjecture d'Erdös-Straus. Enfin, nous développerons deux spécificités de la dimension expérimentale en mathématiques : une articulation entre les objets sensibles et les objets mathématiques et une articulation entre l'apprentissage de compétences heuristiques et l'approfondissement de connaissances sur les objets mathématiques en jeu dans le problème.

Mots-clefs : théorie des nombres, dimension expérimentale, problème ouvert, fraction égyptienne, conjecture d'Erdös-Straus

Abstract – In this article, we define the investigation in mathematics and more precisely the experimental in mathematics. We show how number theory offers an interesting field of investigation for teaching. Then we explain an implementation of experimental investigation with the Erdös-Straus conjecture. Finally, we develop two features of the experimental dimension in mathematics: a link between sensible objects and mathematical objects and a close relationship between learning heuristics skills and learning new mathematical concepts.

Keywords: number theory, experimental, unsolved problem, Egyptian fraction, the Erdös-Straus conjecture

Depuis quelques années, le questionnement sur le rôle de la dimension expérimentale dans l'apprentissage des mathématiques fait l'objet de nombreuses études (Chevallard 2004 ; Dias 2005 ; Durand-Guerrier 2006 ; Perrin 2007). Plusieurs groupes de travail se sont également intéressés à ce thème[1]. Nous faisons partie d'une équipe lyonnaise[2], intitulée DREAM (Démarche de Recherche Expérimentale pour l'Apprentissage des Mathématiques – anciennement EXPRIME) qui pose explicitement la question de *la dimension expérimentale au cœur des problèmes de recherche en mathématiques*. En retravaillant sur des problèmes de recherche classiques, ou moins classiques, notre équipe se propose d'élaborer des ressources permettant aux enseignants de mettre en œuvre dans le cours ordinaire de la classe des problèmes de recherche en mettant en évidence deux points essentiels. Le premier vise à rendre disponibles les ressorts fournis par la dimension expérimentale de l'activité mathématique pour le développement de compétences heuristiques. Le deuxième point consiste à rendre visibles les connaissances mathématiques potentiellement travaillées en lien avec les programmes à différents niveaux d'enseignement. Une des hypothèses fortes de ce travail est que ces deux aspects sont étroitement imbriqués. Le groupe a élaboré, analysé et expérimenté sept situations[3] dont une concerne la décomposition de l'unité en somme de fractions égyptiennes. Dans cet article, nous nous appuierons sur une situation élaborée autour d'un problème connexe à celui-ci.

Dans notre travail, nous étudions les processus de recherche d'élèves, d'étudiants et de chercheurs confrontés à la résolution d'un même problème ouvert en théorie des nombres. Un

** S2HEP Université Lyon 1 – France – marie-line.gardes@univ-lyon1.fr

[1] ERTé Maths à modeler (Grenoble – www-leibniz.imag.fr/LAVALISE/debutval.php), ResCo (Résolution collaborative de problème – Montpellier – http://www.irem.univ-montp2.fr/Resolution-de-problemes), ERMEL (Ermel 2006).

[2] Equipe mixte IFE (Institut Français de d'Education)-IUFM et IREM de Lyon – S2HEP-Université Lyon 1.

[3] Ce travail a été publié dans un Cédéron (Aldon et al., 2010).

© Gardes M.-L. (2012) Démarche d'investigation en théorie des nombres : un exemple avec la conjecture d'Erdös-Straus. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT10, pp. 1342–1353). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

aspect de cette recherche que nous ne présenterons pas ici est de s'intéresser à ce que l'on pourrait apprendre du travail mathématique effectif des chercheurs pour travailler des mathématiques avec des élèves ou des étudiants dans le cadre de résolution de problème de recherche[4].

Dans cet article, nous soutenons la thèse selon laquelle la théorie des nombres offre un champ d'investigation mathématique pour des élèves et des étudiants. Nous l'illustrons par l'exemple d'une mise en œuvre d'une dimension expérimentale en classe. Nous développons également deux spécificités de la dimension expérimentale en mathématiques : une articulation entre les objets sensibles et les objets mathématiques, et une articulation entre l'apprentissage de compétences heuristiques et l'approfondissement de connaissances sur les objets mathématiques en jeu dans le problème.

I. SPECIFICITE DE LA DEMARCHE D'INVESTIGATION EN THEORIE DES NOMBRES

Depuis les années 2000, les recommandations pour l'enseignement des disciplines scientifiques préconisent de favoriser l'engagement des élèves dans une démarche d'investigation pour l'étude de notions figurant dans les programmes. Cette démarche d'investigation est présentée comme assez commune aux différentes pratiques scientifiques, notamment avec le but commun de contribuer à la formation d'une culture scientifique du citoyen. Toutefois, une différence se fait entre les sciences expérimentales (Sciences et Vie de la Terre, Physique, Chimie) et les mathématiques, tant sur le questionnement du réel que sur la composante expérimentale. En effet, si la définition du réel en sciences expérimentales est assez claire[5], on peut se demander comment définir le réel en mathématiques et quelle définition donner à la dimension expérimentale.

