ARTICULATION DES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES ET DIDACTIQUES POUR L'ENSEIGNEMENT PRATIQUES ET FORMATION

Compte-rendu du Groupe de Travail n°1 – EMF2012

Stéphane CLIVAZ* – Jérôme PROULX**
Mamadou S. SANGARÉ*** – Alain KUZNIAK****

I. INTRODUCTION

Le thème du groupe de travail n°1, l'articulation des connaissances mathématiques et didactiques pour l'enseignement, était en continuité avec les différents groupes de travail sur la formation des enseignants des colloques précédents, en particulier celui d'EMF2009 à Dakar sur les questions de formation *mathématique* des enseignants. Toutefois l'accent mis sur l'articulation des connaissances mathématiques et didactiques pour l'enseignement en fait un thème nouveau jamais vraiment explicitement abordé sous cet intitulé en groupe de travail dans le cadre de EMF.

Un total de dix heures a été consacré au groupe de travail à travers six séances. Vingt et un participants (des chercheurs, des formateurs, des enseignants) ont participé à ces séances, venant de trois continents et de pays aussi différents que le Brésil et Andorre ! Huit présentations ont été données à l'intérieur de ces dix heures de séances de travail, organisées autour de quatre thèmes spécifiques :

Sous-thème 1. Études empiriques sur les connaissances mathématiques des enseignants [présentations de S. Clivaz, Suisse, et A. Fluckiger et al., Suisse]

Sous-thème 2. Exemples de cours en formation des maîtres sur les connaissances mathématiques des enseignants [présentations de M. Deruaz et S. Clivaz, Suisse, et V. Passaro, Canada]

Sous-thème 3. Articulation entre mathématiques et didactique en formation des enseignants [présentations de M.-P. Morin et al., Canada, et M. Sangaré, Mali]

Sous-thème 4. Savoirs de formation [présentations de N. Sayac, France, et J. Proulx, Canada]

Ces présentations ont été utilisées comme tremplin pour les discussions entre les participants du groupe de travail et ce rapport de synthèse tente de souligner certaines de ces discussions et idées partagées.

II. L'APPEL DU TEXTE INITIAL ET SA CONSTRUCTION

Ce groupe de travail a été, dès le début, pensé et initié en continuité avec le GT1 de EMF2009 qui avait pour titre « Formation mathématique des enseignants: contenus et pratiques ». Et de ce fait, l'aspect « connaissances mathématiques des enseignants » a été central dans

* Haute Ecole Pédagogique du canton de Vaud – Suisse – stephane.clivaz@hepl.ch
** Université du Québec à Montréal – Québec, Canada – proulx.jerome@uqam.ca
*** Ecole Normale Supérieure de Bamako Mali. mamadoussangare@yahoo.fr
**** Université Paris Diderot – France – kuzniak@math.jussieu.fr

© Clivaz S., Proulx J., Sangaré M., Kuzniak A. (2012) Articulation des connaissances mathématiques et didactiques pour l'enseignement : pratiques et formation – *Compte-rendu du Groupe de Travail n°1.* In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT1, pp. 155–159). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

l'élaboration de l'appel initial. Toutefois, une demande additionnelle avait été formulée au GT : intégrer la question des connaissances didactiques des enseignants. Face à cette demande, qui paraissait alors nécessiter deux groupes de travail, un pour chacun des types de connaissances, les responsables du GT1 ont décidé de travailler sur l'articulation de ces deux thèmes – cet aspect apparaissait novateur et très intéressant pour discuter de la formation des enseignants tant ces deux thèmes s'entrecroisent durant la formation et la pratique enseignante. Ainsi est née l'idée d'approfondir l'articulation des connaissances mathématiques et didactiques nécessaires pour l'enseignement des mathématiques.

Toutefois le point de départ de la réflexion est resté la question des connaissances mathématiques, mais dans un contexte relié et pertinent à la pratique d'enseignement. Les questions qui ont été proposées pour orienter l'appel à contribution sont les suivantes :

- Qu'entend-on par « connaissances mathématiques pour l'enseignement » ?
- Quels devraient être la nature et le niveau de connaissances mathématiques des enseignants ?
- Quel type de connaissances mobilisent les enseignants dans leurs pratiques ?
- Quelles approches en formation ?

Les auteurs ont été incités, de manière explicite, à travailler et discuter l'articulation entre mathématiques et didactique : « pour tout type de contribution proposée, il est important que les questions d'articulation entre les connaissances mathématiques et les connaissances didactiques soient travaillées et mises au débat ». Suite au processus de relecture des textes soumis, ainsi qu'avec l'effet du temps sur les réflexions, cette question d'articulation est apparue beaucoup plus claire lors du colloque lui-même en février 2012.

Afin de favoriser la qualité et la diversité des contributions, la nature des contributions n'a pas été prescrite ni restreinte à une seule forme. L'appel à contribution a ouvert la possibilité à une diversité de textes, avec leurs exigences spécifiques : des rapports de recherches empiriques, des réflexions/discussions théoriques, et des exemples de formation et de pratiques de formateurs. Dans le cas de rapports de recherche, les contributions devaient établir clairement les fondations théoriques et méthodologiques au cœur de l'étude menée. Les réflexions théoriques devaient être appuyées par des fondements précis et offrir des perspectives justifiées et bien enracinées dans des arguments étayés. Dans le cas d'expériences pratiques ou d'exemples de formation, les contributions ne devaient pas se limiter à des descriptions et devaient réserver une partie importante à l'analyse réflexive, au retour sur ces expériences et à l'explicitation des fondements qui motivent les choix faits. Cette demande s'est avérée fructueuse par la variété de la forme des textes proposés, et elle a permis que des participants très divers assistent et proposent des textes dans le groupe de travail (chercheurs, formateurs, enseignants). Les discussions ont ainsi été stimulantes en évitant une vision unilatérale et simplificatrice sur ces questions. Nous croyons que cette pratique est à retenir pour de futurs GT, dans le but de maintenir l'ouverture des discussions au sein du colloque EMF et attirer l'ensemble de la communauté francophone intéressée par les questions d'enseignement, d'apprentissage et de mobilisation des mathématiques dans différents contextes.

III. LES SEANCES DU GROUPE DE TRAVAIL

Dès le début, deux distinctions ont été précisées et ont orienté une partie des discussions. La première a trait à la distinction entre une connaissance mathématique et une connaissance didactique. Dans les analyses de pratiques d'enseignants, autant en contexte de formation

(Deruaz, Passaro, Proulx) qu'en contexte d'enseignement (Clivaz), il n'était pas toujours facile de distinguer ce qui relevait d'une connaissance didactique ou d'une connaissance mathématique.

À cet égard, les discussions ont fait ressortir l'intérêt de dissocier ces deux types de connaissances pour ensuite les faire fonctionner et les articuler. Il s'agit également de clarifier le rôle de la formation pour permettre cette articulation. Par ailleurs, plusieurs ont souligné que dans certains modèles existant sur les connaissances mathématiques des enseignants, notamment celui de Ball (2008), la composante « didactique » des connaissances des enseignants était moins mise à l'avant, car divisée en plusieurs éléments pédagogiques ou mathématiques ; toutefois tous les participants ne partageaient pas cet avis. De surcroît, le modèle de Ball semble « statique » par rapport à l'étude des questions d'articulation entre connaissances mathématiques et didactiques. D'autres cadres ont été évoqués qui introduisaient une différence entre savoir et connaissances, contrairement à la tradition anglo-saxonne.

La deuxième distinction discutée est celle relative à la différence, au niveau des connaissances mathématiques, entre les (futurs) enseignants du primaire et ceux du secondaire. Alors que souvent on les distingue en disant que les enseignants du secondaire connaissent bien leurs contenus, mais que ce n'est pas le cas de ceux du primaire, les discussions, les commentaires, mais surtout les textes présentés ont eu pour effet de questionner cette différence souvent prise comme allant de soi. Les « critiques » ou « manques » souvent soulignés dans la littérature concernant les difficultés mathématiques vécues chez les enseignants du secondaire, jumelées à certaines perspectives mises en avant dans divers textes présentés (Passaro, Proulx, Sayac), ont permis de souligner que la distinction n'en est pas du type savoir/non-savoir, ou habileté/non-habileté, mais était plus complexe et probablement relative davantage à une question de rapport au savoir (voir le texte de Fluckiger et al.), dans lequel des différences importantes ressortent entre les enseignants du primaire et ceux du secondaire.

Un autre aspect qui a alimenté nombre de discussions est la provenance d'orientations « didactiques » variées entre les différents participants. Des besoins de clarifications de ce qui était entendu par l'expression « didactique » par les différents intervenants se sont faits jour, dans le but de mieux comprendre la provenance des propos et l'ancrage à l'intérieur duquel le tout se situait. À titre d'exemple, voici, tiré du texte de Proulx, un énoncé de la provenance « didactique » du chercheur :

> La didactique des mathématiques est un domaine d'études assez récent. Pour plusieurs didacticiens, elle s'est établie de façon plus officielle durant les années 1970 à plusieurs endroits autour du globe, suite à l'avènement des mathématiques modernes dans le milieu scolaire (voir Moon 1986). La didactique des mathématiques s'est donc développée de façon contextualisée et dépendante de ses divers milieux d'origine en ce qui a trait à ses orientations, mais aussi à la nature des travaux qui y ont été réalisés. Elle porte ainsi, tel que le souligne Bednarz (2007), un caractère multi-référentiel et hautement contextualisé, amenant à parler des didactiques des mathématiques et non d'une seule didactique des mathématiques. À titre d'exemple, comme l'explique Bednarz (2001), alors qu'elle s'est développée en France dans une intention d'en faire une science, elle s'est davantage développée en Italie pour des envies d'innovation des pratiques de classes et aux Pays-Bas en lien avec la vision de Freudenthal des mathématiques comme activité humaine. Ces différents contextes sont importants, car ils ont fait émerger différentes façons de faire et de concevoir les travaux en didactique des mathématiques. Plus près de moi, au Québec et particulièrement à l'UQAM, la didactique des mathématiques s'est développée dès les années 1970 dans une préoccupation de formation des enseignants, orientant de ce fait la nature des travaux et des réflexions qui y ont été menés. C'est ce contexte qui enracine les questions que je pose dans cet article – nées de préoccupations au carrefour de la didactique des mathématiques et de la formation des enseignants – pour aborder la notion d'articulation au cœur du thème du GT1. (Proulx, p. 238)

Cependant, cette idée de multiplicités des didactiques peut être aujourd'hui questionnée depuis l'accroissement des rencontres internationales, comme EMF, qui ont permis d'établir des ponts entre ces différents courants. Le point important de divergence se situe plutôt dans le type de questions réellement étudiées, elles-mêmes situées dans des contextes différents qui supposent des adaptations théoriques.

Dans la rubrique « approches en formation », certaines questions demeurent encore ouvertes ; celles évoquées avec insistance sont les suivantes :

- Au plan méthodologique, l'articulation des connaissances mathématiques et des connaissances didactiques doit-elle être abordée de façon différenciée en fonction du cadre théorique, du système éducatif du pays, du public (chercheurs, formateurs, étudiants-professeurs, formation continue) ? Plusieurs communications écrites de même que les discussions menées au sein du GT1 font apparaître des faits ou des résultats fortement liés au contexte. Dans certains cas, il a été nécessaire de décrire brièvement le système de formation du pays pour rendre la compréhension de ces faits ou de ces résultats.
- L'idée d'outils didactiques pour l'enseignement des mathématiques a été partagée par beaucoup de participants durant les séances du GT1. Cependant une question majeure revenait souvent dans les échanges : quels outils didactiques choisir pour l'enseignement des mathématiques, et comment les utiliser en formation ?
- Quelles devraient être la place et le(s) rôle(s) des ressources pédagogiques (les manuels scolaires en particulier) dans la construction des connaissances de l'enseignant pour l'enseignement des mathématiques ? Cette question semble liée au contexte du système de formation d'enseignants de chaque pays ; elle recouvre également certains aspects du thème étudié par le groupe de travail GT6.

Dans une rencontre où les participants avaient des origines géographiques, théoriques et professionnelles si diverses, ce genre de clarification apparaît porteur pour aider à mieux comprendre les propos tenus, mais surtout pour ouvrir l'étendue des perspectives de chacun et éviter le confinement dans une vision unilatérale de ce qu'est la « didactique ».

IV. VERS EMF-2015

Cette synthèse montre que le thème sur l'articulation des connaissances mathématiques et didactiques a avantage à être poursuivi dans les prochains colloques. Toutefois, à cause des questions profondes provoquées par l'accent mis sur l'articulation mathématique et didactique cette reconduction, nous le croyons, ne doit pas se limiter à un groupe de travail seulement dédié aux pratiques des enseignants et à leur formation. Cette question de l'articulation entre mathématique et didactique intéresse toute la communauté internationale de la didactique des mathématiques. C'est donc une problématique qui mérite attention, tant au niveau des clarifications que du débat.

BIBLIOGRAPHIE
(*de ce texte et de l'appel à contribution*)

Bednarz N., Proulx J. (2009) Connaissance et utilisation des mathématiques dans l'enseignement : Clarifications conceptuelles et épistémologiques prenant leur source dans une analyse de la pratique des enseignants. *For the Learning of Mathematics* 29(3), 11-17. http://flm.educ.ualberta.ca/BednarzProulx.pdf

Bednarz N. (2001) Didactique des mathématiques et formation des enseignants : le cas de l'Université du Québec à Montréal. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies* 1(1), 61-80.

Bednarz N. (2007) Ancrage de la didactique des mathématiques au Québec : à la recherche de sens et d'une cohérence. *Actes du colloque 2007 du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec* (pp. 21-61). UQÀR : GDM.

COPIRELEM (2003) *Concertum Dix ans de formation des professeurs des écoles en mathématiques (Tomes 2-3).* Paris: Arpeme.

Huillet D. (2009) Mathematics for teaching: An anthropological approach and its use in teaching training. *For the Learning of Mathematics* 29(3), 4-10.

Kahane J.-P. et al. (Eds.) (2003) *Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques* – La formation des maîtres en mathématiques. http://www.cfem.asso.fr/Formation_maitres.pdf

Kuzniak A. (2007) Savoir mathématique et enseignement didactique et pédagogique dans les formations initiales du premier et du second degrés. *Recherche et formation* 55, 27-40.

Moon B. (1986) *The 'new maths' curriculum controversy: An international story*. London : Falmer Press.

Morin M.-P. (2008) Les connaissances mathématiques et didactiques chez les futurs maîtres du primaire : quatre études de cas. *Canadian Journal of Education* 31(3), 537-566.

Wood T. (2009) The balance of teacher knowledge : Mathematics and pedagogy. In Ball D. L., Even R. (Eds.) (pp. 211-225) *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics: The 15th ICMI Study*. New York : Springer.

CONTRIBUTIONS AU GT1

CHERIX P.-A., CONNE F., DAINA A., DORIER J.-L., FLUCKIGER A. – Enseignants du primaire versus du secondaire : faire des mathématiques ensemble.

CLIVAZ S. – Connaissances mathématiques des enseignants et enseignement de l'algorithme de la multiplication.

DERUAZ M., CLIVAZ S. – Un cours de savoirs disciplinaires en mathématiques en formation des maîtres primaires.

MORIN M.-P., THEIS L., ROSA-FRANCOEUR J. – Intégrer les connaissances mathématiques et didactiques : le cas de la formation en enseignement au préscolaire et au primaire de l'université de Sherbrooke.

PASSARO V. – Quelles mathématiques pour les futurs enseignants ? Réflexions et exemples de pratique d'une formatrice.

PROULX J. – De l'existence de mathématiques de la didactique : réflexions sur l'articulation entre mathématique et didactique.

SANGARE M. S. – Formation d'enseignants en mathématiques à l'école normale supérieure de Bamako : quelle articulation entre mathématiques et didactique ?

SAYAC N. – Pratiques de formateurs : la question centrale des savoirs de formation.

ENSEIGNANTS DU PRIMAIRE VERSUS DU SECONDAIRE : FAIRE DES MATHEMATIQUES ENSEMBLE

Pierre-Alain CHERIX*, François CONNE*, Audrey DAINA*,
Jean-Luc DORIER*, Annick FLUCKIGER*

Résumé – Ce texte présente une recherche qui vise à analyser le rapport que des enseignants ou futurs enseignants ont à l'égard des mathématiques. Le dispositif élaboré a permis la confrontation, à propos de questions mathématiques, entre des enseignants généralistes de l'enseignement primaire et des enseignants du secondaire spécialistes des mathématiques du Canton de Genève. Deux types d'analyses ont été faites ; relativement aux thèmes mathématiques traités puis en termes de postures. La conclusion met en évidence les apports et les limites d'un tel dispositif relativement aux connaissances mathématiques et didactiques des enseignants.

Mots-clefs : rapport aux mathématiques, pratiques enseignantes, postures, enseignement primaire, enseignement secondaire

Abstract – This text presents a research work that aims at analysing the relation that teachers or future teachers have towards mathematics. The device elaborated allowed the confrontation, through mathematical questions, between generalist teacher from primary school and specialised teachers from secondary education, in Geneva. A first type of analyses was made relatively to the mathematical subjects at stake in the questionnaire. We give afterwards an analysis in terms of postures. The conclusion allows to put forward the benefits and limitations of such a device relatively to mathematical and didactical knowledge of teachers.

Keywords: relation to mathematics, teachers' practices, postures, primary school, secondary school

I. ORIGINE ET CONTEXTE DE LA RECHERCHE

La recherche présentée ici est une recherche exploratoire amorcée en 2006. À l'origine, un projet soutenu par la région Rhône Alpes[1] dans lequel l'équipe de didactique des mathématiques de Genève (DiMaGe) s'est intéressé à la question de la désaffection des élèves pour les sciences. Une première étude faite sur la base de questionnaires relatifs au savoir savant mathématique et à son enseignement/apprentissage a été exposée lors du colloque EMF 2009 (Cherix et al. 2009). L'absence de résultats significatifs dans le traitement statistique de ces questionnaires nous a conduits à nous intéresser au rapport au savoir que les enseignants entretiennent avec les mathématiques. Une autre visée concernait l'expérimentation de dispositifs susceptibles d'intéresser la formation des enseignants, formation regroupant enseignants du primaire et du secondaire. C'est donc avec cette double perspective que nous avons élaboré le dispositif de questionnaire / entretien décrit ci-après.

Dans ce texte nous exposons successivement les références théoriques qui sont les nôtres, puis le dispositif mis en place et les analyses faites. Celles-ci sont doubles ; après avoir analysé ce qui émerge de chacun des thèmes mathématiques en jeu dans l'entretien il nous a semblé indispensable de faire une deuxième lecture longitudinale de nos données, ce que nous avons fait en termes de « postures ». La conclusion permet de voir l'intérêt et les limites d'un tel dispositif.

* Université de Genève, équipe DiMaGe – Suisse – Pierre-Alain.Cherix@unige.ch, Francois.Conne@unige.ch, audrey.daina@unige.ch, Jean-Luc.Dorier@unige.ch, annick.fluckiger@gmail.com

[1] Cluster 14 « Enjeux et représentations de la science, de la technologie et de leurs usages », axe 4 « Formation scientifique et didactique des sciences », Projet sur « la désaffection des jeunes pour les études scientifiques ».

© Cherix P.A, Conne F., Daina A., Dorier J.-L., Fluckiger A. (2012) Enseignants du primaire versus du secondaire : faire des mathématiques ensemble. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT1, pp. 160–171). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

1. *Cadrage théorique*

Nous travaillons ici la notion de rapport au savoir dans une perspective proche de celle de Chevallard (2003). La spécificité de notre travail consiste à faire faire des mathématiques à des enseignants en dehors de tout contexte scolaire, pour obtenir des informations sur les opinions et les représentations que les enseignants ont de la discipline mathématique qu'ils enseignent.

Différents travaux anglo-saxons ont travaillé, avec une autre approche, la question des connaissances des enseignants. Shulman (1986) a développé la notion de « pedagogical content knowledge[2] », Ma (1999) ainsi que Ball et al. (2008) se sont attachés à analyser finement la façon dont les connaissances interviennent dans la gestion de la classe de mathématique. En France, Pian (1999) a mis en évidence que les étudiants se destinant à l'enseignement secondaire donnent à voir des connaissances mathématiques atomisées, Grugeon (2008) a relevé la difficulté d'une adaptation pertinente des apports de la formation à la pratique de classe Les recherches conduites par Robert (2001, 2005) montrent la difficulté des enseignants à investir mathématiquement les activités proposées aux élèves.

Notre recherche s'attache à apporter un nouveau type de point de vue sur ces questions. Après avoir présenté le dispositif expérimental nous préciserons lors des analyses par thème mathématique notre ancrage théorique. Les analyses en termes de *posture*, donneront à voir, l'aspect très exploratoire de cette recherche.

2. *Dispositif*

Pour analyser le rapport au savoir mathématique des enseignants, nous avons choisi de nous intéresser à leurs pratiques mathématiciennes, en faisant l'hypothèse que la confrontation entre des enseignants du primaire et du secondaire autour de questions mathématiques traitées par eux hors champ scolaire est susceptible de rendre visibles certaines dimensions du rapport au savoir entretenu par ces enseignants. De plus, il nous semblait intéressant de tester un dispositif susceptible d'être réinvesti dans la formation des enseignants.

Notre dispositif repose sur la confrontation de deux sujets[3], un de la culture de l'enseignement primaire et l'autre du secondaire (les deux sur la base du volontariat), pour une expérimentation en deux temps sur le même lieu. Les deux sujets de l'expérimentation, présents dans la même salle, doivent tout d'abord répondre par écrit à une série de questions (environ 1h) ; les productions sont alors photocopiées pour servir de base à l'entretien qui suit immédiatement (1h à 2h). Au cours de l'entretien, l'expérimentateur suscite des échanges directs entre les deux protagonistes à propos de leurs réponses au questionnaire et pose éventuellement de nouvelles questions susceptibles de relancer les discussions. Notons que chacun des sujets de l'entretien est informé du statut de ses partenaires.

Nous avons réalisé 14 entretiens: 6 confrontant deux étudiants, 8 deux enseignants plus ou moins expérimentés.

Dans ce texte nous utilisons S pour secondaire, P pour primaire ; Sa et Pa sont des apprenants (étudiants) destinés à enseigner respectivement au secondaire et au primaire; Se et Pe sont des enseignants en poste. Chaque entretien réunit donc trois protagonistes, un expérimentateur (chercheur de l'équipe, Exp) et deux sujets (un S et un P).

---

[2] Ce terme désigne des connaissances disciplinaires spécifiques à l'enseignement

[3] Nous choisissons à dessein le terme de « *sujets* » pour signifier que l'entretien n'est pas focalisé a priori sur la dimension enseignante.

A Genève, la formation des enseignants du primaire se fait à l'université (en sciences de l'éducation) et dure 4 ans ; les étudiants dont il est question ici étaient à la fin de leur 3e année universitaire. Au moment de notre expérimentation, la formation des enseignants destinés au secondaire consistait, après un master de mathématique, en un suivi au cours de la première année d'enseignement par des pairs formateurs sans formation didactique spécifique. Les étudiants Sa de notre expérimentation étaient alors en fin de master de mathématiques. Notons qu'il est fréquent pour de tels étudiants de faire des remplacements et/ou des cours particuliers, ils ont donc tous un peu d'expérience en enseignement.

Le questionnaire écrit (donné en annexe) porte sur quatre thèmes mathématiques : nombres décimaux et réels, constructions géométriques, algorithmes de calculs écrits, et π.

3. *Analyses*

Le corpus d'analyse est constitué à la fois des questionnaires écrits et des enregistrements vidéo des entretiens. Malgré le nombre important de données, il n'y a que peu de cas (14), ce qui fait de notre recherche une étude plutôt de type clinique.

Les premières analyses faites l'ont été relativement aux thèmes mathématiques abordés. Le dispositif mis en place a permis un double croisement : confrontation primaire versus secondaire, comparaison étudiant versus professionnel. Nous détaillons ci-dessous les analyses a priori et les résultats obtenus.

À la suite de ces analyses et du fait des limites relevées est apparue la nécessité d'un nouveau point de vue en termes de « postures ». Cette nouvelle approche permet une prise en compte de la situation d'entretien en tant que trilogue (incluant l'expérimentateur), de son déroulement temporel, et de l'évolution des positionnements dans la durée.

Nous donnons à voir ci-dessous succinctement et successivement les deux sortes d'analyses faites ; dans la réalité de cette recherche de longue durée (2007-2010) elles se sont bien évidemment enrichies mutuellement.

II. ANALYSES PAR THEME MATHEMATIQUE

1. *Questions sur les nombres*

La première série de questions concerne les nombres décimaux et réels et les écritures décimales illimitées. Ce sujet a été traité dans de nombreux travaux de didactique. Nous nous sommes appuyés notamment sur les travaux de Bronner (1997), Brousseau (1987), Izorche (1977), Le Thai Baô (2007), Margolinas (1985, 1988) et Neyret (1995) à la fois pour élaborer les questions les plus pertinentes et analyser les réponses recueillies.

Ce thème situé à la charnière primaire - secondaire, nous semblait pouvoir permettre l'émergence d'un rapport aux mathématiques dépassant le cadre strict des enseignements scolaires sans en être déconnecté.

Une première constatation concerne l'opposition nombre comme objet mathématique versus nombre comme écriture. L'appréhension du nombre en tant qu'écriture permet de résoudre de nombreuses questions, mais l'approche du nombre comme objet est une connaissance plus théorique et cette opposition recouvre celle des cultures mathématiques de nos sujets. Dans l'organisation des cursus d'enseignement la conceptualisation des nombres (entiers, décimaux, réels) commence par des actions sur des objets matériels (par exemple, des jetons) puis des écritures chiffrées. Piaget (1977) modélise ces processus en terme d'abstraction réfléchissante qui, portant sur les activités cognitives, transpose et reconstruit à un niveau supérieur (en les réorganisant) les acquis d'un niveau inférieur. Dubinsky (1991) et Sfard (1991), mettent eux aussi en évidence l'appui sur l'action, la répétition de certaines actions et la réflexion permettant l'intériorisation en des processus. C'est bien ce type de phénomène qui peut être identifié dans ce thème ; comprendre que 0,999… est 1 nécessite ce dépassement et ne peut être compris en restant au niveau d'un jeu sur les écritures. Cette dialectique processus–objet est centrale et pertinente pour discriminer les sujets S des sujets P.

Par exemple à la question du prédécesseur de 4, Sa2[4] répond « il n'existe pas ». L'étudiante Pa2 répond $3,\overline{9}$: pour cette étudiante centrée sur le processus d'écriture $3,\overline{9}$ ne peut qu'être différent de 4 puisque les écritures sont différentes

Pa2 : il peut pas y avoir de chiffre… vraiment qui précède 4, vu que c'est infini…

Nous trouvons dans cette réponse l'habituelle confusion faite entre « chiffre » et « nombre ». Dans la conception qui émerge ici, le processus d'écriture n'est pas encore encapsulé - pour reprendre le terme de Dubinsky (1991)- pour créer un objet cognitivement plus complexe.

Ce genre d'opposition est apparu sous une forme ou une autre dans presque tous les binômes entre les sujets P et S. Concernant l'existence d'une infinité de nombres entre deux décimaux, tous les sujets P donnent une explication liée à l'écriture. Les sujets S affirment tous à un moment donné qu'entre deux nombres il y a toujours un autre nombre; les arguments donnés alors portent sur le processus d'intercalage à l'infini des nombres qui sont ainsi traités comme des objets indépendants de leur écriture.

Une deuxième distinction est à faire entre enseignants en formation et enseignants confirmés. Les enseignants confirmés font avant tout référence à leur pratique de classe et moins souvent à une culture mathématique générale. Ils semblent s'être forgés un univers mathématique délimité par ce qu'ils abordent habituellement en classe. Ainsi, il apparaît que la pratique d'enseignement agit comme un filtre important dans le rapport aux mathématiques; ce phénomène non spécifique à la question numérique est identifiable dans de nombreux échanges au cours de l'entretien.

2. *Questions sur les constructions géométriques*

La deuxième série de questions porte sur des constructions géométriques (voir annexe). Notons qu'à Genève l'enseignement de la géométrie a été pendant longtemps très minoré à l'école primaire. Les sujets P de notre expérience peuvent donc avoir une formation plus que sommaire dans ce domaine. Les constructions géométriques à la règle et au compas dont il est question ici sont des objets classiques d'enseignement de l'école secondaire, elles engagent également des expériences spatiales. Les sujets P et S ne sont pas dans la même position *a priori* relativement à ces questions.

Comme précédemment, il s'agit de « faire» des mathématiques, de produire une réponse mais pour cette question, une fois la construction achevée, son auteur sait s'il a ou non réussi : la possibilité d'un feedback immédiat caractérise cette série de questions. Au cours même de l'élaboration de la réponse (la construction) des ajustements perceptifs sont possibles pour obtenir la réponse attendue. Au delà des constructions à réaliser à partir du rappel de la construction de la bissectrice, une question engage la réflexion sur les liens qui peuvent être

---

[4] Rappelons que Sa correspond à un étudiant (apprenant) en master de mathématique, le 2 correspond au 2ème entretien.

faits entre les différents éléments évoqués (bissectrice, perpendiculaire à une droite passant pas un point dont la position n'est pas précisée) ou une autre construction non mentionnée.

Les résultats différenciant les sujets P et S sont en cohérence avec d'autres observations faites en Suisse Romande ou en France (Celi et Bessot 2008 ; Offre, Perrin-Glorian et Verbaere 2006). Notamment, nous retrouvons chez les sujets P des procédures « à l'œil », telles qu'observées chez des élèves du primaire ou du secondaire inférieur. Les sujets P identifient ces questions comme faisant partie de leur formation scolaire mathématique. Ils reconnaissent (sauf 1) le rappel de construction proposé, mais l'absence de pratique a, chez certains, fortement émoussé le souvenir de ces pratiques de construction.

Le regard porté sur ces questions est différent. Les sujets P ne se sentent pas vraiment concernés, ni dans leur pratique personnelle, ni dans leur enseignement. Ces constructions enseignées par les sujets S sont en général dépréciées parce que considérées comme obsolètes. Ni la question de la difficulté de cet enseignement/apprentissage, ni la question de la place culturelle de ces constructions dans l'édifice mathématique ne sont abordées ; tous savent que cette pratique remonte à Euclide, cela suffit pour en faire un enseignement traditionnel à enseigner. L'enjeu de cet enseignement est rapporté à une technique de dessin nécessitant la maitrise d'instruments particuliers.

L'entretien a permis de questionner l'usage fait des instruments, les liens entre différentes constructions et le rapport à la démonstration. Dans cet échange à trois, certains sujets se sont sentis « retournés à l'école » voire « mal à l'aise » de se sentir observés « en train de faire ». Une sorte de relation didactique s'est souvent développée donnant lieu à des phénomènes de l'ordre d'un contrat didactique alors noué, l'un des protagonistes étant amené à «enseigner» une construction, un concept ; nous retrouverons cet aspect dans les analyses en termes de posture.

Dans ce thème qui a été considéré comme le moins intéressant du questionnaire, on observe que les sujet S, familiers de ces constructions, appliquent les procédures routinières connues; ce n'est pas le cas pour les sujets P moins familiers de ces questions qui traitent ces questions comme des questions ouvertes en engageant des procédures de résolution originales.

Lorsque l'expérimentateur engage la discussion sur le terrain de la démonstration, le clivage est net entre les deux populations ; les sujets S se sentent interpellés et répondent à la demande tandis que les sujets P se mettent alors en retrait.

3. Questions sur les erreurs dans les algorithmes écrits des opérations

Une spécificité de cette question réside dans son ancrage dans la pratique professionnelle des enseignants puisqu'il s'agit de commenter des erreurs attribuées à des élèves. Une autre particularité vient de ce que dans cette question les sujets de l'expérience ne produisent pas eux-mêmes une réponse à une question mathématique comme c'est le cas dans les autres groupes de questions. Enfin, cette question est davantage en lien avec l'univers professionnel des sujets P ; cela constitue donc pour les sujets P, une respiration bien venue dans l'entretien. La lecture d'erreurs est un savoir didactique travaillé dans la formation. Il s'agit pour nous dans cette question de discriminer les commentaires faits en termes de connaissances numériques de ceux relatifs aux diagrammes de l'algorithme, distinction faite dans les travaux de Brun, Conne et Flückiger (2003) ou Conne (1988). Nous ne voulions pas que les erreurs de livret (tables d'addition ou multiplication) soient un facteur explicatif de l'erreur d'où un choix de calculs élémentaires non problématiques ; c'est la question de la numération de position qui est centrale dans ces erreurs. L'erreur d'addition a été reprise d'observations faites à l'origine par Kamii et Dominick (1998).

Les analyses des questionnaires et entretiens donnent à voir deux profils différenciés. Ma (1999) différencie ce qu'elle appelle la « compréhension procédurale » centrée sur les questions d'exécution d'algorithme de la « compréhension conceptuelle », faisant appel à un réseau plus étendu de connaissances mathématiques en lien avec la question traitée. Nous retrouvons cette distinction en y adjoignant quelques remarques complémentaires.

Comme prévu, identification et localisation des erreurs ne posent aucun problème. On observe que les sujets Sa ont d'entrée de jeu une approche généralisante des deux erreurs proposées, approche centrée sur les concepts mathématiques, les sujets Pa ont une approche factuelle s'attachant à décrire la production de l'erreur et sa localisation ce qui conduit à différencier les deux calculs.

Le rapport au vocabulaire mathématique est différent. Pour les sujets S, les connaissances mathématiques liées aux algorithmes de calcul sont organisées en réseau et sont formulables aisément: elles agissent comme modèle pour penser les erreurs proposées. Pour les enseignants Pe et les étudiants Pa, ces connaissances existent mais elles n'émergent que sur sollicitation de l'expérimentateur et se manifeste alors un déficit important de vocabulaire[5].

Notons enfin que c'est toujours l'enseignement qui a été à l'origine du questionnement sur les algorithmes, l'objet mathématique « algorithme » n'est jamais questionné pour lui-même.

4. Questions sur π

Cette question se place nettement au niveau culturel. L'idée est de voir si cette notion, abordée par tous au cours de leur propre scolarité, entre dans ce qu'on peut appeler le patrimoine culturel des enseignants. π nous semble un bon candidat pour rester dans la conscience collective (Delahaye 1997).

La nécessité d'une définition ne s'impose manifestement pas, qu'il s'agisse des sujets P mais également de certains enseignants du secondaire Se ou des étudiants en master Sa. Lorsqu'elle est sollicitée, la définition donnée par les sujets S est en général le rapport entre le périmètre d'un cercle et de son rayon, très rarement celui de l'aire d'un disque au carré de son rayon. Le terme de « rapport » pose problème aux sujets P qui entendent « lien vague entre » et non rapport mathématique entre deux grandeurs ; ils rapportent donc plutôt π à son approximation 3,14. Si tous refusent de définir formellement π comme 3,14, c'est de fait cette définition qui émerge dans l'action chez certains sujets. Ce n'est pas le cas chez les étudiants Sa mais c'est quasi systématique chez les sujets P ; certains sujets Se ne sont pas loin de cette position, par exemple ce raccourci significatif d'une identification dans l'action entre π à 3,14 : « Sa : 3,14 est un nombre infini », pour mentionner le développement décimal de π. C'est bien 3,14 qui reste comme le plus significatif de ce qu'est π.

Comme pour les autres questions, pour les enseignants du secondaire c'est bien l'objet enseigné qui est au cœur des propos et non l'objet mathématique dans l'édifice culturel. Ils disent comment il leur a été enseigné et comment eux en parleraient à leurs élèves et quels moyens didactiques ils mettraient en œuvre pour l'aborder en classe.

Les étudiants parlent de la nature mathématique de π, les enseignants de l'objet enseigné : la différence se fait donc plus nettement entre les enseignants et les étudiants qu'entre les sujets S et P. Discuter de la nature arithmétique de π est resté l'apanage des étudiants Se.

[5] Selon Vergnaud (1991), l'absence de signifiant signe un déficit de conceptualisation.

Ainsi, π ne semble pas être une notion mathématique aussi emblématique que nous l'avions imaginée et si les échanges entre les sujets S et l'expérimentateur ont été fournis, les sujets P ont souvent été en retrait dans cette partie de l'entretien.

5. *Conclusion*

Les thèmes mathématiques du questionnaire ont leurs spécificités propres, les analyses portent les traces de ces spécificités et des travaux didactiques s'y rapportant: il ne peut donc y avoir de réelle synthèse. Comme prévu nous avons retrouvé des différences significatives entre les sujets P et S compte tenu de la différence de la formation mathématique. Un résultat peut-être plus frappant est la différence entre les étudiants et les enseignants expérimentés qui semblent ne faire plus référence qu'aux mathématiques qu'ils enseignent. S'ils sortent de cette référence, ils rentrent dans le souvenir de leur vie d'élève. Ceci montre que la culture mathématique des enseignants n'évolue qu'à l'aune du contexte scolaire qu'ils fréquentent dans une rupture avec leur formation universitaire (qu'elle soit disciplinaire ou didactique). Ce point montre l'intérêt de dispositifs de formations initiale et continue permettant un développement professionnel qui inclut une dimension sur la culture disciplinaire.

A l'issue de ces analyses il nous semble indispensable, pour tester le potentiel de ce type de dispositif en termes d'évolution du rapport aux mathématiques, de relire les entretiens avec une grille d'analyse prenant en compte la dynamique de ces entretiens dans la durée ainsi que le rôle non négligeable de l'expérimentateur.

III. ANALYSES EN TERMES DE POSTURES

La notion de *posture,* issue de la sociologie est utilisée ici dans ce qu'elle sous-entend de prise en compte des interactions et de la dynamique de l'entretien. Elle nous semble permettre des analyses nouvelles, non segmentées par les thèmes mathématiques, analyses dont nous donnons les résultats les plus saillants ci-dessous. De plus nous espérons dans un deuxième temps identifier sur la base de ces analyses des ressorts pertinents pour la formation.

De par le dispositif, les sujets volontaires, interrogés hors contexte scolaire, donnent à voir leurs pratiques mathématiques sur différents sujets, mais ils font également référence à leur pratique professionnelle ainsi qu'à leur passé d'élève et d'étudiant. Nous avons pu identifier deux grandes catégories de postures significatives relevées au cours de ces quatorze entretiens : des postures symétriques d'échange d'une part, des postures dissymétriques d'autre part.

Les sujets P et S confrontés dans l'entretien peuvent par moments se mettre en « posture d'échange », l'expérimentateur ne jouant alors que peu de rôle dans les interactions. Par exemple on voit dans la question sur les algorithmes, l'enseignant Pe faire appel à l'enseignement conjoint de la lecture et du calcul écrit pour expliquer l'erreur relevée dans l'addition ; l'enseignant Se découvrant cet argument, il s'ensuit un échange entre deux professionnels qui apprennent l'un de l'autre. Cette posture a été également relevée ponctuellement entre deux étudiants ou entre deux experts lorsque l'expérimentateur a engagé un débat avec le sujet S sur des questions mathématiques excluant de fait le sujet P.

Ce type de postures n'est pas fréquent. Bien plus souvent les postures relatives sont dissymétriques, nous évoquons ci-dessous les plus fréquentes.

Deux types de postures sont fréquentes compte tenu de la situation, celles « d'élève » et celle « d'enseignant ». Elles sont prises à l'initiative d'un des protagonistes ou provoquées en réaction à une prise de position ou une question. Par exemple un des sujets peut contraindre l'autre ou l'expérimentateur à lui enseigner une réponse, l'autre le faisant de plus ou moins bon gré. Certains enseignants du secondaire ont pu refuser cette posture en ramenant systématiquement l'échange dans une forme collaborative. Un seul cas a été relevé de posture ostentatoire d'expert en mathématique prise par un étudiant Sa. Un autre cas particulier de sujet Se a conduit ce dernier à se placer trop systématiquement dans l'entretien en posture de formateur de son alter ego ; ceci a conduit à un rejet de plus en plus net de la part de l'enseignant Pe. Ces cas limites seraient à prendre en compte dans l'optique de la mise en place d'une formation fondée sur ce dispositif.

En tant qu'enseignant, les références peuvent être en lien avec les élèves, mais aussi en lien avec la communauté professionnelle : « nous on travaille jamais avec deux chiffres ». La référence à la communauté apparaît souvent comme un moyen de défense des sujets P lorsqu'ils se sentent en difficulté mathématique, c'est aussi un moyen de justifier un savoir procédural.

Un autre aspect concerne la référence aux tâches familières dans sa pratique professionnelle : « J'ai commencé par 4,01 parce que j'ai l'habitude d'encadrement non strict d'un côté » ou en géométrie « l'énoncé est clair parce que je connais l'exercice ».