De nombreux travaux didactiques s'intéressent à l'expérimentation en mathématiques, notamment dans le cadre de la résolution de problèmes de recherche (Grenier et Payan (2002), Godot (2006), Giroud (2007), Dias (2009), Aldon et al. (2010)). Perrin (2007), quant à lui, définit l'expérimentation en mathématiques comme « une méthode d'investigation systématique » qu'il n'hésite pas à « désigner sous le nom de méthode expérimentale » pour résoudre des problèmes mathématiques. Cette méthode comprend plusieurs étapes à répéter éventuellement :

> Expérience, observation de l'expérience, formulation de conjectures, tentative de preuve, contre-expérience, production éventuelle de contre-exemples, formulation de nouvelles conjectures, nouvelles tentative de preuve, etc. (Perrin 2007, p. 10)

En d'autres termes, il définit l'expérimentation en mathématiques comme des allers-retours entre la théorie et l'expérience. Durand-Guerrier (2006) précise cette définition en donnant une caractérisation de la dimension expérimentale en mathématiques :

> C'est le va-et-vient entre un travail avec les objets que l'on essaye de définir et de délimiter et l'élaboration et/ou la mise à l'épreuve d'une théorie, le plus souvent locale, visant à rendre compte des propriétés de ces objets. (Durand-Guerrier 2006, p. 17)

Ainsi, dans notre travail, nous retenons la définition de Perrin (2007) pour qualifier la démarche d'investigation en mathématiques par les allers-retours entre théorie et expérience. Nous utilisons la définition de Durand-Guerrier (2007) pour en caractériser la composante expérimentale par un travail sur l'articulation entre les objets sensibles (réels) et les objets mathématiques. Enfin nous prenons en compte l'hypothèse de DREAM pour ajouter une

---

[4] Cet aspect de la recherche est développé dans Gardes et Mizony (2011).

[5] Nous entendons réel au sens de réalité sensible, celle perçu par nos sens ou par un instrument construit.

seconde spécificité à la dimension expérimentale en mathématiques, à savoir, l'articulation entre un apprentissage de compétences heuristiques et un approfondissement de connaissances notionnelles.

Afin de définir la réalité en mathématiques au sein de cette dimension expérimentale, Durand-Guerrier (2006) précise que pour favoriser le recours à l'expérience,

> [l]e milieu de l'élève doit comporter des objets matériels (sensibles) ou des objets mathématiques suffisamment familiers [pour lui] pour que celui-ci puisse s'engager dans l'action, en dégager des conjectures et les questionner. (Durand-Guerrier 2006, p. 17)

Le questionnement du réel s'opérera si le milieu favorise la mobilisation d'outils (tels que l'élaboration de conjecture, le questionnement des exemples, contre-exemples…) permettant de mettre en œuvre un traitement mathématique général dont les résultats pourront être confrontés aux résultats des actions sur ces objets. Voici un exemple d'un questionnement du réel en mathématiques grâce à l'utilisation d'objets sensibles. Il est emprunté à Dias et Durand-Guerrier (2005), qui ont étudié et construit une situation sur les polyèdres réguliers mettant en œuvre une dimension expérimentale. Le problème se situe en géométrie plane :

> La géométrie des solides nous est vite apparue comme un lieu possible de confrontation entre les contraintes s'imposant aux *objets sensibles* du monde réel et les résultats théoriques concernant les *objets mathématiques* de la géométrie euclidienne. (Dias et Durand-Guerrier 2005, p. 63)

Ils définissent alors les polyèdres réguliers de deux manières :

> Comme des objets mathématiques construits dans une théorie : la Géométrie Euclidienne ; mais aussi comme objets sensibles, connus sous le nom de Solides de Platon, que l'on peut construire effectivement avec différents matériaux. (Ibid., p. 64)

Lors de l'expérimentation de leur situation en classe, les élèves doivent déterminer tous les polyèdres réguliers en disposant de polygones en plastique. Ces derniers jouent le rôle des objets sensibles. Les auteurs ont alors montré que le processus de preuves que la géométrie met en œuvre se « frotte » irrémédiablement au réel. Grenier et Tanguay (2008), qui ont expérimenté ce problème avec des étudiants avancés montrent également ce phénomène. Ainsi la dimension expérimentale est caractérisée ici par une articulation entre les propriétés des objets mathématiques (les polyèdres réguliers) et l'expérimentation avec des objets sensibles (les polyèdres réalisés avec les polygones en plastique ou tout autre matériel).

Le réel mathématique ne se limite pas à la présence d'objets sensibles. En s'appuyant sur les travaux de Tarski (1960), Durand-Guerrier (2006) définit un domaine de réalité :

> Il ne s'agit plus d'objets sensibles, mais d'objets, de propriétés et de techniques, naturalisés, c'est-à-dire suffisamment familiers pour que les résultats des actions soient considérés comme fiables. Ils permettent donc de valider les hypothèses ou les prévisions. (Durand-Guerrier 2006, p .20)

Dans notre travail en théorie des nombres, nous utilisons cette définition du réel en mathématiques. En effet, le domaine des entiers avec ses méthodes élémentaires de calcul peut jouer le rôle de domaine de réalité ceci parce qu'à priori, les calculs sont non problématiques pour les élève concernés. Nous étudions effectivement les recherches d'élèves de terminale scientifique[6] et d'étudiants en classes préparatoires[7] donc, à ces niveaux, les nombres entiers, les fractions et les propriétés élémentaires du calcul sur les entiers ou du calcul fractionnaire sont *a priori* naturalisés.

Nous faisons alors l'hypothèse qu'un domaine mathématique naturalisé jouant le rôle du domaine de réalité et contenant des questions ouvertes offre, pour les élèves et les étudiants, un champ d'investigation mathématique très riche. Ainsi la théorie des nombres est un bon

[6]Elèves âgés de 17-18 ans.
[7]Etudiants âgés de 18 à 20 ans.

candidat pour l'investigation mathématique, d'une part parce que les entiers peuvent être un domaine de réalité et d'autre part parce qu'il existe de nombreuses questions ouvertes accessibles aux élèves[8].

II. UN EXEMPLE DE DEMARCHE D'INVESTIGATION AVEC LA CONJECTURE D'ERDÖS-STRAUS

Dans la première partie, nous avons présenté succinctement un exemple de mise en œuvre d'une dimension expérimentale avec présence d'objets sensibles. Dans cette seconde partie, nous allons exposer une mise en œuvre d'une dimension expérimentale s'appuyant sur un domaine de réalité, celui des entiers. Nous montrerons alors que la dimension expérimentale permet aux élèves de travailler conjointement compétences heuristiques, notions et concepts mathématiques.

Le problème que nous avons choisi afin de mettre en œuvre une dimension expérimentale chez les élèves et les étudiants est une conjecture d'Erdös et Straus. S'intéressant à la décomposition d'une fraction en une somme de fractions unitaires, les auteurs formulent la conjecture suivante :

> Pour tout entier naturel n ≥ 2, on peut trouver des entiers non nuls x, y, z (non nécessairement distincts) tels que $\frac{4}{n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. (Erdös 1950)

C'est un problème ouvert au sens non résolu par les mathématiciens[9]. Choisir un problème en état de conjecture a été motivé par le projet de comparer les processus de recherche d'élèves, d'étudiants et de chercheurs sur un même problème[10]. L'énoncé posé aux élèves est le suivant : pour tout n entier naturel, peut-on trouver trois entiers naturels a, b et c tels que $4/n = 1/a + 1/b + 1/c$? La situation a été expérimentée de nombreuses fois et dans différents contextes. Dans cette présentation, nous nous appuierons sur des expérimentations faites en terminale scientifique[11].

1. Mise en œuvre d'une démarche d'investigation dans la recherche des élèves

En s'appuyant sur un résultat trouvé par les élèves, nous allons montrer qu'une démarche d'investigation sur un problème de recherche se manifeste par des allers-retours entre la théorie et l'expérience. Le résultat sur lequel nous nous appuyons est le suivant : si n est pair alors l'équation $4/n = 1/a + 1/b + 1/c$ a des solutions.

Dans l'analyse *a priori*, nous avons répertorié les procédures en deux catégories : celles qui s'appuient sur la recherche ou l'exploitation d'exemples (procédures 1 et 2) et celles utilisant des outils algébriques (procédures 3 et 4).

<u>Procédure 1</u> : à partir d'exemples (n = 2, 4, 6, …), remarquer que $a = n/2$, $b = n$ et $c = n$ ou $a = n/2$, $b = n/2 + 1$ et $c = ab$. Ces conjectures peuvent être difficiles à formuler si les exemples relèvent des deux identités différentes (par exemple $4/2 = 1 + 1/2 + 1/2$ et $4/4 = 1/2 + 1/3 + 1/6$). Une seconde difficulté peut être relevée : repérer que $n/2$ est un entier si n est pair.

[8]Voici quelques exemples de problèmes ouverts en théorie des nombres accessibles à des élèves et proposés par Math en Jeans (http://mathenjeans.free.fr) : conjecture des nombres premiers jumeaux, conjecture de Syracuse, problème des nombres congruents.

[9]A distinguer des problèmes ouverts au sens de Lyon 1 (Arsac et Mante 2007).

[10]Cette étude fait l'objet de notre thèse. Les premiers résultats sont analysés dans Gardes et Mizony (2011).

[11]Ces expérimentations sont détaillées et analysées dans Gardes (2009) et Gardes (2010).

Procédure 2 : la conjecture est vraie pour $n = 2$ et/ou $n = 4$. Or si on multiplie n par k, les solutions sont aussi multipliées par k. Donc la propriété est vraie pour les nombres pairs. Cette propriété de multiplicité entre n et les solutions peut être difficile à établir pour les élèves.

Procédure 3 : décomposer $4/n = 2/n + 2/n = 1/n + 1/n + 2/n$ puis $2/n = 1/n/2$ ou décomposer $4/n = 2/n + 2/n$ puis $2/n = 1/n/2$ et utiliser l'égalité $1/n = 1/(n+1) + 1/n(n+1)$ d'où $\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{n}{2}} + \frac{1}{\frac{n}{2}+1} + \frac{1}{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}+1)}$. L'écriture de $2/n = 1/n/2$ peut être une difficulté pour les élèves ainsi que la propriété « $n/2$ est un entier si n est pair ». La décomposition de $1/n = 1/(n+1) + 1/n(n+1)$ n'est pas nécessairement connue des élèves, elle serait donc à (re)trouver.