Ceci apparaît souvent chez les sujets S pour justifier leur aisance aux yeux de leur collègue P. Pour les sujets P, elle apparaît davantage en lien avec les activités manipulatoires pratiquées en classe.

Cette posture « d'enseignant » est fréquente, y compris chez les étudiants. En contrepoint la deuxième posture massivement relevée est celle « d'élève » :

> Je ne suis pas sûre car je ne me souviens plus trop si au bout d'un moment cela devient 4
>
> Vieux souvenir de démonstration du collège où on devait faire un truc avec les continus et au bout d'un moment ben ça devient…

A la suite de quoi cet enseignant Pe se tourne vers son partenaire pour demander « pourquoi ça vaut 4 ? », mettant ainsi Se en posture d'enseignement et de ce fait adoptant dans l'entretien une posture d'élève qui apprend ici et maintenant. Elève qui se souvient, élève qui apprend ont été des postures fréquemment prises. De fait de nombreux sujets de l'expérience ont fait et appris des mathématiques pendant l'entretien.

Si le dispositif génère souvent une dissymétrie des postures, sauf exception, ceci n'a pas posé de problème d'ascendance mal vécue. Au contraire la confrontation a souvent générée un travail collaboratif portant sur les mathématiques ou sur la pratique professionnelle, ce qui potentiellement peut produire des effets positifs sur l'évolution des rapports aux mathématiques. De plus, dans ce type d'analyse le rôle de l'expérimentateur apparaît de façon évidente et le thème traité génère des postures différentes.

IV. CONCLUSION

Les échanges ont été nombreux, les sujets ont dit avoir été intéressés par cette expérience même si dans un premier temps ils se sentaient un peu déstabilisés. Si notre dispositif laisse entrevoir une piste pour la formation initiale ou continue, la question se pose bien sûr de reproduire ce dispositif avec des populations moins motivées *a priori*[6]. Se pose également la question des contenus à aborder et de la forme des questions. Les contenus proposés ici sont proches de l'enseignement et donc susceptibles de focaliser les réponses sur la pratique professionnelle.

[6] Rappelons que les sujets de notre expérience étaient volontaires.

Notons également que la formation professionnelle, les connaissances didactiques théoriques, sont singulièrement absentes du discours, les sujets ne font référence qu'à leurs savoirs professionnels, les pratiques de classe et leurs souvenirs en tant qu'élèves. Il est clair que la pratique d'enseignement agit comme un filtre important dans le rapport aux mathématiques. Les enseignants avec beaucoup de pratique semblent ainsi s'être forgés un univers mathématique délimité par ce qu'ils ont l'habitude d'aborder en classe. Dans le traitement de l'ensemble des questions le constat peut être fait que l'univers mathématique des enseignants est limité par les sujets abordés en classe et les savoirs qui relèveraient du champ de la didactique des mathématiques acquis en formation semblent inexistants.

REFERENCES

Ball D., Thames M., Phelps G. (2008) Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Bronner A. (1997), *Etude didactique des nombres réels*. Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier – Grenoble I.

Brousseau G., Brousseau N. (1987) *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*. Document pour les enseignants et pour les formateurs, IREM de Bordeaux.

Brun J., Conne F., Flückiger A. (2003) Algorithmes de division et schèmes numériques, Compétences complexes dans l'éducation et le travail. Qu'est-ce que la pensée? In Vergnaud G. (Ed.) *Actes du colloque Qu'est-ce que la pensée ? 1-4 juillet Suresnes 1998* (CD Rom).

Celi V., Bessot A. (2008) Statut et rôle du dessin dans la formulation d'un programme de construction au collège. *Petit x* 77, 23-46.

Conne F. (1988) Calculs numériques : Quatrième épisode du feuilleton consacré aux activités numériques élémentaires. *Math Ecole* 135, 33-35.

Cherix P.-A., Conne F., Daina A., Dorier J.-L., Fluckiger A. (2010) Analyser le rapport aux mathématiques des enseignants peut-il aider à agir contre la désaffection des jeunes pour les études de mathématiques ? *Actes du Colloque Espace Mathématique Francophone* (spécial n°1, pp. 55-75). http://fastef.ucad.sn/EMF2009/colloque.htm projet.

Chevallard Y. (2003) Approche anthropologique du rapport au savoir et didactique des mathématiques. In Maury S., Caillot M. (Eds.) *Rapport au savoir et didactiques* (pp. 81-104). Paris : Editions Fabert.

Delahaye J.-L. (1997) *Le fascinant nombre π*. Paris : Belin.

Dubinsky E. (1991) Reflective Abstraction. In Tall D. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht : Kluwer.

Grugeon B. (2008) Quelle évolution des pratiques d'un professeur stagiaire de mathématiques pendant son année de formation à l'IUFM. In Vanderbrook F. (Coord.) *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants* (pp. 383-419). Toulouse : Octarès éditions.

Izorche M.-L. (1977) *Les réels en classe de seconde*. Mémoire de DEA. Université de Bordeaux 1.

Kamii C., Dominick A. (1998) The harmful effects of algorithms in grades 1-4. In M. Lorna, K. Michael (Eds.) *The teaching and learning of algorithms in school mathematics: 1998 NCTM yearbook* (pp. 130-140). Reston - VA, National Council of Teachers of Mathematics.

Le Thai B. (2007) *Etude didactique des relations entre notions de limite et décimalisation des nombres réels dans un environnement « calculatrice ».* Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier – Grenoble 1 et Université Pédagogique de Ho Chi Minh Ville.

Ma L. (1999) *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental* Mathematics *in China and the United States*. London: Routldege.

Margolinas C. (1985) *Un bilan des connaissances sur les nombres après la classe de 4e, le nombre dans tous ses états*. Mémoire de DEA. Université de Bordeaux I.

Margolinas Claire (1988) Une étude sur les difficultés d'enseignement des nombres réels. *Petit x*, 16, 51-66.

Neyret R. (1995) *Contraintes et déterminations des processus de formation des enseignants : nombres décimaux, rationnels et réels dans les instituts Universitaire de Formation des Maîtres*. Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier – Grenoble I.

Offre B., Perrin-Glorian M.-J., Verbaere O. (2006) Usage des instruments et des propriétés géométriques en fin de CM2. *Petit x*, 72, 6-39.

Piaget J. (1977) *Recherches sur l'abstraction réfléchissante*. Paris: PUF.

Pian J. (1999) Diagnostic des connaissances mathématiques des étudiants de CAPES, vers une interprétation cognitive des apprentissages individuels. *IREM de Paris7, Cahier DIDIREM* 34.

Robert A. (2001) Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 21(1/29), 57-80.

Robert A. (2005) Recherches en didactique des mathématiques et formations professionnelles des enseignants du second degré en mathématiques – L'exemple d'une formation de formateur. In Castela C., Houdement C. (Eds.) *Actes du Séminaire National de Didactique des* Mathématiques (pp. 137-176). Paris : ARDM et IREM de Paris 7.

Sfard A. (1991) On the dual nature of mathematical conception: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22(1), 1-36.

Shulman L. (1986) Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

Vergnaud G. (1991) La théorie des champs conceptuels. *Recherche en didactique des mathématiques*, 10(2/3), 281-308.

ANNEXE : QUESTIONNAIRE (3 VERSIONS)[7]

Merci de bien vouloir répondre aux questions qui suivent. Notre but n'est pas de vous évaluer, mais de recueillir des informations qui vont nous servir pour une recherche.

Ne vous censurez pas, écrivez tout ce que vous voulez (si nécessaire utilisez le dos des feuilles), n'effacez pas, si vous devez tracer, faites-le de façon « lisible ».

Questions 1

A1) Existe-t-il un nombre compris entre 2,746 et 2,747 ? Si oui en donnez-en un, sinon justifiez

A1bis) Quels sont les nombres compris entre 2,13 et 2,23 ? (A partir de Ent5)

A2) Donnez le meilleur encadrement possible avec deux chiffres après la virgule :

…………..< 4,157 < …….....

A2bis) Donnez le meilleur encadrement possible avec deux chiffres après la virguleö

…………..< 0,007 < ……..... (A partir de Ent5)

A3) Donnez le meilleur encadrement possible avec trois chiffres après la virgule :

….... < 4,1 < ……

A3bis) Donnez le meilleur encadrement possible avec quatre chiffres après la virgule :

….... < 4,01 < …… (A partir de Ent5)

B1) Quel est le nombre qui précède 4 (juste avant 4) ?

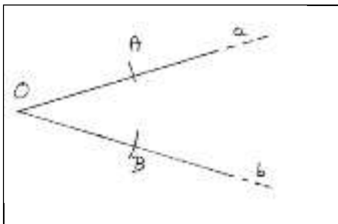
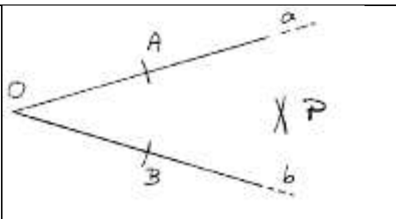
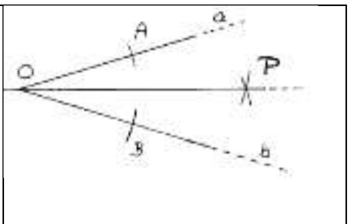
B2) Quel est le résultat de l'opération : $1,\overline{4} + 3,\overline{7}$??

= …….

N.B. la notation $1,\overline{4}$ signifie 1,444… , il y a une infinité de 4 après la virgule

Questions 2

Voici, en guise de rappel, une construction à la règle et au compas de la bissectrice d'un angle :

		
Etape 1	Etape 2	Etape 3

Cette construction aura sans doute ravivé en vous quelques souvenirs de géométrie élémentaire. Nous mettons maintenant à votre disposition du papier, un crayon, une règle et un compas pour effectuer deux constructions que nous vous demandons de faire.

1. Construisez s'il vous plaît la bissectrice d'un angle plat.

2. Construisez s'il vous plaît la perpendiculaire d'un point A à une droite d.

3. Ces rappels vous auront éventuellement suggéré une autre construction géométrique. Si oui, veuillez nous dire laquelle.

Commentaires éventuels :

[7] Le questionnaire original est plus aéré, comprend des espaces pour répondre sur la feuille et est écrit plus gros ! Nous l'avons réduit ici pour gagner de la place. De plus, à partir de Ent7 (c'est-à-dire après les étudiants), le questionnaire était précédé d'une page demandant des renseignements sur le nombre d'années d'expérience, le type de classes et le rapport aux mathématiques.

Questions 3

Voici deux réponses d'élèves effectivement observées. Qu'en pensez-vous ?

1) 1bis) (A partir de Ent5) 2) (inchangé)

```
  12
· 21
  12
  24
  36
```

```
  24
· 53
  72
 120
 192
```

```
 117
+ 18
+ 2
 497
```

Notez ici vos commentaires sans vous contraindre à une rédaction soignée :

Questions 4

Version 1 (Ent1 à Ent6)

1. Si quelqu'un vous demande la valeur de π, que lui répondez-vous ?

2. Quelles sont pour vous les trois idées les plus importantes à savoir sur π ?

Version 2 (Ent7 à Ent14)

Voici trois énoncés :

a. π est un nombre qui vaut à peu près 3,14.
b. π est le rapport entre le périmètre d'un cercle et son diamètre.
c. π est l'aire du disque de rayon 1.

1. Donnez votre opinion sur ces trois énoncés (pertinence, validité, statut, accessibilité, pouvoir de questionnement, importance,…).

2. Quels liens voyez-vous entre ces trois énoncés ?

CONNAISSANCES MATHEMATIQUES DES ENSEIGNANTS ET ENSEIGNEMENT DE L'ALGORITHME DE LA MULTIPLICATION

Stéphane CLIVAZ*

Résumé – Afin de décrire l'influence des connaissances mathématiques des enseignants primaires sur leur gestion didactique de tâches mathématiques, quatre enseignants ont été observés durant leur enseignement de l'algorithme de la multiplication par un nombre à plusieurs chiffres. Les séquences sont analysées à l'aide de trois cadres : les catégories de connaissances mathématiques pour l'enseignement, les critères de pertinence mathématique du professeur et la structuration du milieu. Les résultats sont considérés à partir d'un niveau d'observation général et se focalisent ensuite sur un grain d'analyse plus fin. Ils font apparaître des liens entre connaissances mathématiques, pertinence et choix didactiques des enseignants.

Mots-clefs : connaissances mathématiques, enseignant, enseignement primaire, algorithme de la multiplication, pertinence

Abstract – In order to describe the influence of primary school teachers' mathematical knowledge on their didactical management of classroom mathematical tasks, four teachers have been observed while teaching multidigit multiplication algorithm. The sequences were analyzed using three frames: categories of mathematical knowledge for teaching, the criteria for mathematical pertinence of the teacher and the structure of the milieu. The results are taken into account from a general perspective and then focused on a finer grained analysis. The analysis shows the links between mathematical knowledge, pertinence and teachers' didactical choices.

Keywords: mathematical knowledge, teacher, elementary teaching, multidigit multiplication, pertinence

I. INTRODUCTION

La recherche présentée ici est une partie d'une recherche doctorale visant à décrire l'influence des connaissances mathématiques des enseignants primaires sur leur gestion didactique de tâches mathématiques (Clivaz 2011).

Au cours des dernières années, les recherches portant sur les connaissances mathématiques pour l'enseignement ont pris de l'ampleur dans la communauté scientifique internationale (Bednarz et Proulx 2009). Ce mouvement s'observe également dans le monde francophone, toutefois plus au Québec qu'en Europe. L'existence d'un groupe de travail lors d'EMF 2009 et d'EMF 2012 est une manifestation supplémentaire de cet essor.

Si de nombreuses recherches, en particulier étatsuniennes, tentent d'établir un lien entre les connaissances mathématiques des enseignants et les performances des élèves, les résultats sont souvent mitigés, voire contradictoires. De plus, même quand un effet est mesuré, les mécanismes permettant de décrire l'influence des connaissances mathématiques des enseignants sur leur enseignement restent mystérieux (Hill, Rowan et Ball 2005, p. 401).

Le cadre théorique de notre recherche s'appuie sur les *catégories de connaissances mathématiques* (Ball, Thames et Phelps 2008), sur les critères de *pertinence mathématique du professeur* élaborés par Bloch (2009) et sur la *structuration du milieu* et sa déclinaison en *niveaux d'activité du professeur* (Margolinas 2002). L'analyse portera sur l'enseignement de l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres dans des classes de 4ème primaire[1] du canton de Vaud (Suisse). Les résultats seront considérés à partir d'un niveau d'observation général et se focaliseront ensuite sur un grain d'analyse plus fin.

* HEP Vaud – Suisse – stephane.clivaz@hepl.ch

[1] CM1 français, élèves de 10 ans

© Clivaz S. (2012) Connaissances mathématiques des enseignants et enseignement de l'algorithme de la multiplication. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT1, pp. 172–182). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

II. CADRE THEORIQUE ET PROBLEMATIQUE

1. Les Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement

Ball, Thames et Phelps (2008) proposent de classifier les différentes *connaissances mathématiques pour l'enseignement* (CME) selon le découpage suivant :

Connaissances du sujet :

– Connaissances mathématiques communes (CMC)
– Connaissance de l'horizon mathématique (CHM)
– Connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement (CMS)

Connaissances pédagogiques du contenu :

– Connaissances du Contenu et de l'enseignement du sujet (CC)
– Connaissances des Elèves et de l'apprentissage du sujet (CE)
– Connaissances des Programmes et des moyens d'enseignement (CP)[2]. (p. 403)

Les CMS sont des connaissances mathématiques dont ne disposent pas d'autres professionnels utilisant les mathématiques. C'est le cas par exemple quand il s'agit d'expliquer pourquoi « pour multiplier par 10, on ajoute un zéro », quand il faut analyser des erreurs d'élèves ou quand il faut décider si une procédure originale proposée par un élève est correcte. Une situation particulière nécessitant ces connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement est celle de l'enseignement de l'algorithme de la multiplication (Ball, Hill et Bass 2005, pp.17–21). Ces CMS se distinguent des CMC, mais aussi des connaissances pédagogiques du contenu :

> Knowing mathematics for teaching demands a kind of depth and detail that goes well beyond what is needed to carry out the algorithm reliably. […] Important to note is that each of these common tasks of teaching involves *mathematical* reasoning as much as it does pedagogical thinking[3]. (Op. cité, p.21)

2. La pertinence mathématique

Afin de distinguer les effets des connaissances mathématiques de l'enseignant, Bloch (2009) propose quant à elle de distinguer divers degrés de *pertinence mathématique des interventions du professeur* selon les trois critères suivants :

> C_1 : […] capacité à interagir avec les élèves sur des éléments mathématiques de la situation et à encourager l'activité des élèves par des interventions et des retours sur leur production mathématique
>
> C_2 : […] tolérance aux formulations provisoires et approximatives, aux expressions dans l'action, et la capacité à reconnaître les idées mathématiques qui sont incluses dans des ostensifs non canoniques
>
> C_3 : […] aptitude à conduire la situation à son terme avec une phase de débat et validation ; ceci inclut la capacité à sélectionner des formulations et à en laisser d'autres de côté, et à gérer la chronologie du débat sans le tuer par l'énoncé immédiat des meilleures productions ou du savoir visé. (Op. cité, p.33)

Ces trois critères permettent ainsi d'évaluer les connaissances de la matière de l'enseignant en fonction de la manière dont elles conduisent à mettre en place une organisation didactique.

---

[2] Ma traduction des termes de (Ball *et al.*, 2008).

[3] « Connaître des mathématiques en vue de les enseigner demande un type de profondeur et de détail qui va bien au delà de ce qui est nécessaire pour effectuer l'algorithme de manière fiable. […] Il est important de remarquer que chacune de ces tâches ordinaires d'enseignement implique un raisonnement *mathématique* autant qu'une pensée pédagogique ». L'italique est de Ball, la traduction est la mienne.

3. *La structuration du milieu*

En vue d'analyser ces connaissances et leurs effets, tant sur la mise en place d'organisations didactiques que sur les interactions en classe, nous avons utilisé le modèle de structuration du milieu. Ce modèle a été développé par Margolinas (1992) qui a enrichi la structuration de Brousseau (1986) pour analyser les activités usuelles du professeur et *démêler* des pratiques qui sont imbriquées.

M_{+3}: M-Construction		P_{+3}: P-Noosphérien	S_{+3}: Situation noosphérienne
M_{+2}: M-Projet		P_{+2}: P-Constructeur	S_{+2}: Sit. de construction
M_{+1}: M-Didactique	E_{+1}: E-Réflexif	P_{+1}: P-Projeteur	S_{+1}: Sit. de projet
M_0: M-Apprentissage	**E_0: Elève**	**P_0: Professeur**	**S_0: Situation didactique**
M_{-1}: M-Référence	E_{-1}: E-Apprenant	P_{-1}: P-Observateur	S_{-1}: Sit. d'apprentissage
M_{-2}: M-Objectif	E_{-2}: E-Agissant		S_{-2}: Sit. de référence
M_{-3}: M-Matériel	E_{-3}: E-Objectif		S_{-3}: Sit. objective

Tableau 1 *– Structuration du milieu (Margolinas, 2002, p. 145)*

Les niveaux d'activité du professeur et les situations ne sont pas réduits au temps de la leçon en classe, même si certaines phases d'une situation didactique sont partiellement caractérisées par des situations de niveaux différents. Elles ne sont pas non plus temporellement successives (Margolinas 1995, p. 96), et chaque niveau peut être considéré dans le présent de l'action, mais aussi dans le passé ou le futur. Par exemple, durant le travail en classe, le professeur peut travailler au niveau +1 en projetant une future leçon ou en se souvenant de son travail passé de préparation. De la même manière, il est en tension entre son ambition, qu'elle concerne la leçon (niveau +1), le thème (niveau +2) ou plus généralement l'enseignement (niveau +3) et ce qu'il pense que les élèves pourront répondre (niveau 0) ou la façon dont il souhaite les observer (niveau -1) (Margolinas 2004, p. 75).

4. *Questions de recherche*

Ces trois éléments de cadrage théorique nous permettent de poser plus précisément la question de l'influence des connaissances mathématiques des enseignants sur leur enseignement : quels effets les différents types de connaissances mathématiques pour l'enseignement des enseignants primaires ont-ils sur la pertinence mathématique de leurs interventions et sur l'organisation didactique de leurs cours de mathématiques à l'école primaire ?