Procédure 4 : chercher une relation de récurrence entre $4/n$ et $4/(n+2)$. La difficulté majeure de cette procédure est de conjecturer cette relation de récurrence qui « saute » un rang, le rang $n+1$.

Les deux groupes dont nous présentons ci-dessous la recherche, se sont engagés dans les procédures 1 et 4. D'autres groupes ont utilisé la procédure 3 mais aucun n'a utilisé la procédure 2.

Recherche du groupe 1 : Après avoir longtemps cherché le problème en utilisant des outils algébriques, les élèves effectuent une rupture dans leur recherche pour se centrer sur le caractère expérimental du problème « faire des essais sur n ».

- Première expérience : décompositions pour $n = 3$ et $n = 6$.

$$\frac{4}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \qquad \frac{4}{6} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}$$

- Première conjecture :

  E : Ben ça doit être facile, ça fait 2, 2, 3 ; 4, 4, 6.

  Al : Bah oui, c'est multiplié par 2. 4, 4, 6 c'est multiplié par 2. Si n est multiplié par 2, les solutions aussi.

- Contre-exemple : pour $n = 12$, ils ont $\frac{4}{12} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}$ ce qui est différent de $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12}$, solution obtenue avec cette conjecture. Ils vérifient alors que (8, 8, 12) peut être une solution pour $n = 12$.
- Retour à l'expérience : essais pour $n = 16$ puis pour $n = 18$ à l'aide de la conjecture.
- Seconde conjecture : pour les nombres pairs, ils obtiennent cette égalité[12] : $\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{n}{2}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$.
- Preuve : la première idée est de faire un raisonnement par récurrence puis ils utilisent l'égalité ci-dessus et la nature des nombres en jeu.

  J : Comme n est pair, on peut l'écrire $2n'$. En remplaçant dans l'égalité, on obtient alors $\frac{4}{n} = \frac{1}{n'} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n}$.

Recherche du groupe 2 : Cette phase de recherche arrive très tôt pour ces élèves, au bout de 30 minutes. Elle est dans la continuité de leur travail collectif, centré sur la recherche d'exemples pour un n particulier.

[12] On peut remarquer que cette formule ne découle pas directement des exemples cités. Grâce à leurs échanges, on comprend qu'ils s'appuient sur ces exemples pour formuler la conjecture mais il est difficile de comprendre comment elle a émergée.

- Première expérience : décomposition pour $n = 4$. $\frac{4}{4} = 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$
- Première conjecture :

F : il y a peut être moyen de faire quelque chose puisque 1/6 c'est 1/2 fois 1/3, c'est peut être un hasard mais…

- Contre-exemple : pour $n = 7$, ce lien n'existe pas puisqu'ils ont $\frac{4}{7} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{14}$.
- Retour à l'expérience : un élève cherche une méthode de décomposition d'une fraction en fractions unitaires sur $4/5$. Il effectue $4/5 - 1/10$ (car $2 \times 5 = 10$). Il obtient $7/10$. Il essaie alors d'enlever $1/3$, il obtient $11/30$ qui ne lui convient pas donc il essaie $1/4$ puis $1/5$. Il trouve finalement la décomposition de $\frac{4}{5} = \frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{2}$.
- Seconde conjecture :

F : Donc ce qu'il y a de con c'est que pour 5, ça fait $1/10 + 1/5 + 1/2$, à chaque fois il y a un truc des multiplications. $2 \times 3 = 6, 2 \times 5 = 10$, j'en sais rien moi mais…non c'est vrai, regarde…

- Retour à l'expérience : recherche d'une nouvelle décomposition. Essai de décomposer $4/6$. Il enlève d'abord $1/3$. Comme il obtient $1/3$ il commence par dire que $\frac{4}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ puis tout de suite il se reprend et modifie par $\frac{4}{6} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$.
- Troisième conjecture :

F : Ça fait 1/3, 1/4, 1/12. C'est pas un petit peu bizarre ça pour vous ? Non ?

- Quatrième conjecture :

F : Pour les nombres pairs ça marche

- Retour à l'expérience : essai de cette conjecture sur $n = 8$ et $n = 20$.
- Preuve : la première idée est de faire un raisonnement par récurrence puis ils utilisent une égalité $\frac{4}{n} = \frac{1}{\frac{n}{2}} + \frac{1}{\frac{n}{2}+1} + \frac{1}{\frac{n}{2}(\frac{n}{2}+1)}$ établie à partir de leurs expériences avec diverses valeurs de n où ils ont remarqué que $a = n/2$, $b = a + 1$ et $c = a \times b$. Leur raisonnement est alors basé sur la nature des nombres en jeu :

L : a est un entier naturel car *n* est pair, *b* est un entier naturel car la somme de deux entiers naturels est un entier naturel et *c* est un entier naturel car le produit de deux entiers naturels est un entier naturel.

Nous pouvons donc remarquer que le caractère expérimental des deux recherches correspond tout à fait à caractérisation donnée par Perrin (2007), avec des allers-retours entre les expériences, la formulation de conjectures et les tentatives de preuves. En effet, les élèves procèdent à une expérience (essais sur des valeurs de *n*), observent les résultats de cette expérience afin de formuler des conjectures (si *n* est multiplié par 2 alors les solutions aussi, la première fraction multipliée par la seconde donne la troisième) puis ils retournent à l'expérience (essais sur de nouvelles valeurs de *n*) afin de formuler une nouvelle conjecture (si *n* est pair alors l'équation a des solutions). L'étape de tentative de preuve vient ensuite, soit dans la continuité de leurs recherches (groupe 1), soit plus tard (groupe 2). Leurs preuves sont basées sur l'étude de l'égalité obtenue grâce à leurs expériences sur des valeurs de *n*. La démarche d'investigation est donc identique pour les deux groupes.

Dans les deux paragraphes suivants, nous effectuons des « zooms » sur les processus de recherche des élèves afin de mettre en évidence deux spécificités de la dimension expérimentale en mathématiques. Dans un premier temps, nous montrerons comment un travail d'articulation entre les objets naturalisés (les entiers, les fractions…) et les objets mathématiques s'opère dans la recherche des élèves. Dans un second temps, nous développerons l'hypothèse issue de notre groupe de travail DREAM : la dimension expérimentale permet de travailler conjointement compétences heuristiques, notions et concepts mathématiques.

2. Importance du retour à l'expérience

Définie dans la première partie, une caractéristique de la dimension expérimentale en mathématiques est de permettre aux élèves de s'engager dans l'action, de formuler des conjectures et de les questionner. Ceci est lié à la constitution du milieu qui doit contenir des objets suffisamment familiers pour rendre possibles des rétroactions.

En appui sur quelques extraits de la recherche des élèves du groupe 2 sur la conjecture d'Erdös-Straus, nous allons montrer l'importance de cette confrontation au réel lors des différentes phases d'une recherche. Le premier extrait montre qu'une déconnexion entre la manipulation d'objets et la conduite d'un raisonnement peut déboucher sur un engagement difficile des élèves dans la recherche du problème et la production de résultats.

Al : On va chercher pour supérieur à 1. Après, j'ai fait deux trois trucs euh, j'ai fait, euh, avec 2, tu vois j'ai essayé c'est faisable après
E : Avec 2 ?.
Al : Ben…
E : Ça te fait 2, 1/2 ouais ouais.
Al : Mais euh, après ça doit être possible mais je ne vois pas trop comment le prouver.
E : Ouais après euh, ouais mais après il faut le prouver dans le cas général, tu ne vas pas le faire pour chaque…
Al : Oui ben oui, c'est pour ça, non mais pour voir déjà si ça marchait à partir de 2.

Ils abandonnent rapidement cette piste de recherche pour centrer leur recherche sur l'exploitation de raisonnements ou de connaissances institutionnalisées dans leur cours d'arithmétique, comme en témoigne l'extrait suivant :

Al : Ça faisait joli hein, ça faisait bien de le dire là hein[13]. Parce qu'on est arrivé, vous étiez arrivé à quoi là, à la fin' Moi j'étais arrivé à $4abc = n(bc + ac + ab)$.
E : Non moi j'avais isolé n, moi
Al : Hein ?
E : J'ai isolé n, j'avais isolé n tout seul.
[…]
E : Ah mais c'est ça que vous vouliez faire avec Bézout là ?
Al : Oui, voilà. Mais euh ça fait trop de cas puis c'est pas, je ne vois pas.
E : Pourquoi ça ferait trop de cas ?
Al : Ben parce que avec n ça te fait le cas où c'est divisible par 4 ou le cas où ce n'est pas divisible par 4 mais pour prouver que, que, que quand n n'est pas divisible par 4, pour prouver $bc + ac + ab$ est divisible par 4 je ne vois pas trop.
E : Non non mais de toutes façons, si, c'est $4abc$, t'as forcément soit n divisible par 4 soit ça divisible par 4.
[…]
Al : S'il y en a deux d'impairs ou les trois d'impairs ça ne marche pas, ce n'est pas divisible par 4 mais après ça fait vachement de cas, c'est ça le…
E C'est peut être ça, parce que à mon avis si tu as une heure et demi c'est pas non plus que c'est en 5 min.
Al Ouais mais là, on part, on part vachement loin là, pas sûr de revenir (rires).
Al Je ne sais pas, on peut partir sur ça pour commencer.
E Pour ouais sur les, ouais.

Les élèves essaient de transformer l'écriture de l'équation initiale en isolant n ou en réduisant au même dénominateur. Ils pensent alors au théorème de Gauss (qu'ils confondent avec le théorème de Bézout) et établissent une conjecture : soit 4 divise n, soit 4 divise $bc + ac + ab$. Dans ce dernier cas, ils étudient la parité de a, b et c afin que 4 $bc + ac + ab$ mais cette piste

[13]Cet élève fait référence au théorème de Bézout, cité par un autre élève du groupe quelques minutes avant.

finit par être abandonnée en raison du nombre élevé de cas à étudier. Ce groupe restera longtemps sur une recherche axée sur l'exploitation de raisonnements ou de connaissances institutionnalisées dans leur cours d'arithmétique mais elle n'aboutira à aucune production en termes de résultats.