III. CORPUS DE DONNEES ET METHODOLOGIE DE RECHERCHE

Afin de répondre à ces questions, nous avons choisi d'observer l'enseignement de l'algorithme de la multiplication. Il s'agit d'un sujet familier permettant particulièrement de mettre en évidence la distinction entre Connaissances Mathématiques Communes et Connaissances Mathématiques Spécifiques et offrant à l'enseignant des choix d'enseignement orientés plutôt vers l'application de procédures ou plutôt vers la compréhension de concepts mathématiques (Ball *et al.* 2005, pp.17–20, Meno 2003, p.1).

Nous avons observé toutes les leçons à propos de l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres chez quatre enseignants de 4ème primaire : Andrea, Camille, Dominique et Sacha. Le nombre de séances varie entre deux et neuf. Il s'agit d'une observation de type « naturaliste » (Comiti, Grenier et Margolinas 1995, pp.98–99), c'est-à-dire que nous ne sommes pas intervenus sur le choix des activités laissé au libre arbitre de chaque enseignant. Les observations ont été précédées et suivie d'un entretien semi-dirigé. Les leçons ont été filmées (caméra en fond de classe et micro cravate pour l'enseignant) et quelques passages significatifs du point de vue des connaissances mathématiques pour l'enseignement ont été mis en évidence. Les enregistrements des séquences et des entretiens ont été traités à l'aide du logiciel Transana (Fassnacht et Woods 2002–2011) afin de relever pour chaque extrait le niveau d'activité du professeur et, pour les passages où des connaissances mathématiques sont utilisées, leur type et leur pertinence. Les corrélations entre CME, niveaux d'activité et pertinence ont été mises en évidence. Ces extraits peuvent être situés dans la séquence grâce à la réalisation d'un *synopsis* (Schneuwly, Dolz et Ronveaux 2006) et d'une *macrostructure* (Dolz et Toulou 2008). Le moment d'explication de l'algorithme et les choix d'activités des quatre enseignants ont été comparés en fonction de leur connaissance mathématique de l'algorithme. Ce moment d'explication de l'algorithme, mais aussi les explications faisant suite à des difficultés d'élèves, ont été transcrits et analysés avec un grain plus fin.

IV. ANALYSE ET RESULTATS

L'ensemble des données recueillies a été analysé à trois échelles. Le niveau macro analyse l'ensemble des données (1). Un niveau intermédiaire examine le moment d'explication de l'algorithme (2 à 6) et le niveau micro permet l'analyse fine d'un épisode (voir Clivaz, A paraître).

1. Ensemble des données récoltées et combinaisons de catégories

Plus de 17 heures de séances et 11h30 d'entretiens ont été traitées. Environ 80% des données ont fait l'objet d'un découpage en près de 800 épisodes et ont été codées selon le niveau d'activité de l'enseignant, selon les catégories de Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement présentes et selon la pertinence mathématique des interventions de l'enseignant. Les parties non codées dans les entretiens correspondent aux moments de salutation ou de rappel des conditions de la recherche. Celles non codées des séances de classe sont des moments durant lesquels l'enseignant n'est pas dans une position didactique, mais dans une pure position de gestion de classe.

Les niveaux d'activité les plus présents dans les entretiens sont les niveaux P_{+2} et P_{+3}. Cette constatation correspond bien à la visée de l'entretien qui était de recueillir, avant et après la séquence, des éléments généraux sur celle-ci.

Pour les parties en classe, le niveau très nettement le plus présent est celui de la situation didactique P_{+0}. Les positions P_{+3} et P_{+2} sont très rarement observables, en revanche un certain nombre d'interventions de l'enseignant au niveau +1 du projet de leçon ont été observées. On peut encore noter que le niveau P_{-1} est assez peu présent. Ceci peut être noté à propos des entretiens durant lesquels les enseignants parlent peu de ce qu'ils vont ou ont observé ou de la manière dont ils vont ou ont effectué la dévolution du problème, mais aussi en classe où les moments durant lesquels l'enseignant observe ou dévolue sans proposer de connaissances sont relativement rares.

Les catégories de connaissances mathématiques ont été attribuées à la quasi totalité des clips déterminés en classe et en entretien. Seuls 7% des épisodes n'ont pas pu se voir déterminer une catégorie de connaissance mathématique. Il s'agit essentiellement de moments d'observation, de moments de gestion de classe avec interactions didactiques (lecture de consigne par exemple) ou de déclarations relativement générales durant les entretiens pour lesquels il n'était pas possible de déterminer, même en questionnant l'enseignant, quel type de connaissance ces déclarations mettaient en jeu. Selon les niveaux d'activités de l'enseignant, les types de connaissances mathématiques sont assez uniformément répartis. On note tout au plus que les Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement (CME) de type pédagogique sont plus présentes aux niveaux +3 et +2 alors que les Connaissances Mathématiques Communes (CMC) y sont rares. Les Connaissances Mathématiques Spécifiques (CMS) ne se distinguent en revanche pas des autres types de CME du point de vue de la fréquence de leur manifestation aux divers niveaux d'activité du professeur.

Une première analyse statistique permet de mettre en évidence des corrélations entre la présence des diverses catégories de CME et la pertinence des interventions de l'enseignant. En particulier une corrélation forte apparaît entre la présence dans un épisode d'une Connaissance Mathématique Spécifique correcte et la manifestation de la pertinence mathématique. Ce lien n'existe en revanche pas pour les autres types de CME. En particulier, d'un point de vue statistique, les Connaissances Mathématiques Communes correctes ne sont liées à une manifestation de pertinence que quand elles sont présentes conjointement à d'autres CME correctes ou, dans une moindre mesure, quand elles sont seules présentes. En revanche une Connaissance Mathématique Commune correcte présente en même temps qu'une autre CME erronée, particulièrement d'une Connaissance Mathématique Spécifique erronée, est liée le plus souvent à la non-pertinence mathématique des interventions de l'enseignant. Cela suggère que les Connaissances Mathématiques Communes ne génèrent de la pertinence mathématique que quand elles sont liées à d'autres CME.

2. *Le moment d'explication de l'algorithme*

Les quatre séquences observées comportent toutes un moment bien défini d'explication de l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres. Ce moment est délimité par le choix d'une multiplication à effectuer et par l'annonce de l'enseignant qu'il va montrer ou expliquer la multiplication en colonnes à deux chiffres. Il est caractérisé par une forme de cours dialogué dans lequel l'enseignant décrit les étapes de l'algorithme en posant au groupe classe des questions, et en faisant effectuer les étapes de calcul aux élèves. Il s'achève par le choix d'une nouvelle multiplication à effectuer. Chez les quatre enseignants, ce nouvel exemple ressemble très fortement au premier du point de vue du choix des nombres et il est effectué par un ou plusieurs élèves selon un mode proche de celui utilisé précédemment (tableau noir ou affiche).

Nous allons observer quatre aspects de ce moment d'explication chez les enseignants. La séparation en deux lignes puis l'addition et le lien avec la distributivité chez Camille (3) ; l'alignement, la gestion des retenues et le lien avec la numération décimale de position chez Sacha (4) ; le zéro de la seconde ligne chez Dominique (5) et enfin les représentations de la multiplication chez les quatre enseignants (6).

3. *La séparation en deux lignes puis l'addition : le lien avec la distributivité*

La présentation aux élèves de l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres comporte un « acte » durant lequel l'enseignant dit, montre ou explique qu'il faut *séparer le calcul en deux*, un moment où il *ramène chaque calcul à une multiplication à un chiffre*, et un moment où il *additionne les deux lignes*. Ces trois éléments découlent de la numération décimale de position et surtout de la distributivité de la multiplication sur l'addition.

Aux niveaux P_{+2} et P_{+1}, Camille a décidé de « montrer l'algorithme de la multiplication » par un nombre à deux chiffres de manière « expéditive », sans préparation particulière autre que la révision de l'algorithme à un chiffre. Effectivement, elle démarre directement en posant la multiplication de 2417 par 25. Elle cache immédiatement le 2 de 25 à l'aide d'un morceau de papier :

> Camille : Alors, attention les vélos, regardez bien ce que je vais faire. (Camille pose un cache sur le 2 du second terme). Je cache le 2. Et ce qui nous reste là, c'est ?
> Elève : 5
> Camille : Ouais, c'est une multiplication ?
> Elève : A un chiffre
> Camille : Par 5, comment?
> Elève : A un chiffre
> Camille : A un chiffre, comme vous venez de faire. Alors on va voir, normalement vous devez la maîtriser.

Camille ne donne aucune autre explication ou justification de la première ligne. Arrivée au bout de celle-ci, elle enlève le cache et demande aux élèves comment ils pensent que l'on va continuer : « Formulez des hypothèses. Si c'est pas les bonnes, c'est pas grave ». Ces deux interventions sont non-pertinentes car l'interaction n'est pas au plan mathématique (critère de pertinence C_1). Les effets de ce manque de pertinence mathématiques sont perceptibles dans les réponses des élèves qui se lancent dans un jeu de devinettes. Devant la diversité des réponses (pour la plupart incorrectes), Camille décrit la *règle du zéro* (voir 5). Elle effectue ensuite le calcul de la seconde ligne après avoir placé le cache sur le 5, toujours sans explication. L'addition finale est justifiée par le fait que « on n'a pas vraiment une réponse, là » et par le fait que plusieurs élèves avaient parlé d'une addition au moment des hypothèses à formuler. Là encore l'interaction est non-mathématique et donc, selon C_1, non-pertinente.

Un peu plus tard Camille donne un autre exemple, 583x35, et demande aux élèves d'expliquer chaque passage. Pour la première ligne, l'explication consiste à cacher le 3. Ce qui est à nouveau une intervention mathématiquement non pertinente. Puis, au moment de passer à la seconde ligne d'une multiplication, Camille demande aux élèves pourquoi il faut ajouter un zéro à la seconde ligne. Elle constate que les explications sont confuses et elle décompose le second terme et trace des flèches vers celui-ci (voir **Figure 1**), mais ce n'est pas pour justifier la séparation en deux lignes, mais bien pour dire qu'il s'agit de 30 et que c'est là la raison de l'ajout du zéro.

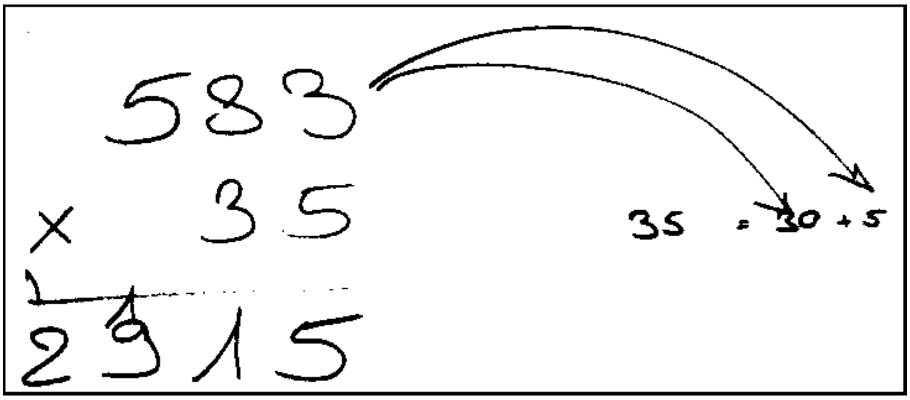


***Figure 1** – Camille, écriture de 35=30+5 et traçage des flèches avant le passage à la seconde ligne.*

Au moment de passer à l'addition, Camille justifie qu'il faut additionner, « parce que c'est pas fini, on n'a pas une réponse, on a deux étages » et que cela ressemble à un calcul donné en devoir. Elle écrit :

$$24 \times 3 = (20\times 3) + (4\times 3) = 60 + 12 = 72$$

***Figure 2** – Camille, explication du fait qu'il faut additionner les deux lignes de la multiplication 583x35.*

Camille ajoute ensuite que c'est la même chose et qu'il faut donc additionner.

La Connaissance Mathématique Commune de la distributivité est donc présente chez Camille. La Connaissance Mathématique Spécifique que constitue son lien avec l'algorithme de la multiplication est également disponible, mais l'utilisation de cette connaissance n'est pas pertinente pour au moins trois raisons. Tout d'abord la comparaison entre la multiplication 583x35 et 24x3 n'est pas utilisée à bon escient puisqu'il s'agit une fois de « distributivité à gauche » et l'autre fois de « distributivité à droite ». Ensuite cette explication ne vient qu'en appui d'une technique déjà présentée lors de la leçon précédente, un peu comme un truc pour s'en souvenir. Enfin et surtout, même si le lien est fait, il l'est par référence à un calcul déjà effectué et donc pour les élèves, cela se traduit plus par « il faut faire comme dans l'exercice untel » que comme « l'algorithme en colonne revient à effectuer la même décomposition des opérations que le calcul réfléchi ». Autrement dit, là encore, l'interaction n'est pas au niveau mathématique.

4. L'alignement et la gestion des retenues : le lien avec la numération décimale de position

Les quatre enseignants observés présentent à leurs élèves quatre gestions des retenues différentes. Ils gèrent également de façon différenciée l'alignement et verbalisent ou non le lien avec la numération de position.

Lors de l'explication de l'algorithme, Sacha ne dessine pas de colonnes. En revanche, tant durant cette explication que lors des autres algorithmes de multiplication effectués de façon publique, elle désigne la place des chiffres en parlant de « la colonne de unités », ou de la « colonne des dizaines »… Pour ce qui est des retenues, elle choisit, contrairement à ce qui est recommandé dans Cap Math[4], de les noter directement sur la multiplication (et donc dans les colonnes adéquates), en utilisant la même couleur que celle employée pour écrire la ligne correspondante. Ce faisant, elle résout le problème du mélange tout en conservant les sens de la retenue. Ainsi, même si elle n'est pas verbalisée, la CMS des liens entre numération décimale de position, alignement et retenue est manifestée et correcte. De plus, par l'utilisation des couleurs, par une notation et un vocabulaire rigoureux, les interventions de Sacha se situent au plan mathématique et sont donc mathématiquement pertinentes selon le critère C_1.

5. Le zéro de la seconde ligne

Avant la séquence, au niveau P_{+2}, les quatre enseignants estimaient que le zéro de la seconde ligne constituerait la principale difficulté dans l'enseignement de l'algorithme. Tous ont donc prévu pour la leçon concernée, au niveau P_{+1}, une manière de traiter cette difficulté et l'ont utilisée au niveau P_0. Par ailleurs, tous ont affirmé qu'ils souhaitaient que les élèves

[4] Sacha est la seule enseignante à ne pas utiliser les manuels officiels romands COROME (Danalet, Dumas, Studer et Villars-Kneubühler, 1999), mais Cap Math (Charnay, Combier, Dussuc, Madier et Madier, 2007). Ce dernier manuel demande de noter les retenues dans une « boîte à retenue » placée à côté de la multiplication et comportant une ligne d'en tête avec les lettre m, d, c et u et une ligne pour les retenues de chaque produit partiel.

comprennent ce zéro et tous ont appuyé leur explication sur la *règle du zéro* : « pour multiplier par 10, on ajoute un zéro ».

La raison donnée par Dominique pour placer le zéro de la seconde ligne est le fait qu'on travaille avec des dizaines, et que, lorsqu'on travaille avec des dizaines, on ajoute un zéro.

Dominique : C'est 1, ça?
Elève : 10
Dominique : C'est 10 ! Donc attention, quand on travaille avec les dizaines, qu'est-ce qu'on doit rajouter?
Elève : Un zéro.

Dominique s'appuie ici directement sur plusieurs rappels effectués, en particulier durant la leçon précédente, à propos de cette *règle du zéro*. Il avait à ce moment là dit sur plusieurs exemples, « quand on multiplie par 10, on ajoute un zéro ». La formulation devient ici « quand on travaille avec les dizaines ».

Cette formulation, dans ce contexte, est correcte du point de vue des CMC, pour autant qu'on ne la sorte pas de ce contexte et, en particulier, qu'on ne cherche pas à l'appliquer à d'autres moments dans l'algorithme. En effet, si on la prend au pied de la lettre, et c'est ce que font certains élèves, elle conduit à ajouter d'autres zéro à chaque fois que la multiplication concerne un chiffre des dizaines. En fait cette règle, dans le cadre de l'algorithme de la multiplication, est un raccourci de l'associativité de la multiplication et du caractère positionnel décimal du système de numération. Le problème est alors qu'un raccourci efficace, une connaissance encapsulée, ne permet pas une interaction mathématiquement pertinente. Autrement dit la CMS consistant à décortiquer une CMC n'est pas présente ici.

6. Les représentations de la multiplication

Comme illustré dans les exemples ci-dessus, les connaissances mathématiques spécifiques mises en évidence prennent fortement appui sur les ostensifs de la multiplication. Chez les quatre enseignants la représentation de la multiplication comme addition itérée est prédominante, voire unique. Cette constatation avait déjà été faite par Davis et Simmt au Canada (2006, p. 299) ou par Amato (2004, 2005) au Brésil . Dans le cas de Sacha où cette représentation est en accord avec le manuel Cap Math utilisé, et où celui-ci construit les connaissances des élèves sur des bases mathématiques que l'on peut considérer comme adéquates, cela ne pose pas problème. En revanche, quand cet ostensif ne correspond pas aux tâches proposées aux élèves, ou aux explications fournies par l'enseignant, les CMS de l'enseignant apparaissent comme déficientes. De fait, la capacité à varier les points de vues, registres ou cadres est souvent considérée comme la compétence d'un expert. Ce que dit Robert (2008, p. 34) à propos des élèves peut être étendu à l'enseignant : « Un des enjeux de l'apprentissage est d'accéder à une certaine diversité des "représentations" des objets étudiés […], ainsi qu'à une certaine organisation des concepts entre eux permettant d'en acquérir une certaine disponibilité […] ».

Ce point rejoint encore deux des tâches d'enseignement liée aux CMS par l'équipe de Ball : « Recognizing what is involved in using a particular representation ; linking representations to underlying ideas and to other representations »[5] (Ball *et al.* 2008, p.400). Cette CMS fait défaut à propos de la multiplication chez Dominique, Camille et Andrea. L'observation n'a pas permis de savoir si sa manifestation chez Sacha était liée ou non à l'utilisation de Cap Maths.

[5] Etre conscient des implications de l'utilisation d'une représentation particulière ; faire les liens entre une représentation et le concept, entre plusieurs représentations d'un concept. Ma traduction.

L'unique représentation de la multiplication comme addition itérée peut aussi être la cause d'erreurs relevant des CMC. C'est le cas pour Camille qui affirme aux élèves qu'une multiplication agrandit toujours le résultat, alors qu'une division le rend plus petit. Lors de l'entretien *post,* l'enregistrement vidéo de ce moment a été montré à Camille qui n'a remarqué aucun problème. Interrogée plus précisément, elle dit que c'est vrai, « jusqu'en fin de quatrième » et que ça n'est faux que « quand il y a des virgules ». Elle continue d'ailleurs de penser qu'il faut dire aux élèves que multiplier, c'est agrandir et qu'on leur expliquera un jour qu'il y a des cas où cela n'est pas vrai. Cette erreur peut être liée à une représentation purement additive de la multiplication. Cette hypothèse est confirmée par la réaction de Camille lors de l'entretien *post* lorsque la représentation de la multiplication comme aire d'un rectangle lui est présentée : « J'ai jamais fait le lien! J'y ai jamais pensé ». Pourtant, dans la suite de l'entretien, Camille se souvient avoir fait des exercices liant aire et multiplication (La chasse aux rectangles, (Danalet, Dumas, Studer et Villars-Kneubühler 1998, p. 164)), mais en modifiant la donnée de telle sorte que l'exercice serve uniquement à noter les tables de multiplication. Cette erreur sur « la multiplication qui agrandit et la division qui rend plus petit » et son lien avec les représentations additives de la multiplication et partitive de la division a d'ailleurs été relevée par Tirosh et Graeber chez 11% (pour la multiplication) et 52% (pour la division) d'une population de 136 futurs enseignants primaires étatsuniens (Tirosh et Graeber, 1989). La CMS des différentes représentations de la multiplication est donc absente chez Camille et c'est cette absence qui rend possible une erreur mathématique ayant trait aux CMC.

V. CONCLUSION

L'observation de l'enseignement de l'algorithme de la multiplication par un nombre à deux chiffres a permis, à un niveau global, de mettre en évidence une corrélation entre les Connaissances Mathématiques Spécifiques à l'enseignement (CMS) et la pertinence mathématique des intervention de l'enseignant . Elle a également permis de voir que cette corrélation n'est valable pour les Connaissances Mathématiques Communes (CMC) que si elles sont accompagnées d'autres Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement (CME), en particulier de CMS. Les analyses à des niveaux de plus en plus fins ont donné des réalisations des liens entre CMS, CMC et pertinence. Ces illustrations montrent que, selon les cas, une CMS peut être liée à des interventions mathématiques qui sont pertinentes ou non-pertinentes. Elles ont également permis d'exhiber des cas où une CMC correcte est liée à une CMS incorrecte. L'exemple d'une CMS absente occasionnant une erreur mathématique commune, alors même que la CMC était présente, a également permis d'affiner la distinction entre les catégories de connaissances. Pour chacune de ces illustrations, les effets sur les choix didactiques des enseignants sont marquants.

Ces résultats incitent tout d'abord à considérer les connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement de manière distincte des connaissances mathématiques communes d'une part et des CME de type pédagogique d'autre part. Mais, du point de vue de la formation, ils incitent surtout à travailler les liens entre ces connaissances afin de permettre une plus grande pertinence mathématique de l'enseignant généraliste.

Les questions que cette recherche nous a amené à nous poser sont plus nombreuses que les réponses apportées. Elles concernent en particulier le développement effectif ou possible des CME, que ce soit en formation initiale, en formation continue ou durant l'exercice de la profession. Elles interrogent également les effets des manuels et des autres ressources sur les CME nécessaires pour enseigner. Enfin la question des points communs et des différences entre enseignants spécialistes et généralistes quant aux CME devrait encore être discutée.

REFERENCES

Amato S. (2004) Improving student teachers mathematical knowledge. *Proceedings of the 10th International Congress on Mathematical Education*. Copenhagen. Consulté le 18 juillet 2011, http://www.icme-organisers.dk/taA/.

Amato S. (2005) *Improving student teachers' understanding of multiplication.* Texte présenté au Conference of the 15th ICMI Study on the Professional Education and Development of Teachers of Mathematics, Águas de Lindóia, Brésil. Consulté le 18 juillet 2011, http://stwww.weizmann.ac.il/G-math/ICMI/SolangeAmato_ICMI15.doc.

Ball D. L., Hill H. C., Bass H. (2005) Knowing mathematics for teaching, who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator* (Fall 2005), 14-22, 43-46. Consulté le 18 juillet 2011, http://deepblue.lib.umich.edu/bitstream/2027.42/65072/4/Ball_F05.pdf.

Ball D. L., Thames M. H., Phelps G. (2008) Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education 59*(5), 389-407. Consulté le 26 décembre 2011, http://jte.sagepub.com/cgi/content/abstract/59/5/389.

Bednarz N., Proulx J. (2009) Connaissance et utilisation des mathématiques dans l'enseignement: Clarifications conceptuelles et épistémologiques prenant leur source dans une analyse de la pratique des enseignants. *For the learning of mathematics, 29*(3), 11-17. Consulté le 18 juillet 2011, http://flm.educ.ualberta.ca/BednarzProulx.pdf.

Bloch I. (2009) Les interactions mathématiques entre professeurs et élèves. Comment travailler leur pertinence en formation? *Petit x 81*, 25-52.

Brousseau G. (1986) La relation didactique: le milieu. In *Actes de la 4e école d'été de didactique des mathématiques* IREM de Paris 7.

Charnay R., Combier G., Dussuc M.-P., Madier D., Madier P. (2007) *Cap Maths CE2, Guide de l'enseignant, manuel de l'élève et matériel photocopiable*. Paris: Hatier.

Clivaz S. (2011) *Des mathématiques pour enseigner, analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire.* Thèse de doctorat. Université de Genève. Genève. Consulté le 26 décembre 2011, http://archive-ouverte.unige.ch/unige:17047.

Clivaz S. (A paraître) Connaissances mathématiques de l'enseignant et bifurcations didactiques : analyse d'un épisode. *Recherches en didactique.*

Comiti C., Grenier D., Margolinas C. (1995) Niveaux de connaissances en jeu lors d'interactions en situation de classe et modélisation de phénomènes didactiques. Dans G. Arsac, J. Gréa, D. Grenier, A. Tiberghien (Eds.) *Différents types de savoirs et leur articulation* (pp. 91-127). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Danalet C., Dumas J.-P., Studer C., Villars-Kneubühler F. (1998) *Mathématiques 3ème année: Livre du maître, livre de l'élève et fichier de l'élève*. Neuchâtel: COROME.

Danalet C., Dumas J.-P., Studer C., Villars-Kneubühler F. (1999) *Mathématiques 4ème année: Livre du maître, livre de l'élève et fichier de l'élève*. Neuchâtel: COROME.

Davis B., Simmt E. (2006) Mathematics-for-Teaching: an ongoing investigation of the Mathematics that teachers (need to) know. *Educational Studies in Mathematics 61*(3), 293-319. Consulté le 18 juillet 2011, http://dx.doi.org/10.1007/s10649-006-2372-4.

Dolz J., Toulou S. (2008) De la macrostructure de la séquence d'enseignement du texte d'opinion à l'analyse des interactions didactiques. *Travail et formation en éducation*, (1). Consulté le 18 juillet 2011, http://tfe.revues.org/index596.html.

Fassnacht C., Woods D. K. (2002-2011) Transana (Version 2.42) [Mac]. Madison: University of Wisconsin. Consulté le 18 juillet 2011, http://www.transana.org/.

Hill H. C., Rowan B., Ball D. L. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journa, 42*(2), 371-406.

Margolinas C. (1992) Eléments pour l'analyse du rôle du maître: les phases de conclusion. *Recherches en Didactique des Mathématiques 12*(1), 113–158. Consulté le 24 janvier 2011, http://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00458309/fr/.

Margolinas C. (1995) La structuration du milieu et ses apports dans l'analyse a posteriori des situations. In Margolinas C. (Ed.) *Les débats de didactique des mathématiques : actes du Séminaire national 1993-1994*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Margolinas C. (2002) Situations, milieux, connaissances: Analyse de l'activité du professeur. In Dorier J.-L., Artaud M., Artigue M., Berthelot R., Floris R. (Eds.) (pp.141-155) *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage. Consulté le 18 juillet 2011, http://hal.archives-ouvertes.fr/index.php?halsid=m2hj19vrm34e7osqkidopu67k7etview_this_doc=halshs-00421848etversion=1.

Margolinas C. (2004) *Points de vue de l'élève et du professeur. Essai de développement de la théorie des situations didactiques.* HDR. Université de Provence - Aix-Marseille I. Consulté le 18 juillet 2011, http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00429580/en/.

Menon R. (2003). Exploring preservice teachers' understanding of two-digit multiplication. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*. Consulté le 18 juillet 2011, http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/ramakrishnanmenon.pdf.

Robert A. (2008) Sur les aprentissages des élèves: une problématique inscrite dans les théories de l'activité et du développement In Vandebrouck F. (Ed.) (pp.33-43) *La classe de mathématiques: activités des élèves et pratiques des enseignants*. Toulouse: Octarès.

Schneuwly B., Dolz J., Ronveaux C. (2006) Le synopsis: un outil pour analyser les objets enseignés. In Perrin-Glorian M.-J., Reuter Y. (Eds.) (pp.175-89) *Les méthodes de recherche en didactiques: actes du premier séminaire international sur les méthodes de recherches en didactiques de juin 2005*. Villeneuve d'Ascq: Presses univ. du Septentrion.

Tirosh D. et Graeber A. O. (1989) Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division. *Educational Studies in Mathematics 20*(1), 79-96. Consulté le 18 juillet 2011, http://dx.doi.org/10.1007/BF00356042.

UN COURS DE SAVOIRS DISCIPLINAIRES EN MATHEMATIQUES EN FORMATION DES MAITRES PRIMAIRES

Michel DERUAZ* – Stéphane CLIVAZ*

Résumé – Dans le cadre de la formation initiale des maîtres primaires vaudois, un cours de savoirs disciplinaires en mathématiques est proposé à un grand nombre d'étudiants. La mise en place de ce cours, tant du point de vue des contenus que de celui de l'organisation des exercices et de celle des examens a conduit à l'utilisation d'une plateforme d'enseignement à distance et à la mise en place d'un examen standardisé à l'aide de questions à choix multiples. Ces solutions sont décrites et soumises à une première analyse critique.

Mots-clefs : savoirs mathématiques, formation des enseignants primaires, évaluation des connaissances, algorithmes, théorie des ensembles

Abstract – As part of primary school teachers' initial training in the canton of Vaud, a course on mathematical knowledge is given to a large number of students. Because of content and organizational (exercises and examination) issues, the implementation of this course led to the use of an e-learning platform and to the elaboration of a standardized test composed of multiple-choice items. These solutions are described and submitted to a first critical analysis.

Keywords: mathematical knowledge, primary teacher training, knowledge's evaluation, algorithms, set theory

I. INTRODUCTION

1. *La formation des maîtres de l'enseignement primaire dans le canton de Vaud*

Dans le canton de Vaud, comme dans la majorité des cantons suisses, la formation des enseignants est confiée à une Haute Ecole Pédagogique (HEP). Pour l'enseignement secondaire, les HEP proposent des formations professionnelles à des titulaires d'un Bachelor ou d'un Master universitaires alors que, pour l'enseignement primaire, les futurs enseignants préparent un Bachelor en trois ans et doivent être titulaires d'une maturité fédérale (baccalauréat) ou d'un titre jugé équivalent pour être admis dans cette formation.

Jusque dans les années 2000, la formation des maîtres primaires était assurée par des écoles normales qui proposaient une formation de type secondaire. Les étudiants étaient regroupés en classes d'une vingtaine d'élèves. Ils suivaient des cours de mathématiques, donnés par des anciens instituteurs ou par des enseignants issus de l'école secondaire, dans lesquels les savoirs disciplinaires s'entremêlaient avec les contenus méthodologiques des moyens d'enseignement imposés par l'institution scolaire. Petit à petit, des contenus de didactique ont été introduits dans ces cours de mathématiques ainsi que dans des cours de didactique générale. La formation des maîtres secondaires ainsi que la recherche étaient confiées à d'autres institutions. Chaque canton avait ses propres établissements de formation et les titres délivrés par un canton, n'étaient pas reconnus par les autres cantons.

A l'heure de la mobilité et des reconnaissances des diplômes au niveau européen, une telle situation n'était plus tenable et la Conférence suisse des Directeurs cantonaux de l'Instruction Publique (CDIP) a décidé de promouvoir la création des Hautes Ecoles Pédagogiques, institutions de niveau tertiaire, responsables de la formation de tous les enseignants ainsi que de la recherche et du développement dans le domaine scolaire. Des critères ont été posés pour

* Haute Ecole Pédagogique du canton de Vaud – Suisse – michel.deruaz@hepl.ch, stephane.clivaz@hepl.ch

que la reconnaissance des titres se fasse au niveau suisse et européen en étant compatible avec les accords de Bologne.

2. L'historique de ce cours de savoirs disciplinaires en mathématiques ?

La Haute Ecole Pédagogique du canton de Vaud (HEP Vaud) a été ouverte en 2001 à Lausanne. La volonté politique de l'époque était de mettre en réseau cette nouvelle école avec l'Université de Lausanne (UNIL) et l'Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL) pour profiter du rayonnement et de l'expertise académique de ces deux institutions[1]. C'est dans ce contexte que des cours de savoirs disciplinaires dans la formation des futurs maîtres primaires ont été décidés. Pour les mathématiques, l'EPFL a été chargée de donner, dans ses locaux et avec sa propre organisation, un cours de mathématiques. Ce type d'enseignement était nouveau tant pour les professeurs universitaires de l'EPFL qui ne connaissaient pas les enjeux de la formation des maîtres primaires que pour les étudiants qui, le plus souvent, venaient de filières littéraires de l'école secondaire et ne voyaient pas les liens entre les contenus proposés par l'EPFL et les mathématiques qu'ils allaient enseigner plus tard. Les étudiants suivaient, en parallèle, des séminaires de didactique des mathématiques à la HEP Vaud. Au gré des diverses réorganisations des plans d'études de la HEP Vaud et des nouveaux accords avec l'UNIL et l'EPFL, la plupart des cours de savoirs disciplinaires ont été rapatriés à la HEP Vaud, souvent en étant intégrés dans des cours de didactiques. En 2010, l'EPFL a décidé de renoncer à donner le cours de mathématiques et l'Unité d'Enseignement et de Recherche en didactique des Mathématiques et des Sciences de la nature (UER MS) a reçu de la direction de la HEP Vaud le mandat de donner ce cours dès la rentrée de l'année académique 2010-2011.

3. Une première question

Une première question s'est immédiatement posée au sein de l'UER MS : Faut-il maintenir un cours de savoirs disciplinaires en mathématiques ou faut-il intégrer ces savoirs dans les cours de didactique, comme cela se faisait à l'école normale ou comme cela se pratique dans d'autres HEP ?

Une réorganisation de la formation des maîtres primaires annoncée pour la rentrée académique 2012 a incité les formateurs concernés à ne pas modifier pour le moment la répartition entre cours et séminaires. D'autre part, certaines recherches actuellement menées par l'UER MS se font sur le thème des liens entre les connaissances mathématiques des enseignants et leur enseignement (voir par exemple Clivaz 2011). Il a été décidé de tenter de mettre en relation ces recherches avec ce cours de savoirs disciplinaires. Une équipe a ainsi été créée autour du formateur, et premier auteur de cet article, pour construire ce nouveau cours et pour analyser les résultats obtenus dans le but de les intégrer dans la conception du nouveau plan d'études et dans les recherches de l'UER MS.

4. Quelques mots sur ces recherches

Un des objectifs essentiels de ce cours est, pour ses concepteurs, de permettre aux étudiants de percevoir l’impact des savoirs mathématiques appris durant le cours pour leur enseignement futur. Cet objectif, indissociable de l’apprentissage de ces savoirs, s’appuie sur la veine des recherches développées à la suite de l’impulsion de Shulman (1986), en particulier par Ball et son équipe (voir par exemple Ball, Thames et Phelps 2008). La

[1] Historiquement, l'UNIL, puis dans une moindre mesure l'EPFL, avaient le monopole de la formation académique des maîtres de l'école secondaire dans le canton de Vaud.

connaissance pédagogique du contenu (en anglais *Pedagogical Content Knowledge*, PCK) est bien, pour Shulman, d'abord une connaissance du contenu :

> Je parle encore de connaissance du contenu ici, mais de cette forme particulière de connaissance du contenu qui intègre les aspects du contenu les plus liés à son enseignabilité[2]. (Shulman 1986/ 2007, p. 9)

L'adaptation et la catégorisation de ce PCK ont permis à Ball et ses collègues de définir et de catégoriser des *Connaissances Mathématiques pour l'Enseignement* (figure 1).

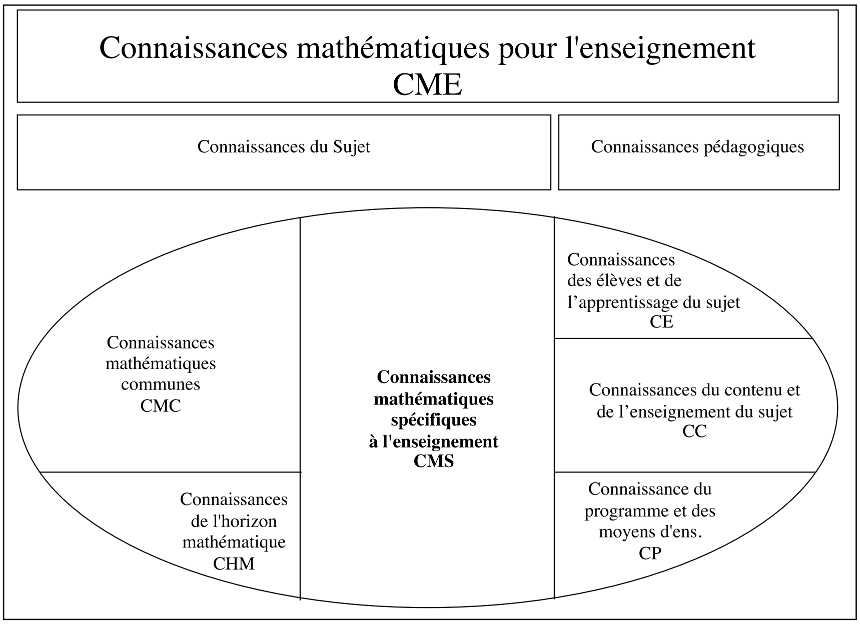


Figure 1 *– Connaissances mathématiques pour l'enseignement (Ball et al. 2008, p. 403)*[3]

La figure 1 a été présentée aux étudiants au début du cours en indiquant que le contenu du cours portait bien sur des connaissances mathématiques *pour l'enseignement*, et plus précisément sur les connaissances considérées comme influençant l'enseignement et l'apprentissage des élèves, les connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement.

5. Quelques autres interrogations apparues pendant la conception du cours

Le cours donné par l'EPFL durait un semestre à raison de 1h30 par semaine. Une séance sur trois était consacrée à des exercices sous la responsabilité d'assistants qui s'occupaient chacun d'une vingtaine d'étudiants. Un examen écrit, corrigé par ces assistants, permettait de certifier ce cours. La réussite était obligatoire pour poursuivre sa formation à la HEP Vaud. Au niveau des contenus mathématiques, L'EPFL avait jugé opportun de travailler essentiellement les méthodes de démonstration appliquées à des résultats élémentaires de théorie des nombres comme la congruence.

L'UER MS n'a pas la possibilité d'engager des assistants et n'a pas le personnel permettant d'animer simultanément huit à dix séances d'exercices. Par ailleurs, le nombre d'étudiants qui suivent ce cours ne cesse d'augmenter, il y avait environ 120 étudiants lors des premières volées et 270 étudiants sont annoncés pour le cours de l'automne 2012 sans que les moyens mis à la disposition de la HEP Vaud et de l'UER MS ne soient augmentés pour autant.

[2] « I still speak of content knowledge here, but of the particular form of content knowledge that embodies the aspects of content most germane to its teachability » (Shulman 1986, p. 9).

[3] Notre traduction des termes de la figure : Mathematical Knowledge for Teaching / Subject Matter Knowledge / Pedagogical Content Knowledge / Common Content Knowledge / Horizon Knowledge / Specialized Content Knowledge / Knowledge of Content and Teaching / Knowledge of Content and Students / Knowledge of Content and Curriculum.

D'autre part, les locaux de l'EPFL sont conçus pour l'enseignement des mathématiques en grands effectifs. Ils sont en particulier pourvus de grandes surfaces de tableaux noirs qui n'existent pas dans les locaux de la HEP.

A la fin de chaque semestre, les étudiants de la HEP doivent remplir des questionnaires pour mesurer la qualité et la pertinence de l'enseignement. Leurs réponses ont permis de relever que la quasi-totalité des étudiants concernés n'ont pas réussi à mettre en évidence des liens entre le cours de l'EPFL et ceux de didactique des mathématiques ou avec leur métier.

Un certain nombre de questions se sont donc posées à l'UER MS :

- Quelles sont les mathématiques utiles aux enseignants de l'école primaire ?
- Peut-on enseigner ces mathématiques dans un cours en grand effectif à ce type d'étudiants ?
- Les infrastructures mises à disposition par la HEP permettent-elles de donner un cours de mathématiques ?
- Comment donner un cours de mathématiques à 200 étudiants sans séances d'exercices en groupes restreints ?
- Comment organiser la certification de ce cours sans une équipe d'assistant ou de formateurs pour corriger les copies ?

Les sections qui suivent nous permettront de décrire quelques-unes des pistes que nous avons explorées lors du premier semestre de l'année 2010-2011 pour essayer de répondre à ces questions. Lors de ce semestre, 163 étudiants étaient inscrits et 154 se sont présentés à la première session d'examens.

II. LE COURS

Notre objectif étant de proposer des outils qui permettent aux futurs enseignants primaires de voir avec un peu de relief les notions qu'ils seront amenés à introduire dans leurs classes, nous avons délibérément choisi de partir des mathématiques de l'école primaire pour proposer à nos étudiants des contenus qui leur offre la possibilité de faire par eux-mêmes des liens, en particulier lors d'analyses *a priori* de tâches mathématiques, entre les mathématiques travaillées dans ce cours et les cours de didactique.