Ces deux extraits de recherche montrent que lorsque les élèves n'exploitent pas le caractère expérimental du problème (faire des essais sur n) ou qu'ils se placent dans un domaine qu'ils ne maitrisent pas suffisamment (algèbre et arithmétique), ils n'arrivent pas à s'appuyer sur leurs connaissances pour établir un résultat. Ils ne parviennent pas non plus à déterminer si leur piste de recherche est à poursuivre. Ils vont alors discuter sur le caractère ouvert du problème et la durée de la recherche pour essayer de prendre une décision concernant la piste de recherche à suivre. En revanche, lorsqu'ils quittent le champ de l'algèbre et de l'arithmétique et se concentrent sur des expériences sur les nombres entiers et les fractions, ils réussissent à produire un résultat, comme l'illustre l'extrait ci-dessous :

Al : Non c'est pas ça mais euh…moi c'est dès le début, c'est que, regardez, si on prend $n = 1$.
E/Ar Hum.
Al : Il n'y a pas de solutions.
E : T'es sûr ?
Al : Ouais.
E : Parce que moi j'ai…
Al : Parce que si tu prends $n = 1$ ça veut dire 4.
E : Ouais.
Al : Donc en fait le plus grand, les plus grands entiers naturels pour que ça fasse…c'est 1, 1 et 1.
Ar : Hum.
Al : Donc ça fait $4 = 3$ donc déjà avec 1 c'est pas possible.
Ar : Hum.
E : Mais non, si, parce que ça se trouve, tu peux mettre 1, 1.
Ar : Non c'est obligé.
E : De quoi ?
Ar : C'est obligé ce qu'il dit ouais fin.
Al : Parce que 1 sur, 1 sur un nombre entier c'est obligé que ça soit, que ça soit plus petit que 1.

Les élèves, en s'appuyant sur des connaissances naturalisées (nombres naturels, fraction, opération de comparaison, extremum) établissent une nouvelle propriété sur les nombres entiers et les fractions : 4 ne peut pas être égal à une somme de trois fractions unitaires.

Ainsi, la création de nouveaux objets ou de nouvelles connaissances semble être possible, d'une part lorsque les expériences sont construites sur des connaissances naturalisées afin de permettre au sujet d'agir et d'autre part lorsque les manipulations d'objets entrent en résonnance avec les théories mathématiques sous-jacentes.

3. Travail conjoint des compétences heuristiques et de notions et concepts mathématiques

Les exemples qui suivent mettent en évidence une seconde potentialité de la dimension expérimentale en mathématiques, à savoir qu'elle permet de faire fonctionner des notions et participe à une naturalisation des objets manipulés qui entrainent un élargissement du champ d'expériences et permet alors des élaborations théoriques et la construction de connaissances nouvelles. Il existe alors une réelle imbrication entre travail sur les compétences heuristiques et travail sur les notions et concepts mathématiques. Pour illustrer cela, nous reprendrons l'exemple des démonstrations des deux groupes sur le résultat suivant : l'équation a des solutions pour n pair.

Nous avons déjà montré[14] que ce résultat s'est construit sur des allers-retours entre théorie et expérience. Dans ce paragraphe, nous voulons mettre en évidence le rôle prépondérant joué par l'exploitation des exemples dans la formulation des conjectures. En effet, en analysant plus finement les échanges entre les élèves, il apparaît précisément que l'exploitation des exemples a permis aux deux groupes d'établir leur conjecture. Cependant l'utilisation des exemples diffère selon les groupes. En effet, le groupe 1 obtient sa conjecture en observant deux décompositions particulières sans expliquer au sein du groupe comment ces décompositions sont trouvées, tandis que le groupe 2 formule sa conjecture en essayant de déterminer un moyen de décomposer une fraction pour un n particulier. Nous faisons ainsi l'hypothèse que les élèves du groupe 1 utilisent l'exemple comme un produit fini alors que les élèves du groupe 2 cherchent à construire l'exemple. Nous pouvons également constater que ces exploitations différentes des exemples les conduisent à formuler des conjectures différentes. Les rôles du contre-exemple et de la non-unicité des décompositions peuvent également être mis en avant dans les deux groupes. Dans le groupe 1, la prise de conscience en acte de la non-unicité des décompositions par un élève leur permet de distinguer un contre-exemple à leur conjecture sur la forme de la décomposition et l'existence d'une décomposition d'une autre forme. En effet lorsqu'un contre-exemple pour la conjecture établie semblait être identifié, les élèves ne rejettent pas la conjecture mais cherchent une nouvelle décomposition de la fraction. Le groupe 2 semble au contraire, ne pas avoir une claire conscience, à ce moment précis de leur recherche, de la non-unicité des décompositions. En effet l'apparition d'une décomposition ne satisfaisant pas le lien qu'ils ont identifié, les conduit à abandonner leur piste.

Nous pouvons donc remarquer que, en s'appuyant sur des connaissances naturalisées (nombres entiers, fractions…), les élèves ont développé des compétences heuristiques, notamment le questionnement des exemples et la formulation de conjectures pour établir un résultat intermédiaire sur la conjecture. En outre, nous pouvons relever la richesse du problème qui permet aux élèves, avec peu de connaissances au préalable, de s'engager dans une démarche d'investigation qui conduit, selon l'exploitation des exemples à différentes conjectures et résultats.