Le programme des quatre premières années de l'école primaire (élèves de 6 à 10 ans) est découpé en six chapitres : *la logique et le raisonnement, le nombre et la numération, les opérations et leurs propriétés mathématiques, les outils de calcul, l'espace et la géométrie, la mesure et le mesurage* (Danalet, Dumas, Studer et Villars-Kneubühler, 1998,1999 ; Ging E., Sauthier M.-H. et Stierli E, 1996, 1997). Nous avons décidé de traiter les quatre premiers chapitres pendant le cours. La géométrie et la mesure n'ont été abordées que par des exemples liés à ces quatre chapitres. En particulier les quadrilatères ont été utilisés pour illustrer les propriétés d'inclusion des ensembles et des exemples de mesurage pour décrire les propriétés de certaines opérations.

Nous observons aussi depuis plusieurs années que nos étudiants ont complètement échappé, dans leur cursus scolaire, aux mathématiques modernes et au vocabulaire spécifique (propriétés des opérations) alors que cette terminologie est beaucoup utilisée dans les livres du maître des manuels officiels romands COROME (Danalet, Dumas, Studer et Villars-Kneubühler, 1998, 1999 ; Ging E., Sauthier M.-H. et Stierli E, 1996, 1997). Il nous a donc paru important d'introduire ce vocabulaire dans le cours.

Afin d'illustrer à la fois les modalités du cours et les sujets abordés, deux exemples sont décrits dans ce qui suit.

1. *Une théorie des ensembles à visages humains*

Ce chapitre est le premier qui a été traité. Outre les contenus, il doit permettre au formateur de mettre en place les contrats didactiques et pédagogiques pour l'entier du semestre. Il doit aussi convaincre les étudiants que ce cours est intéressant et que la réussite de l'examen ne dépend nullement d'éventuels mauvais résultats en mathématiques à l'école secondaire.

Il a donc été décidé de travailler avec l'ensemble des étudiants du cours comme *univers* et de définir les ensembles A, B et C, comme étant l'ensemble des étudiants qui ont au moins un "a", respectivement un "b" et un "c", dans leur nom ou leur prénom. Cela a permis au formateur de remplir des diagrammes de Venn ou de Carroll animés à partir du trombinoscope des étudiants comme dans la figure 2:

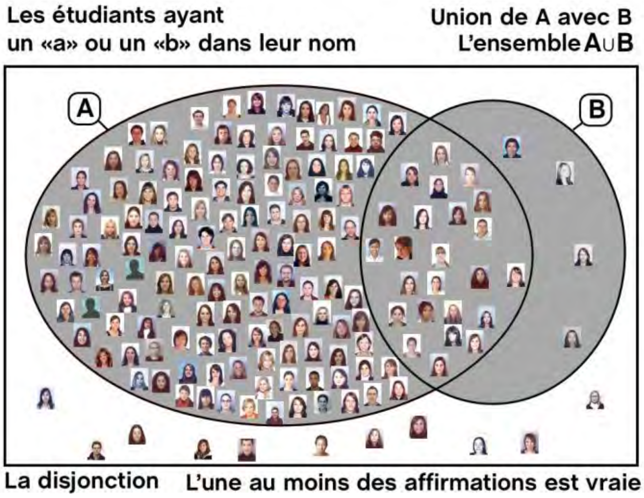


Figure 2–*La disjonction*

En ayant préalablement demandé aux étudiants de venir au cours muni d'un couvre-chef, le travail dans cet *univers*, a permis d'utiliser les étudiants présents au cours pour illustrer quelques démonstrations. Par exemple, pour démontrer que la réunion de deux ensembles est distributive par rapport à l'intersection, les consignes ci-dessous ont été données :

Celles et ceux qui ont un "a" dans leur nom se lèvent.
Celles et ceux qui ont un "b" et un "c" dans leur nom se lèvent.
Celles et ceux qui sont debout mettent un chapeau.
Celles et ceux qui sont debout s'asseyent mais gardent leur chapeau.
Celles et ceux qui ont un "a" ou un "b" dans leur nom se lèvent.
Celles et ceux qui sont debout et qui ont un "a" ou un "c" dans leur nom lèvent la main.
Celles et ceux qui sont debout la main levée sont-ils celles et ceux qui ont un chapeau ?

Les diagrammes de Venn correspondant à chaque étape étaient projetés à l'écran. Ces animations étaient ensuite mises à disposition des étudiants en format papier et en format vidéo pour palier à l'impossibilité de prendre des notes tout en étant acteur dans la construction de la démonstration.

En plus de l'animation, bienvenue lors d'un cours en grand effectif, cette mise en scène était motivée par la constatation de la difficulté éprouvée par les étudiants à se représenter ce qu'est un ensemble[4]. L'utilisation d'un ensemble et de sous-ensembles concrets, tout en utilisant les notations générales habituelles, a permis de faire le lien entre l'ensemble concret des étudiants du cours et l'ensemble général A des éléments qui respectent la propriété "A".

[4] Contrairement à la précédente, la génération actuelle de futurs enseignants n'a pas été baignée dans les mathématiques modernes à l'école primaire.

On fait l'hypothèse que ce point de vue permet aux étudiants de faire le passage du cas particulier au cas général à leur propre rythme. C'est peut-être aussi un moyen de tenir un discours qui permet aux étudiants de le comprendre chacun à son niveau de conceptualisation. Ces hypothèses devront être vérifiées par la suite.

2. Des algorithmes animés

Comme nous l'avons déjà précisé plus haut, l'enseignement des algorithmes fait partie des programmes de l'école primaire. Il est donc naturel pour nous de consacrer une partie de ce cours à l'explication de la numération décimale et des algorithmes classiques en insistant sur les liens entre les propriétés des opérations et les justifications de ces algorithmes.

Pour cela, après avoir consacré plusieurs séances à décrire et comparer les systèmes de numération proposés par quelques grandes civilisations, nous avons rappelé le fonctionnement de notre numération décimale en le comparant avec d'autres bases. Cela nous a ensuite permis d'illustrer l'algorithme d'addition, par exemple en base six, à l'aide d'animations comme dans la figure 3, ou celui de la multiplication, par exemple en base cinq, comme dans la figure 4.

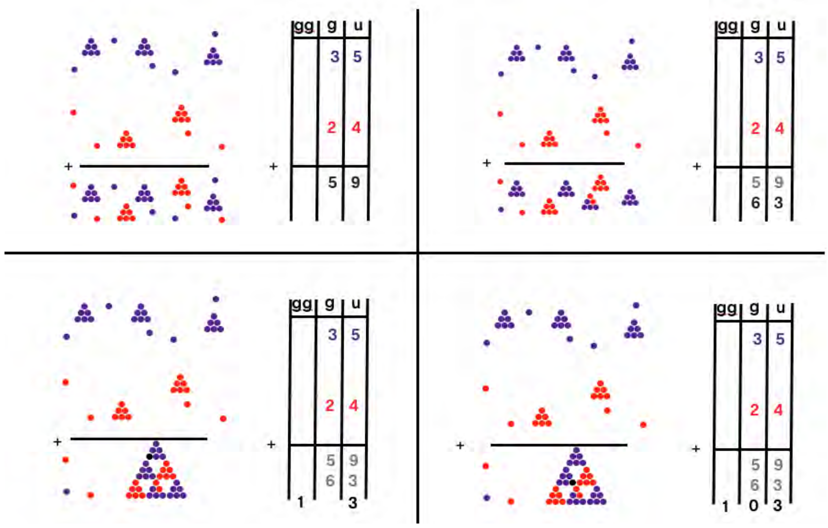


***Figure 3**–addition en base six*

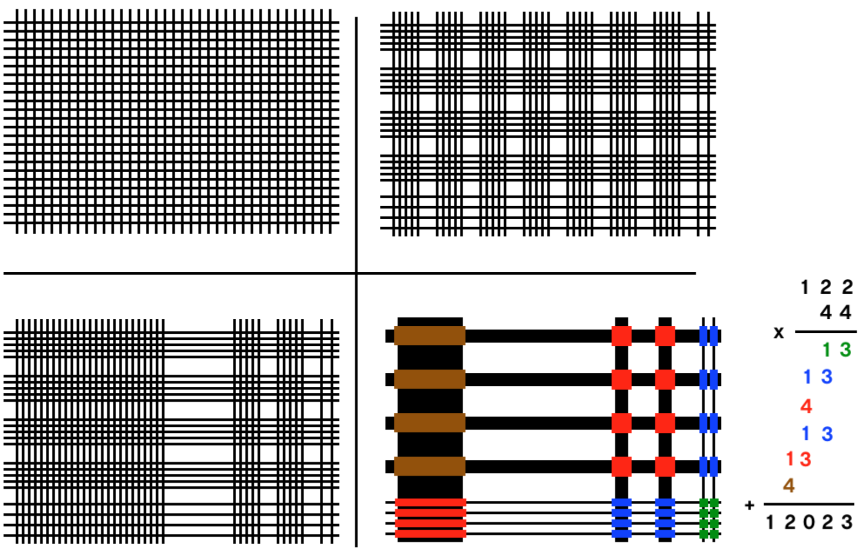


***Figure 4**–multiplication en base cinq*

Lors d'observations faites en classe dans le cadre de sa thèse, Clivaz (2011) a pu constater que les enseignants ne font pas le lien entre le produit cartésien et l'algorithme de la multiplication et ont ainsi des difficultés à répondre aux questions de leurs élèves. Là aussi, nous faisons l'hypothèse, encore à vérifier, que le découpage proposé de l'algorithme de la multiplication à partir du produit cartésien permet aux étudiants de faire un pas de côté et de changer de point de vue. Cette représentation pourrait leur permettre de voir cet algorithme comme une conséquence des propriétés de la multiplication et non plus uniquement comme une *recette* efficace.

III. DES SEANCES D'EXERCICES VIRTUELLES

Depuis plusieurs années, la HEP Vaud met à la disposition des formateurs qui en font la demande une plateforme d'enseignement à distance (*Moodle*). Nous avons décidé d'essayer de palier à l'absence d'assistants pour animer des séances d'exercices en proposant des exercices en ligne. Plusieurs modalités ont été testées.

Des exercices complètement en ligne sous forme de *questions à choix multiples* (QCM), de *questions ouvertes à réponses courtes* (QROC), de *glisser-déposer* pour reconstituer des paires et d'un *wiki* permettant aux étudiants de proposer des réponses et de se positionner par rapport aux réponses des autres étudiants. Lors d'une évaluation qualité du module, réalisée la dernière semaine du cours 2010 (avant les examens), 87% des étudiants ont répondu qu'ils ont appris des choses grâce aux exercices en ligne. Quatre tests ont été proposés pendant le semestre pour 1158 passations.

Des exercices *sur feuilles* distribués pendant le cours et avec réponses disponibles sur *Moodle* ont aussi été donnés. Pour une partie de ces exercices nous proposions, soit spontanément, soit à la demande des étudiants, des corrections sous forme de vidéos réalisées à l'aide d'un logiciel d'enregistrement d'écran et d'une tablette graphique. 33 vidéos ont été mises à la disposition des étudiants : 14 comportaient des corrections d'exercices et les autres étaient composées d'exemples pour illustrer le cours ou d'extraits du cours. Il y a eu plus de 4000 consultations de ces vidéos et 85% des étudiants ont répondu qu'ils ont, selon la formulation du questionnaire qualité, appris des choses en visionnant les corrigés vidéo.

Un forum est également à la disposition des étudiants, pour poser des questions, mais aussi pour y répondre. 84 discussions ont été ouvertes pour 186 interventions et plus de 3800 consultations. Il n'y a pas de questions spécifiques sur le forum dans le questionnaire d'évaluation proposé aux étudiants. La quantité importante de données mise à disposition par *Moodle* peut en elle-même faire l'objet de recherches approfondies. Une première lecture permet déjà de relever que les étudiants qui sont intervenus sur ce forum sont les étudiants qui ont obtenu les meilleurs résultats à l'examen. Cela ne signifie pas que leur participation au forum est la cause de ces résultats, ni que ces étudiants sont conscients d'être de «bons étudiants». Une étude plus approfondie sera nécessaire pour voir dans quelle mesure la participation au forum a permis à des étudiants de s'améliorer ou d'augmenter leur confiance. La discussion ci-dessous nous semble bien refléter ce que nous avons pu observer sur ce forum :

Arlette (11h11) : Bonjour tout le monde, pour pouvoir nous entraîner sur le sujet des nombres rationnels, Alice et moi avons inventé des exemples. Mais nous aimerions vous inviter à les faire aussi et à nous partager vos réponses, afin de les comparer.
Ecrire les nombres ci-dessous en base dix
a) 2,51 en base six Notre réponse: 103/36 en base dix ou 2,86111111...
b)12,444444... en base cinq Notre réponse: 8 en base dix
Qu'en pensez-vous? Et vous Monsieur Deruaz ?
Merci d'avance de votre collaboration.

Nicole (11h34) : Je trouve la même chose pour le a). Par contre pour le b) j'obtiens 11/2 ou 5,5 en base 10...
Albertine (11h59) : Moi j'obtiens tout comme vous (8,861111[5] et 8) mais je ne suis pas sûre d'être une référence.
Nicole (12h26) : Comment un nombre à virgules en base 5 pourrait donner un nombre entier en base 10???? Si on le fait dans l'autre sens, 8 en base 10 donne 13 en base 5...
Janet (12h30) : Je trouve la même chose que vous.
Nicole (12h33) : Comment avez-vous obtenu 8 alors ????
Albertine (12h35) : Alors là c'est une bonne question...
Albertine (12h39) : Avec les formules A= 12, 444, 10 x A= 124,4
10 x A =124,4
1x A =12,4 ici faudrait faire moins
= 112 / 4 on est en base 5=> 112= 32 en base 10
32/4 = 8[6].
Janet (12h38) : C'est aussi ce que j'ai fait!
Nicole (12h46) : C'est moi qui me suis trompée... J'ai utilisé la bonne méthode mais je me suis trompé de base!!!! ^^ Donc oui j'obtiens bien 8!!!!!
Arlette (13h50) : Merci beaucoup pour vos réponse ! On vient de les voir...
Merci Albertine pour l'explication, c'est exactement ce qu'on a fait Alors Nicole, j'espère que ça t'a aidé!
On a toutes les mêmes réponses du coup, donc ce devrait être juste.. Est-ce que M. Deruaz nous confirme cela?....
En tout cas, bonne chance pour demain !
Léa (17h00) : J'vais passer pour une bobette mais quand tu fais 124.4444-12.4444 = 112, tu fais quoi après?
Parce que j'comprends pas ce que tu as écrit la: "= 112 / 4 on est en base 5=> 112= 32 en base 10
32/4 = 8". Merci de m'éclairer.
Léa (17h14) : Pas besoin, j'ai trouvé. Je me suis un peu mélangé les pinceaux !
M. Deruaz (17h42) : Désolé de vous avoir fait attendre mais j'étais en séance jusqu'à maintenant.
Le 103/36 est juste.
Pour le 12,444444... en base cinq, cela donne bien 8 en base dix et vos calculs sont ok.
L'explication du nombre à virgule qui devient un nombre entier est liée au fait qu'en base cinq, 12,444444....=13 comme en base dix, 6.9999....=7 ou plus simplement 0,99999....=1 (1/3=0,333333.... (1/3)*3=1 et 0,33333...*3=0,9999...)
Arlette (21h12) : Merci d'avoir pris du temps pour nous répondre et à demain!

On peut noter que Albertine et Léa introduisent dans leur première intervention une remarque pour préciser qu'elles ne sont pas sûres d'elles, alors que ces deux étudiantes ont obtenus de très bons résultats lors de l'examen qui a eu lieu le lendemain matin (respectivement les 14ème et 44ème résultats sur 154 étudiants qui se sont présentés à l'examen). On peut aussi relever que Léa répond elle-même à sa question quelques minutes après l'avoir posée. Une intervention plus prompte du formateur, soit sur le forum, soit pendant une séance classique d'exercices ne lui aurait peut-être pas permis de prendre conscience qu'elle peut elle-même répondre à sa question. Les interventions de Nicole nous semblent également intéressantes (elle a obtenu le 2ème résultat lors de l'examen). Elle a manifestement commis une erreur pour la question b), par contre sa remarque lors de sa seconde intervention pour remettre en cause la réponse correcte proposée par les autres, bien que judicieuse, n'a pas suscité de véritables réactions. Les interventions qui suivent la sienne se contentent d'expliquer le calcul réalisé en essayant de reproduire les exemples travaillés précédemment mais n'entrent pas dans la démarche critique proposée par Nicole. Une intervention judicieuse d'un modérateur du forum aurait peut-être permis aux autres intervenants de répondre à Nicole.

---

[5] Probable faute de frappe d'Albertine. Il faut lire 2,861111.
[6] Il est possible que les restrictions du moyen de communication (difficulté à écrire des maths dans le forum) aient incité Albertine à modifier son intervention.

IV. L'EXAMEN

La question de l'examen est assez rapidement apparue comme essentielle. Les forces à la disposition de l'UER MS ne permettaient pas de corriger de manière satisfaisante plus de 150 copies d'un examen écrit traditionnel dans les délais impartis. Nous n'avions en particulier pas la possibilité de faire corriger chaque épreuve par plusieurs correcteurs pour limiter les effets des biais liés à la correction. Pour y arriver, nous aurions dû nous contenter d'un nombre restreint de questions et n'aurions ainsi pas pu évaluer une partie importante de la matière traitée pendant le cours. Nous avons donc opté pour la réalisation d'un examen standardisé en utilisant des Questionnaires à Choix Multiples (QCM).

Pour pallier à une partie des faiblesses liées à l'utilisation des QCM classiques comme les réponses au hasard ou les biais introduits par des questions mal formulées, nous avons eu l'opportunité d'utiliser le Système Méthodologique d'Aide à la Réalisation de Tests (SMART) (Gilles 2010, pp. 57-98) par l'intermédiaire de la plateforme *Exams* (http://psyef-smart13.fapse.ulg.ac.be/examsweb/).

Dans la plateforme *Exams*, pour créer des questions, il faut préalablement construire une table de spécification qui croise les sujets qui feront l'objet de l'évaluation avec une taxonomie. Nous avons utilisé la taxonomie proposée par Bodin (2010).

L'un des reproches souvent faits aux QCM est la difficulté d'évaluer des niveaux taxonomiques élevés. Ce cours de savoirs disciplinaires fait partie d'un module qui comporte aussi des séminaires de didactique des mathématiques qui sont eux évalués par un examen écrit et les deux examens doivent être réussis pour que le module soit validé. Nous avions donc la possibilité d'évaluer la capacité à synthétiser ou à créer lors de cet autre examen. Par ailleurs l'équipe de l'Université de Liège propose l'introduction dans les QCM de Solutions Générales Implicites (SGI) et de Degrés de Certitude (DC). Ces améliorations, proposées entre autres à la suite de Leclercq (1993) et de Gilles (voir par exemple Gilles 2010, pp. 99-112) permettent de palier partiellement à ces faiblesses.

Pour cette première expérience, nous n'avons utilisé qu'un seul type de SGI, *aucune des solutions proposées n'est correcte*. Les trois autres SGI proposées (Leclercq 1993) nous sont apparues comme trop complexes à introduire dans un si bref délai ou peu appropriées aux mathématiques.

« Ce n'est pas ce que nous ignorons qui nous cause des problèmes, mais ce que nous savons … et qui est faux. Reconnaître (…) ses degrés d'incompétence est une habileté fondamentale, une compétence cruciale pour tout apprenant. » (Gilles 2010, p. 101). A la suite des travaux de Gilles, nous estimons qu'il est important voir même essentiel pour un enseignant d'être capable d'estimer son degré de certitude par rapport à une affirmation qu'il peut être amené à faire, en particulier lorsqu'il répond à un élève ou lorsqu'il se positionne par rapport à une proposition d'un élève. *L'ignorance ignorée* est ainsi particulièrement dangereuse. Les DC permettent de tenir compte dans le barème de la certitude avec laquelle l'étudiant a choisi sa réponse parmi les solutions proposées. Nous avons donc utilisé les DC avec l'échelle donnée dans le tableau 1.

Si vous considérez que votre réponse a une probabilité d'être correcte comprise entre	DC N°	Vous obtiendrez les points suivants en cas de réponse	
		correcte	incorrecte
0 % et 25 %	0	+13	+4
25 % et 50 %	1	+16	+3
50 % et 70 %	2	+17	+2
70 % et 85 %	3	+18	+0
85 % et 95 %	4	+19	-6
95 % et 100 %	5	+20	-20

***Tableau 1** – Echelle DC classiques (Gilles 2010, p. 69)*

Le tableau 1 a été présenté lors de la troisième semaine du cours en même temps que les autres modalités de l'examen. Les étudiants ont ensuite eu la possibilité de se familiariser avec ce barème lors d'un examen blanc proposé en ligne quelques semaines avant la fin du cours. L'entraînement des étudiants à l'examen est d'ailleurs l'une des huit étapes du SMART (Gilles 2010, p. 33).