Les démonstrations de leurs résultats (extraits ci-dessous) révèlent également ce va-et-vient entre travail sur les compétences heuristiques et sur les connaissances notionnelles. En effet, pour valider leur conjecture, les élèves vont s'appuyer sur la nature des nombres en jeu et en élaborant une preuve, ils vont approfondir leurs connaissances des entiers.

<u>Extrait[15] de la recherche du groupe 1</u>

J : Alors si n est pair, donc t'as $1/n$, $1/n$ ok et là si n est pair c'est $2n'$ donc c'est $1/n'$ et t'as $1/n'$, $1/n$ et $1/n$…

E : Attends tu la refais là vite fait parce que…

Al : Ouais ouais.

E : $2/n$, c'est $2/n'$?

J : Non $2/n$ c'est 1 sur, $2/n$, si n est pair, c'est $1/2n'$.

Al : Ouais ouais, ben oui oui, en disant que c'est pair…

[…]

Al : Ben si tu as celui là égal à ça donc tu divises celui par 2.

J : avec 2 puis tu termines avec le 3e, peut être que ça devrait marche.

Ar : Je divise celui par 2, ça fait, ouais.

Al : Et ben si n est pair, ça, et ben a, b, et c sont bien des nombres entiers donc ça marche.

J : (il est en train de faire la production commune) Pair, deux points, $4/n$ égal $2/n$ plus $1/n$ plus $1/n$.

Al : Alors que si c'est impair, ça ne marche pas ce raisonnement.

---

[14]Voir le paragraphe 1 Mise en œuvre d'une démarche d'investigation dans la recherche des élèves pp.4-6.

[15]Les transcriptions complètes sont en annexe de notre mémoire (Gardes 2009).

Ar : Hum d'accord.
Al : Donc ça marche si c'est pair.
E : Ça y est nous aussi on a trouvé, du coup.
[…]
J : (il est en train de faire la production commune) Si *n* est congru à 0 modulo 2 alors $2/n = 2/2n'$avec *n*'.

L'élève J explique aux autres élèves que l'égalité démontre leur conjecture pour n pair. Il commence par dire que, comme n est pair, on peut l'écrire 2*n*'. En remplaçant dans leur égalité[16], il obtient alors $4/n = 1/n' + 1/n + 1/n$. Comme il n'a pas convaincu tout le monde ou qu'il est allé trop vite, il insiste sur l'égalité : $2/n = 1/n'$. A l'oral, il ne précise pas que *n*' est un entier naturel alors que dans la production écrite, il le mentionne. Cependant, il ne note pas que si n est pair alors n s'écrit 2*n*'. Dans leurs discussions, c'est un autre élève, Al qui précise que a, b et c, dans ces conditions, à savoir n pair, sont des entiers naturels, ce qui ne serait pas le cas si n était impair. Or cela n'apparaît pas non plus dans leur production finale. En revanche, ils ont noté n pair sous la forme d'une congruence $n \equiv 0[2]$ dont ils ne se servent pas ensuite. Nous pouvons penser que des liens entre les traductions opératoires du caractère pair d'un nombre ($n \equiv 0[2]$ et il existe k entier tel que $n = 2k$) sont établis par les élèves puisqu'ils utilisent les trois formes. Cependant il n'est pas certain que les élèves aient une claire conscience des équivalences entre ces trois écritures dans la mesure où elles ne sont pas formalisées et écrites par les élèves.

Extrait[17] de la recherche du groupe 2

L : *n* il appartient à N, *n* il appartient aux naturels, ça un naturel divisé par un naturel, ça reste un naturel.
F : Ben non.
L : Ben euh…
F : 4/7.
L : Effectivement, mais si *n* il appartient, il appartient…
F : (rires) mais t'es vraiment trop con.
L : Mais ce n'est pas ce que je voulais dire en fait, c'est pour ça…
L : *n* c'est un multiple de 2, dans ce qu'on a dit.
F : L vient d'inventer un monde où il n'y a pas de fractions, ouh…
L : Dans ce qu'on a dit, c'est *n* est un multiple de 2 t'es d'accord ?
F : Quoi ?
L : Dans ce qu'on vient de démontrer, de dire, *n* est un multiple de 2.
F : Qui nous le dit ?
L : Bah, la conjecture.
L : Ben ça ça marche pour les multiples de 2 t'es d'accord ?
F : Mais oui.
L : Donc là, *a* c'est égal à *n*/2 donc *a* c'est un naturel, forcément.
F : Et pourquoi ?
L : Parce que *n* est divisible par 2.
F : Oui et donc.
L : *b* c'est $n/2 + 1$ donc ça marche aussi.
F : Ouais.
L : Et *c* c'est $a \times b$.
F : Et alors…
L : Quand tu multiplies deux naturels, c'est forcément un naturel.
F : Et ouais.
L : Il n'y a pas besoin de faire par récurrence.