Une autre étape importante du SMART est l'analyse des résultats du test ; globalement en utilisant, par exemple, l'*alpha de Cronbach* mais aussi par question en utilisant des indicateurs comme le coefficient de corrélation bisériale de point classique (rpbis) (voir par exemple Gilles 2010, pp. 171-177). Ceux-ci permettent « de mesurer le pouvoir séparateur d'une question, c'est à dire la capacité à distinguer les étudiants qui réussissent la question des étudiants qui échouent » (Gilles 2010, p. 171). En d'autres termes, ce coefficient permet de déterminer si les étudiants qui ont choisi une solution donnée sont les étudiants qui ont obtenu un bon résultat sur l'ensemble du test. Cela permet éventuellement d'accepter comme correcte une réponse initialement prévue comme un distracteur ou d'annuler une question si ses résultats et une analyse *a posteriori* de cette question et des réponses proposées laissent supposer qu'il y a une ambigüité.

Le tableau 2 montre les résultats obtenus pour la question 20 de l'examen :

	Pas de réponse	Sol 1	Sol 2	Sol 3	**Sol 4**	Sol 5	Aucune
Nombre d'étudiants qui ont choisi cette solution	1 (0,65%)	5 (3,25%)	25 (16,23%)	29 (18,83%)	**38 (24,68%)**	6 (3,9%)	50 (32,47%)
RpBis	-0,45	-0,43	-0,58	-0,58	**0,55**	-0,52	-0,61

***Tableau 2** – Les RpBis de la question 20 de l'examen*

La solution correcte à cette question est la solution 4. Sans les rpbis, le fait qu'un nombre plus élevé d'étudiants aient choisi la SGI *aucune* peut remettre en question la pertinence des solutions proposées mais le rpbis de 0,55 pour la solution 4, largement supérieur au seuil de 0,18 pertinent pour un test de 32 questions ($1/\sqrt{n}$) (Gilles 2010, p. 176) et des rpbis négatifs pour toutes les autres solutions montrent que la majorité des bons étudiants sur l'ensemble de l'examen a répondu correctement à cette question. Elle peut donc être considérée comme pertinente.

La question 7, analysée dans le tableau 3 est nettement moins satisfaisante :

	Pas de réponse	Sol 1	Sol 2	**Sol 3**	Sol 4	Sol 5	Aucune
Nombre d'étudiants qui ont choisi cette solution	0	15 (9,74%)	16 (10,39%)	**54 (35,06%)**	65 (42,21%)	0	4 (2,6%)
RpBis		0,05	-0,18	**0,11**	-0,11		0,07

Tableau 3 *– Les RpBis de la question 7 de l'examen*

La réponse attendue est la solution 3. Comme pour la question 20 (tableau 2), une autre solution (solution 4) a été choisie par un nombre plus élevé d'étudiants. Par contre, dans le cas de cette question 7 (tableau 3), le rpbis de la solution attendue est inférieur au seuil de 0,18 et deux autres solutions (solution 1 et SGI *aucune*) obtiennent des rpbis positifs. Une relecture *a posteriori* de la question et des solutions proposées a montré qu'il y avait une ambigüité possible et cette question a fait l'objet d'un traitement spécifique dans le barème définitif de l'examen.

La plateforme *Exams* propose aussi des résultats individualisés aux étudiants à l'aide de tableaux et de graphiques qui donnent des résultats par chapitre ou par niveau taxonomique et qui analysent la pertinence de l'utilisation des DC. Pour cette première expérience, nous n'avons pas utilisé ces possibilités car nous n'étions pas convaincus de savoir les exploiter correctement. Faute de temps pour les implémenter, nous n'avons pas fourni aux étudiants des feedback en ligne expliquant, après l'examen, pourquoi leur choix, question par question, sont bons ou non. Idéalement, des feedback doivent apparaître, au moins pour les tests formatifs, lors d'une prochaine occurrence de ce cours.

V. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

Les aléas du calendrier font que cette contribution a été rédigée immédiatement après la première occurrence de ce cours sans que les auteurs n'aient pu exploiter l'ensemble des données récoltées, tant par la plateforme *Moodle* pour le cours et les exercices, que par la plateforme *Exams* pour les examens. Lors de l'évaluation du cours, à la fin de celui-ci, 60% des étudiants interrogés ont répondu qu'ils avaient trouvé ce cours utile à la pratique d'enseignant. Ce résultat est encourageant mais doit pouvoir être amélioré en mettant encore plus en évidence les liens entre certaines parties du cours et des exercices tirés des manuels officiels utilisés sur le terrain par les enseignants (Danalet, Dumas, Studer et Villars-Kneubühler 1998, 1999; Ging E., Sauthier M.-H. et Stierli E. 1996, 1997). Au niveau de l'utilisation des plateformes *Moodle* et *Exams* pendant le semestre, des pré-tests avant le début de chaque chapitre ainsi que des tests formatifs à la fin de ceux-ci doivent à l'avenir permettre aux étudiants et aux enseignants de mieux mesurer l'impact du cours sur les apprentissages des étudiants, tant au niveau de la réponse que du pourcentage de certitude associé à chaque réponse. On pourra ainsi mesurer un progrès en constatant que les pourcentages de réponses correctes augmentent, ou que les degrés de certitude affectés à des réponses correctes augmentent, ou encore que ceux affectés à des réponses incorrectes diminuent.

Nous allons aussi essayer de comparer les résultats obtenus à une question, en particulier le pourcentage de certitude moyen utilisé par les étudiants avec ceux d'une analyse *a priori* de la question. Pour cela, nous avons l'intention de travailler avec des analyses de tâches en testant l'hypothèse d'un lien entre le nombre d'adaptations de connaissances (Robert 2008, pp. 48-50) et le pourcentage de certitude moyen utilisé par les étudiants. Notre but est de mettre en place une typologie des exercices similaire à celle proposée par Vandebrouck et Cazes (2005).

Plus généralement, nous allons construire progressivement une base de données de questions à choix multiples dans le but de mesurer les connaissances mathématiques des enseignants en utilisant les DC. Base de données que nous pourrons utiliser comme outil de mesure dans de futurs projets de recherche.

REFERENCES

Ball D. L., Thames M. H., Phelps G. (2008) Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. Consulté le 18 juillet 2011, http://jte.sagepub.com/cgi/content/abstract/59/5/389.

Bodin A. (2010) *Proposition de nouvelle taxonomie pour les énoncés de mathématiques Classement par niveaux hiérarchisés de complexité cognitive*. Consulté le 18 juillet 2011, http://ebookbrowse.com/taxonomie-a-bodin-pdf-d99333161.

Clivaz S. (2011) *Des mathématiques pour enseigner, analyse de l'influence des connaissances mathématiques d'enseignants vaudois sur leur enseignement des mathématiques à l'école primaire.* Thèse de doctorat. Université de Genève. Consulté le 27 septembre 2011, http://archive-ouverte.unige.ch/unige:17047.

Gilles J.-L. (2010) *Qualité spectrale des tests standardisés universitaires*. Sarrebruck: Editions universitaires européennes.

Leclercq D. (1993) Validity, Reliability and Acuity of Self-Assessment in Educational Testing. In Leclercq D., Bruno J. (Eds) (pp. 113-131). *Item Banking: Interactive Testing and Self-Assessment* NATO ASI Series. Heidelberg: Springer Verlag.

Robert A. (2008) Une méthodologie pour analyse les activités (possibles) des élèves en classe. In Vandebrouck F. (Ed.) (pp. 45-57). *La classe de mathématiques : activités des élèves et pratiques des enseignants.* Toulouse: Octarès.

Shulman L. S. (1986) Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher* 15(2), 4-14. Consulté le 18 juillet 2011, http://edr.sagepub.com/cgi/reprint/15/2/4.

Shulman L. S. (2007) Ceux qui comprennent. Le développement de la connaissance dans l'enseignement (G. Sensevy et C. Amade-Escot, trad.). *Éducation et didactique*, 1(1), 97-114. (Original publié 1986). Consulté le 18 juillet 2011, http://educationdidactique.revues.org/121.

Vandebrouck F., Cazes C. (2005) *Analyse de fichiers de traces d'étudiants : aspects didactiques*. Consulté le 18 juillet 2011, http://sticef.univ-lemans.fr/num/vol2005/vandebrouck-06/sticef_2005_vandebrouck_06p.pdf.

MANUELS SCOLAIRES

Danalet C., Dumas J.-P., Studer C., Villars-Kneubühler F. (1998) *Mathématiques 3ème année: Livre du maître, livre de l'élève et fichier de l'élève*. Neuchâtel: COROME.

Danalet C., Dumas J.-P., Studer C., Villars-Kneubühler F. (1999) *Mathématiques 4ème année: Livre du maître, livre de l'élève et fichier de l'élève*. Neuchâtel: COROME.

Ging E., Sauthier M.-H., Stierli E. (1996) *Mathématiques* 1ère *année: Livre du maître, livre de l'élève et fichier de l'élève*. Neuchâtel: COROME.

Ging E., Sauthier M.-H., Stierli E. (1997) *Mathématiques* 2ème *année: Livre du maître, livre de l'élève et fichier de l'élève*. Neuchâtel: COROME.

INTÉGRER LES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES ET DIDACTIQUES : LE CAS DE LA FORMATION EN ENSEIGNEMENT AU PRÉSCOLAIRE ET AU PRIMAIRE DE L'UNIVERSITÉ DE SHERBROOKE

Marie-Pier MORIN* – Laurent THEIS* – Julien ROSA-FRANCOEUR*

Résumé – Il est reconnu que les futurs enseignants du primaire présentent des difficultés importantes dans la maîtrise des connaissances mathématiques qu'ils auront à enseigner aux élèves (Adihou et Arsenault 2012; Adihou, Arsenault et Marchand 2006; Arsenault et Voyer 2003; Morin 2008; Morin et Theis 2006). À l'Université de Sherbrooke, étant donné que la formation mathématique est intégrée à la formation didactique, nous devons amener nos étudiants à surmonter leurs difficultés conceptuelles en mathématiques dans le cadre de nos cours de didactique. Cette communication présente trois activités de formation élaborées à partir de la théorisation des connaissances mobilisées dans l'enseignement des mathématiques (Bednarz et Proulx 2009).

Mots-clefs : Didactique des mathématiques, futurs enseignants, difficultés en mathématiques, imbrication des connaissances mathématiques et didactique, activités d'apprentissage

Abstract – It is known that preservice teachers have difficulty understanding the mathematical concepts that they will need to teach their students (Adihou & Arsenault 2012; Adihou, Arsenault & Marchand 2006; Arsenault & Voyer 2003; Morin 2008; Morin & Theis 2006). At Université de Sherbrooke, because mathematical principles are integrated in didactic courses, we must encourage our students to surmount their conceptual difficulties in mathematics in our didactic classes. This document presents three educational activities based on the theorization of knowledge mobilized in mathematical teaching (Bednarz & Proulx 2009).

Keywords: Didactics, preservice teachers, mathematical difficulties, interconnection between mathematical and didactic knowledge, learning activities

I. INTRODUCTION

Les cours de didactique des mathématiques dans le cadre de la formation des futurs enseignants du préscolaire et du primaire de l'Université de Sherbrooke font ressortir de nombreuses difficultés sur le plan disciplinaire, lesquelles doivent être abordées à l'intérieur des cours de didactique.

II. DIFFICULTES DES FUTURS ENSEIGNANTS DANS L'APPRENTISSAGE DE LA DIDACTIQUE DES MATHEMATIQUES

Dans le cadre d'une communication précédente (Morin et Theis 2006), nous avions fait ressortir que les futurs enseignants présentent des difficultés importantes en mathématiques. Nous nous étions alors appuyés sur les résultats à un test de mathématiques de niveau 6e année du primaire que nous avions fait passer aux futurs enseignants à leur entrée au baccalauréat (N=204). La moyenne obtenue était alors de 51,69 %, avec un écart-type de 16,4 %. En 2010, nous avons fait passer ce même test aux futurs enseignants qui arrivaient en formation. Rappelons que ce test est composé de 22 questions, réparties en cinq classes : connaissances, sens, propriétés des nombres, opérations et raisonnement. Les résultats à cette nouvelle passation sont encore plus alarmants. En effet, la moyenne est de 46 %, avec un écart-type de 17 %. La note la plus élevée est de 86 % alors que la moins élevée est de 11 %.

* Université de Sherbrooke – Canada – Marie-Pier.Morin@USherbrooke.ca – Laurent.Theis@USherbrooke.ca – Julien.Rosa-Francoeur@USherbrooke.ca

Ces résultats montrent que les étudiants ont des bagages de connaissances mathématiques très différents les uns des autres lorsqu'ils arrivent en formation des maîtres. Pour certains de ces étudiants, la dernière fois qu'ils ont fait des mathématiques remonte à la quatrième année du secondaire (15 ans) alors que d'autres ont fait des mathématiques tout au long de leur formation collégiale. Nous pourrions croire que les mathématiques faites à ce niveau n'ont pas d'incidence sur les mathématiques de la formation des enseignants, mais les résultats montrent le contraire. En effet, les étudiants qui n'ont pas eu de cours de mathématiques au collégial et pour qui, conséquemment, le dernier cours de mathématiques remonte au secondaire ont obtenu une moyenne de 35 %. À l'opposé, les étudiants qui ont fait des mathématiques au collégial ont obtenu une moyenne de 62 %. Nous faisons ainsi l'hypothèse que, même si ce ne sont pas les mêmes mathématiques que celles faites au primaire, il reste que les étudiants qui ont fait des mathématiques au collégial ont continué leur activité mathématique, ce qui fait qu'ils ont mieux performé à ce test.

Quoi qu'il en soit, dans nos cours de didactique des mathématiques, nous devons composer avec ces étudiants qui ont des niveaux de connaissances très variés en mathématiques. Même si nous offrons des cliniques d'aide ayant principalement pour but d'aider les étudiants à comprendre les erreurs commises dans le test mathématique, ces cliniques d'une durée de deux heures sont trop brèves et ne peuvent agir sur les conceptions erronées des futurs enseignants[1]. Ce travail est plutôt à réaliser dans le cadre des cours de didactique des mathématiques dans lesquels la formation mathématique est intégrée. Dans un texte portant sur les connaissances mathématiques et didactiques des futurs maîtres du primaire, Morin (2008) pose qu'un des aspects fondamentaux de la formation didactique serait d'amener les étudiants à intégrer leurs connaissances mathématiques et didactiques en enseignement. Dans le cadre de notre enseignement à la formation des maîtres, les nombreuses difficultés de nos étudiants sur le plan mathématique font en sorte que nous nous questionnons constamment à savoir comment intégrer ces connaissances mathématiques et didactiques en enseignement.

Ailleurs au Québec, Adihou et Arsenault (2012), Adihou, Arsenault et Marchand (2006) de même qu'Arsenault et Voyer (2003) ont également observé une maîtrise inadéquate des connaissances mathématiques chez les futurs maîtres du primaire. Depuis 2004, ce groupe d'auteurs fait passer un examen de culture et de compétences en mathématiques portant sur des notions du primaire et du premier cycle du secondaire à tous les étudiants de leur université inscrits à la formation des maîtres. En 2010, les résultats montrent que seulement 25 % des étudiants ont atteint le seuil de passage, fixé à 75 %. Malgré ces résultats, il est tout de même encourageant de constater que cette évaluation permet une prise de conscience chez les futurs enseignants du travail à réaliser pour avoir une bonne maîtrise des contenus qu'ils auront à enseigner. En effet, les mesures d'aide et les dispositifs de formation mis en place par l'Université du Québec à Rimouski ont permis à 93,3 % des 163 étudiants inscrits au baccalauréat en 2004 de réussir cette épreuve avant la fin de leur formation. Notons cependant que, pour certains, six passations ont été nécessaires.

D'autres auteurs ont également constaté des lacunes chez les futurs enseignants au regard de leur compréhension des concepts mathématiques (Matthews et Seaman 2007; Pickreign 2007; Stacey, Helme, Steinle, Baturo, Irwin et Bana 2001). Par exemple, Pickreign (2007), qui a étudié la compréhension des propriétés géométriques des parallélogrammes chez 40 futurs enseignants, a constaté que seulement neuf d'entre eux sont arrivés à articuler une

[1] Dans Morin et Theis (2006), nous avions exposé le fait que, dans un premier temps, nous avons offert un dispositif d'aide plus complet à nos étudiants. Toutefois, étant donné que les étudiants qui présentent des difficultés en mathématiques présentent aussi des difficultés en français et qu'une sanction est rattachée à cette dernière discipline, ils la privilégient au détriment des mathématiques. Nous avons ainsi opté pour des cliniques d'aide plus courtes, qui s'insèrent mieux dans l'horaire chargé des étudiants.

définition adéquate de ce qu'est un rectangle, tandis qu'un seul est parvenu à le faire dans le cas d'un losange. Des difficultés à raisonner à l'aide de concepts et de processus en géométrie ont également été observées par Adihou et Arsenault (2012) chez les futurs enseignants qu'ils ont évalués.

III. CONNAISSANCES MATHEMATIQUES NECESSAIRES POUR ENSEIGNER LES MATHEMATIQUES

Ball, Thames et Phelps (2008) et Hill et Ball (2009) distinguent différents types de connaissances mathématiques. Dans le modèle développé par ces auteurs, les connaissances mathématiques sont regroupées en deux catégories principales : les connaissances du contenu (*subject matter knowledge*) et les connaissances didactiques (*pedagogical content knowledge*).

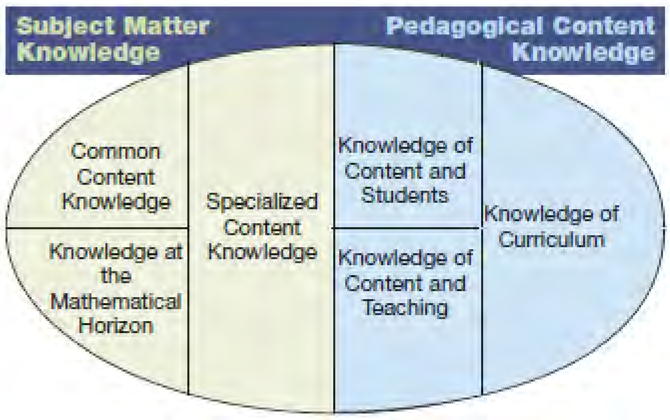


Figure 1 *– Les types de connaissances mathématiques, selon Hill et Ball (2009, p.70)*

Dans la première catégorie se retrouvent trois types de connaissances. La première concerne les connaissances générales du contenu (*common content knowledge*). Cette catégorie est définie comme les connaissances et habiletés mathématiques utilisées dans d'autres domaines que l'enseignement. Elles font référence à la résolution correcte d'un problème et sont nécessaires parce que l'enseignant doit être en mesure de réaliser les tâches qu'il demande à ses élèves. Les connaissances mathématiques spécifiques à l'enseignement *(specialized content knowledge)* constituent une deuxième catégorie et font référence aux connaissances qui sont spécifiques à l'enseignant et qui ne se retrouvent pas dans le travail du mathématicien. Elles interviennent par exemple lorsqu'un enseignant doit déterminer si une stratégie de résolution inhabituelle proposée par un élève est valide ou non ou lorsque l'enseignant essaie de retrouver des régularités dans les erreurs d'un élève. Finalement, un troisième type de connaissances dans cette catégorie implique une connaissance de l'horizon mathématique (*horizon content knowledge*), qui demande à l'enseignant de connecter les mathématiques enseignées à un niveau précis aux mathématiques enseignées à d'autres moments.

Dans les connaissances didactiques, on retrouve d'abord les connaissances sur le contenu en lien avec les élèves (*knowledge of content and students*). Ces connaissances interviennent par exemple pour anticiper les raisonnements des élèves ou le degré de difficulté d'une tâche qui leur est proposée. Les enseignants doivent également être en mesure de reconnaître et d'interpréter les raisonnements émergents des élèves. Pour accomplir ces tâches, les enseignants doivent alors faire interagir leur compréhension mathématique avec leur connaissance des élèves et les raisonnements mathématiques de ces derniers. Ensuite, les connaissances sur le contenu en lien avec l'enseignement (*knowledge of content and teaching*) se situent à l'intersection entre les mathématiques et l'enseignement. Ces connaissances sont nécessaires par exemple lors de la planification du déroulement d'une séquence d'enseignement, du choix des exemples utilisés pour enseigner un concept donné et de l'évaluation des avantages et inconvénients d'une représentation donnée d'un concept. Finalement, les connaissances des programmes constituent une dernière catégorie des connaissances didactiques[2].