Leur raisonnement repose sur la stabilité des entiers par différentes opérations. Il est intéressant de remarquer qu'aucun élève n'évoque le fait que si n est pair alors n s'écrit $2k$, k

[16]Leur égalité est $4/n = 1/n + 1/n + 1/n/2$.
[17]Les transcriptions complètes sont en annexe de notre mémoire (Gardes 2009).

entier. Lorsque F demande à L pourquoi $a = n/2$ est forcement un naturel, L répond « parce que n est divisible par 2 » et F comprend tout de suite. Nous pouvons donc penser que c'est un automatisme mais que la connaissance n est pair équivaut à $n = 2k$, k entier n'est peut être pas acquise pour ces élèves.

Nous pouvons remarquer que les deux démonstrations ont été très riches en questionnement pour les élèves. En effet, après avoir discuté sur la faisabilité d'un raisonnement par récurrence, les élèves ont établi une preuve en mobilisant leurs connaissances des entiers. L'élaboration des raisonnements, différents mais basés sur la même propriété – si n est pair alors $n/2$ est un entier naturel – a permis aux élèves de se poser des questions sur certaines propriétés des entiers. Ainsi, nous pouvons supposer que cette recherche de preuve leur a permis d'approfondir leurs connaissances des entiers et notamment de travailler de nombreuses propriétés de ces objets. En outre, ce nouveau résultat démontré a ouvert aux élèves un nouveau champ d'expérience qui leur a permis de formuler une nouvelle conjecture : si n est un multiple de 3 alors l'équation a des solutions.

III. CONCLUSION

A travers la situation que nous avons construite autour de la conjecture d'Erdös-Straus, nous avons pu mettre en évidence les potentialités de l'arithmétique pour construire des problèmes de recherche pour des élèves ou des étudiants. Les énoncés simples, les connaissances pré-requises peu nombreuses et naturalisées des élèves leur permettent en effet de s'engager dans l'action et de débuter une recherche effective sur le problème. En étudiant leur processus de recherche, nous avons pu illustrer la thèse selon laquelle la démarche d'investigation en mathématiques pouvait se définir par des allers-retours entre la théorie et l'expérience. Nous avons également mis en évidence que ce type de problème de recherche permet de travailler conjointement des compétences heuristiques et des notions et concepts des programmes d'enseignement des mathématiques. En particulier, bien que non développé ici, ce problème est riche pour travailler l'exploitation de nombreux raisonnements, l'algorithmique ou les questions de logique, notions introduites explicitement depuis 2009 dans les programmes français de mathématiques au lycée.

REFERENCES

Aldon G., Cahuet P.-Y., Durand-Guerrier V., Front M., Krieger D., Mizony M., Tardy C. (2010) *Expérimenter des problèmes de recherche innovants en mathématiques à l'école*. Cédérom INRP.

Arsac G., Mante M. (2007) *Les pratiques du problème ouvert*. IREM de Lyon, SCEREN-CRDP Académie de Lyon.

Chevallard Y. (2004) Pour une nouvelle épistémologie scolaire. *Les cahiers Pédagogiques* 427, 34-36.

Dias T. (2005) La dimension expérimentale en mathématiques : mythe ou réalité ? In *Actes des 4èmes rencontres de l'ARDIST*, Lyon, octobre 2005.

Dias T. (2009) La dimension expérimentale en mathématiques. Un exemple avec la situation des polyèdres. *Grand N* 83, 63-83.

Dias T., Durand-Guerrier V. (2005) Expérimenter pour apprendre en mathématiques. *Repères IREM* 60, 61-78.

Durand-Guerrier V. (2006) La résolution de problèmes, d'un point de vue didactique et épistémologique. In Trouche L., Durand-Guerrier V., Margolinas C. et Mercier A. (Eds.) (pp. 17-23) *Actes des journées mathématiques de l'INRP*. Lyon : INRP.

Erdös P. (1950) On a diophantine equation. (Hungarian. Russian, English summaries). *Mat. Lapok* 1, 192-210.

Ermel (2006) *Apprentissages géométriques et résolution de problèmes au cycle 3*. Paris : Hatier.

Gardes M.-L. (2009) *Étude du processus de recherche d'élèves de terminale scientifique confrontés à la résolution d'un problème en cours en arithmétique*. Mémoire de Master 2 HPDS, Université Lyon 1.

Gardes M.-L. (2010) Investigations arithmétiques en terminale : entre essais et conjectures. *Petit x* 83, 51-78.

Gardes M.-L., Mizony M. (2012) La conjecture d'Erdös-Straus : expérimentation en classe et travail du chercheur. *Repères IREM*.

Giroud N. (2007) Experimental and mathematical control in mathematics. In *Proceedings of CERME 6, January 28th-February 1st 2009*. Lyon, France.

Godot K. (2006) La roue aux couleurs : une situation de recherche au cycle 3. *Grand N* 78, 31-52.

Grenier D., Payan C. (2003) Situation de recherche en classe : essai de caractérisation et proposition de modélisation. In *Actes du Séminaire National de didactique des mathématiques 2002* (pp. 189-203). Paris : IREM de Paris 7 et ARDM.

Grenier D., Tanguay D. (2008) L'angle dièdre, notion incontournable dans les constructions pratique et théorique des polyèdres réguliers. *Petit x* 78, 26-52.

Perrin D. (2007) L'expérimentation en mathématiques. *Petit x* 73, 634.

Tarski A. (1960) *Introduction à la logique*. Paris :Louvain.