Ce cadre nous semble intéressant parce qu'il tient compte de toutes les dimensions de l'enseignement et peut donc nous donner des indications quant aux connaissances mathématiques nécessaires pour l'enseignement. Or, dans notre travail de formateurs d'enseignants, nous concevons que ces composantes sont davantage imbriquées les unes aux autres. C'est pourquoi nous avons aussi choisi de présenter le travail de Bednarz et Proulx (2009) qui, partant du mouvement de recherche sur les connaissances mathématiques pour l'enseignement qui prend sa source dans les travaux de D. Ball et de H. Bass, ont proposé une théorisation de ce que sont les connaissances mobilisées dans l'enseignement des mathématiques. Cette théorisation a été réalisée à partir de recherches collaboratives conduites auprès d'enseignants qui leur ont permis de « mieux comprendre les connaissances [que les enseignants] mettent à contribution dans l'élaboration et la réalisation de situations d'enseignement/apprentissage en mathématiques » (Op. cité, p.1). De même, une réflexion portant sur les interventions réalisées dans le cadre de la formation des futurs enseignants du secondaire de l'Université du Québec à Montréal depuis 1970 est également à la base de cette théorisation.

À travers des exemples tirés de la pratique d'un enseignant du secondaire, Bednarz et Proulx (2009) font ressortir quatre dimensions imbriquées qui sont à la base du travail de l'enseignant de mathématiques :

> une dimension institutionnelle (en référence au programme), une dimension didactique (dans l'analyse de l'activité et de son intérêt, de ce qu'elle force chez les élèves, de ce qu'elle va chercher), une dimension mathématique (à travers les raisonnements et propriétés clés qu'elle travaille, les registres de représentation), une dimension pédagogique (dans la visée « apprendre à fonctionner », à coopérer avec les autres, à travailler ensemble). (Op. cité, p. 2)

Ces dimensions sont à la base des connaissances mathématiques que mobilise l'enseignant dans le cadre de sa pratique : les connaissances institutionnelles, les connaissances didactiques, les connaissances mathématiques et les connaissances pédagogiques. Ces connaissances, toutes imbriquées les unes aux autres, forment le bagage dans lequel l'enseignant puise pour préparer ses interventions, soutenir son action et analyser les diverses situations auxquelles il est confronté. En rappelant le caractère situé des connaissances mathématiques mobilisées par l'enseignant, Bednarz et Proulx (2009) mettent de l'avant que, pour eux, ces connaissances sont toujours ancrées dans un contexte, « dans une situation d'enseignement/apprentissage des mathématiques donnée, en lien avec les tâches effectives de l'enseignant » (Op. cité, p. 6). C'est précisément ce dont nous essayons de nous rapprocher lorsque nous préparons nos futurs enseignants à enseigner les mathématiques aux élèves. En effet, faute de pouvoir amener les élèves à l'université, nous tentons dans nos approches de nous rapprocher le plus possible des tâches effectives de l'enseignant. Aussi, nous adoptons cette façon de faire parce qu'il arrive souvent qu'il y ait un décalage au plan des contenus

[2] Dans Ball et al. (2008), cette catégorie de connaissances est la seule à ne pas être définie de manière explicite. Les auteurs se réfèrent cependant, dans la première partie de l'article, à Shulman (1986) qui considère que cette catégorie de connaissances est "représentée par les programmes construits pour l'enseignement d'un sujet particulier à un moment donné, à la variété des matériels didactiques disponibles en relation avec ces programmes et les caractéristiques qui servent d'indicateurs et de contre-indicateurs pour l'utilisation de certain matériels reliés au programmes dans des circonstances particulières". (p. 391, traduction libre)

entre ce qui est vu en classe et ce qui est fait en stage. Ce décalage est présent malgré le fait que les stages de formation soient pensés en fonction d'une approche-programme, dans laquelle les cours et les stages d'une même année réfèrent tous aux mêmes niveaux scolaires. Par exemple, en 2e année de formation, tous les cours réfèrent au préscolaire et au 1er cycle du primaire et les stages sont également réalisés au préscolaire ou au 1er cycle du primaire. Ce faisant, il y a plus de chance que ce qui est vu en classe s'applique aux élèves de stage. Pour ainsi pallier au fait qu'il peut y avoir un décalage entre les contenus vus en classe et ceux vus en stage, nous tentons en quelque sorte d'amener le milieu scolaire dans nos cours de didactique afin que les étudiants travaillent avec des travaux de « vrais » élèves.

Dans le cadre de cette communication, nous présenterons trois tâches développées dans nos cours de didactique des mathématiques, lesquelles ont pour but d'articuler les formations mathématique et didactique. Dans la présentation de ces tâches, nous ferons ressortir de quelle façon nous essayons d'enraciner ces tâches dans la pratique de l'enseignant. D'autre part, nous argumenterons de quelle façon nous tentons d'arrimer ces tâches aux dimensions qui sont à la base des connaissances mathématiques que mobilise l'enseignant dans le cadre de sa pratique (institutionnelles, didactiques, mathématiques et pédagogiques).

Nous mettrons d'abord de l'avant une activité dans laquelle nous abordons l'évaluation en mathématiques. Nous verrons ensuite une activité que nous présentons aux étudiants dans le but de leur exposer la démarche de résolution de situation-problème. Enfin, nous présenterons une dernière activité dans laquelle les étudiants sont invités à se positionner sur la compréhension d'élèves lors de la résolution d'un problème mathématique.

IV. SITUATION 1 :ÉVALUATION

Dans le but d'ancrer les cours de didactique dans la pratique, lorsque nous donnons un cours, nous associons le groupe d'étudiants[3] à la classe d'un enseignant du primaire. Pour l'exercice, nous prendrons l'exemple de l'automne 2010 où nous avons donné un cours de didactique de l'arithmétique qui portait sur des notions abordées aux 2e et 3e cycles du primaire. Nous nous sommes alors associés à un enseignant qui avait une classe d'élèves de 4e année (9−10 ans) et de 6e année (11−12 ans), des élèves de chacun de ces niveaux formant le groupe. Voulant mieux connaître le niveau des élèves de sa nouvelle classe concernant la maîtrise de l'algorithme de multiplication, l'enseignant a demandé aux étudiants de bâtir une évaluation qui lui permettrait d'avoir un portrait juste de sa classe. Cette tâche semblait bien facile pour ces étudiants, qui pensaient ne devoir faire qu'un simple test de multiplications. Toutefois, des questions, tant de notre part que de la part des étudiants, sont rapidement apparues. Comment réaliser ce test ? Sur quelles bases ? Quel est le niveau des élèves ? Tant de questions auxquelles ils ont dû trouver des informations pertinentes pour y répondre.

Au plan mathématique, nous avons amené les étudiants à faire l'analyse conceptuelle de l'algorithme de multiplication en revisitant le sens de la multiplication, la relation avec la numération positionnelle, le nombre de chiffres au multiplicateur, la retenue et le rôle du zéro dans l'algorithme. Cette analyse a amené les étudiants à re-conceptualiser leurs connaissances par rapport à l'algorithme de la multiplication. En effet, à l'instar de Proulx (2010), qui a remarqué que les futurs enseignants du secondaire ont souvent à la fois une « compréhension compressée » des mathématiques ainsi qu'une « compréhension instrumentale » des mathématiques, nous pensons que les futurs enseignants du primaire peuvent avoir une compréhension instrumentale des mathématiques. Une telle compréhension implique que le futur enseignant maîtrise surtout le « comment faire », sans comprendre le « pourquoi le faire

[3] Généralement formé de 40 à 45 étudiants.

ainsi ». Lorsque de tels cas se présentent, Proulx (2010) plaide en faveur d'une re-conceptualisation des mathématiques, travail qui est certainement aussi pertinent pour les enseignants du primaire que pour ceux du secondaire. Différence notable, cependant, le point de départ diffère largement. Si les enseignants au secondaire peuvent s'appuyer sur une formation solide en mathématiques, la re-conceptualisation revêt souvent également le caractère de reconstruction de savoirs mathématiques de base pour les futurs enseignants du primaire.

Sur le plan didactique, cette analyse a permis aux étudiants d'anticiper les difficultés pouvant survenir dans la résolution d'une multiplication et de confronter ces erreurs à celles vues dans la littérature. Ensuite, les étudiants ont eu à se questionner sur le niveau de difficulté des tests. Où devraient être rendus des élèves de 4^{e} et de 6^{e} années en multiplication ? Pour répondre à cette question, les étudiants ont dû mobiliser une ressource institutionnelle en s'appropriant la *Progression des apprentissages* du *Programme de formation de l'école québécoise* (PFEQ) pour cibler ce que devraient savoir ces élèves.

Après avoir répondu à ces questions, nous avons abordé en équipes le sujet des tests. Comment élaborer un test qui mesure bien ce qu'il prétend mesurer ? Cette question renvoie bien sûr à la dimension pédagogique, tout en étant fortement teintée de la dimension didactique, c'est-à-dire, comment construire un test qui tient compte des difficultés conceptuelles énoncées plus haut ? En équipes, les étudiants ont élaboré un test pour les élèves de 4^{e} année et un autre pour les élèves de 6^{e} année. Ensuite, en grand groupe, nous avons pris connaissance de chacun des tests et avons sélectionné les deux qui semblaient les plus intéressants sur le plan didactique. Les étudiants ont ainsi éliminé les épreuves qui présentaient par exemple une ou des multiplications non discriminantes, c'est-à-dire qui contenaient plus d'une difficulté et qui n'auraient pas permis de cerner une difficulté particulière. Sur ce point, nous aurions pu volontairement laisser des épreuves non discriminantes afin que les étudiants puissent constater les conséquences d'une question mal choisie. Toutefois, étant donné que ce test était le point de départ d'un travail d'analyse d'erreurs pour les étudiants, nous voulions qu'il permette une analyse fructueuse, analyse qui aurait peut-être été moins riche si le test avait eu des lacunes évidentes. Nous avons remis les tests choisis à l'enseignant, qui les a administrés aux élèves de sa classe. Par la suite, l'enseignant a redonné les tests aux étudiants qui les ont eux-mêmes corrigés et qui, dans le cadre d'un travail de session, ont fait l'analyse des erreurs des élèves. Pour ce faire, ils ont identifié chacune des erreurs, ont cherché les causes possibles reliées à ces erreurs, ont regroupé les erreurs en catégories et les ont compilées dans une grille de classification permettant de voir d'un coup d'œil les difficultés des élèves de la classe. Pour aller plus loin dans cette situation, nous avons demandé aux étudiants d'élaborer un plan d'interventions correctives pour les élèves de cette classe. Cette partie liée à la correction est selon nous très proche du travail de l'enseignant.

Dans le cadre de ce travail, il y a vraiment imbrication des connaissances mathématiques, didactiques et institutionnelles. Qui plus est, pour se rapprocher du travail de l'enseignant, ce travail de correction et d'analyse est réalisé dans un laps de temps relativement court, c'est-à-dire une période, afin d'aller chercher des connaissances que Bednarz et Proulx (2009) considèrent comme étant « produites sur-le-champ, adaptées et en réponse à la situation » (Op. cité, p.6). Ils pensent ici au savoir que l'enseignant ne peut construire ailleurs qu'en situation, en réaction à une situation donnée et à des élèves donnés. Il est évident toutefois qu'étant en situation d'évaluation nous pouvons difficilement parler de construction de connaissances. Nous pensons quand même qu'un certain type de connaissances en action peut s'élaborer ici. Tel un enseignant dans sa classe, on veut voir quelles connaissances le futur enseignant va mobiliser, dans l'action.

V. SITUATION 2 : UN EXEMPLE D'ACTIVITE COMPLEXE DE RESOLUTION DE PROBLEME

La résolution de situations-problèmes est au centre du PFEQ dans le domaine de l'enseignement des mathématiques. Or, l'élaboration de situations-problèmes signifiantes et leur intégration dans une approche interdisciplinaire ne sont pas toujours faciles à réaliser. Par le biais de l'activité suivante, qui a été vécue dans une classe de troisième cycle du primaire (10−12 ans), nous tentons de faire réfléchir les futurs enseignants sur les conditions de la mise en place de ce type d'activités dans une classe.

Le point de départ de l'activité mathématique[4] est un article paru en première page du journal *La Presse* le 10 novembre 2004, qui titrait qu'une recherche prévoit que l'Arctique allait se réchauffer plus vite que le reste de la planète. L'article contenait des images qui montraient l'étendue prévue de la calotte glaciaire de l'Arctique en 2010, en 2040 et en 2070, et ce sont ces images qui étaient à la base de notre activité mathématique. Les enfants devaient répondre à la question suivante : Quelle sera l'étendue de la calotte glaciaire en 2010, 2040 et 2070 par rapport à aujourd'hui ? Les élèves disposaient d'un agrandissement de la carte présentée à la figure 2 qui contient les prévisions de l'étendue de la calotte glaciaire pour 2010 ainsi que de deux cartes semblables qui contenaient les prévisions pour 2040 et 2070. Sur la figure 2, le trait bleu indique les limites de la calotte glaciaire en 2003 et la surface blanche correspond à l'étendue prévue de la calotte pour 2010.

Figure 2 *– L'étendue prévue de la calotte glaciaire en 2010*[5]

Derrière la question apparemment simple posée aux enfants se cache une activité mathématique fort complexe pour des élèves de troisième cycle : Quelle stratégie vont-ils déployer pour déterminer l'aire de chacune des surfaces irrégulières ? Quelles stratégies vont-ils mettre en place pour exprimer la différence sous forme de rapport, fraction ou pourcentage ?

La richesse de cette activité provient entre autres de la possibilité d'avoir recours à plusieurs stratégies différentes, qu'il est par ailleurs intéressant d'anticiper avec les futurs enseignants. En effet, lors de cette expérimentation avec les élèves du primaire, plusieurs équipes ont utilisé un quadrillage, qu'ils ont superposé sur l'image afin de déterminer le nombre de carrés nécessaire pour recouvrir chacune des aires. D'autres équipes ont eu recours à une stratégie similaire, mais ont entouré les surfaces à mesurer d'un rectangle dont ils ont calculé l'aire et en ont enlevé l'aire de la surface qui dépasse la calotte glaciaire. Enfin, une autre équipe a élaboré une toute autre stratégie très intéressante au plan didactique. Cette stratégie consistait à calculer l'aire de la calotte glaciaire à partir de son périmètre. Pour ce

[4] Nous avons présenté une première fois cette activité dans Theis L., Gagnon, N. (2005) Un exemple d'activité complexe de résolution de problèmes dans une classe de troisième cycle. *Vivre le primaire* 19(1), 22−24.

[5] Cette image est légèrement différente de celle parue dans *La Presse*, afin de faciliter le traitement mathématique de la tâche par les enfants. Source : Arctic Climate Impact Assessment, 2004.

faire, les enfants ont collé une corde sur le pourtour de la calotte glaciaire, en essayant d'être le plus exacts possible. Lorsqu'interrogés sur leur stratégie, ils ont proposé qu'une fois le tour de la surface complété, ils allaient détacher la corde et réaliser un carré à partir de celle-ci. Ils allaient ensuite mesurer la longueur d'un côté du carré et calculer son aire, qu'ils pensaient équivalente à celle de la figure de départ (la calotte glaciaire).

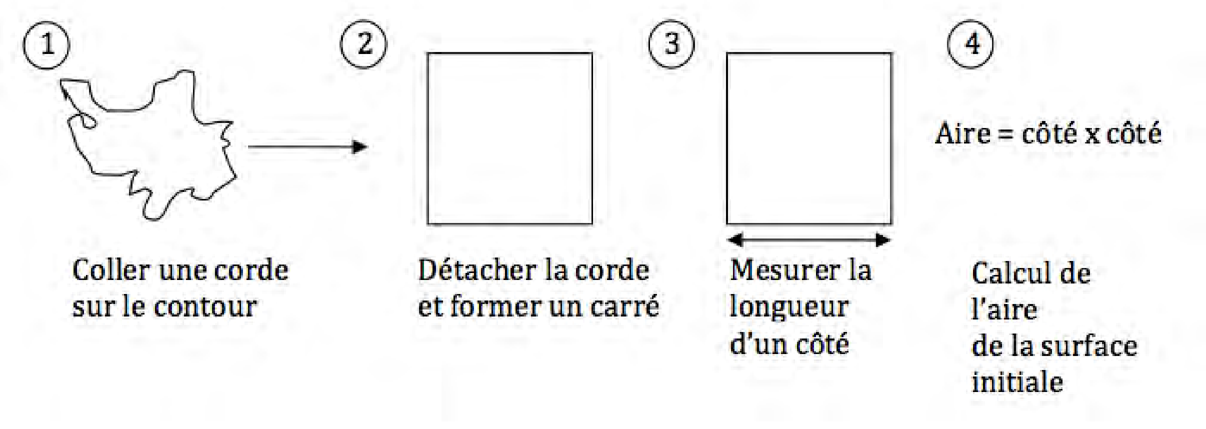


Figure 3 – *Stratégie utilisée pour déterminer l'étendue de la calotte glaciaire en 2010*

Bien sûr, même si elle est très élaborée, cette stratégie ne permet pas de déterminer l'évolution de la surface de la calotte glaciaire. Par contre, elle est un excellent point de départ pour démarrer une discussion mathématique sur le lien entre le périmètre et l'aire d'une figure géométrique.

Cette activité est très riche à exploiter avec nos étudiants, et ce, tant sur les plans institutionnel, mathématique et didactique que pédagogique. En effet, nous mettons d'abord en avant les dimensions institutionnelle et didactique lorsque nous situons la situation-problème par rapport à la définition ministérielle, que nous comparons à la définition que les didacticiens partagent par rapport à la situation-problème. Nous amenons les étudiants à réfléchir et se questionner quant à ces définitions qui vont dans des directions diamétralement opposées. Toujours sur le plan didactique, les étudiants sont amenés à envisager les questionnements des élèves. Ils sont aussi amenés à discuter la gestion didactique du groupe par l'enseignante, qu'ils voient dans le document vidéo. Cette gestion didactique concerne le questionnement de l'enseignante pour faire avancer la résolution dans les équipes, les questions pour relancer et les situations de décontextualisation. Sur le plan pédagogique, les étudiants sont amenés à réfléchir quant à la gestion du travail en sous-groupes et les types de questionnement dans les groupes. Bien que les étudiants ne vivent pas eux-mêmes cette expérimentation, ils voient l'enseignante comme un « modèle » qu'ils devront confronter en classe de stage. Enfin, en ce qui concerne la dimension mathématique, celle-ci est très présente à travers toute l'activité, ne serait-ce que par le questionnement suscité quant à la façon qu'eux-mêmes auraient d'aborder ce problème et tout le questionnement amené entre autres lors de la vérification du domaine de validité de la stratégie de la corde.

D'ailleurs, il est intéressant de constater que, lorsque nous explorons cette activité avec les futurs enseignants, ils se butent fréquemment aux mêmes difficultés que les élèves, notamment en ce qui concerne le lien entre l'aire et le périmètre. Ainsi, en plus de voir avec eux les caractéristiques à mettre en place pour faire vivre de véritables situations-problèmes aux élèves, nous avons l'occasion d'approfondir des contenus mathématiques tout en les étudiant sur le plan didactique.

VI. SITUATION 3 : ANALYSE DE LA COMPREHENSION EN GEOMETRIE ET DE LA DEMARCHE DE RESOLUTION DE PROBLEMES D'UN ELEVE DE 2^E^ CYCLE DU PRIMAIRE

Dans le cadre du cours de didactique des mathématiques de 1re année du baccalauréat, nous abordons la résolution de problème avec les étudiants. À cette fin, dans le but de permettre aux étudiants d'approfondir leur compréhension de ce qu'est un problème mathématique, de développer leur habileté à analyser un problème mathématique et d'approfondir leurs connaissances sur des notions de géométrie et de mesure vues au cours, nous présentons aux étudiants la vidéo d'un élève qui résout deux problèmes mathématiques. Dans l'exemple auquel nous référons, le premier porte sur le repérage d'objets dans l'espace et le second sur la mesure de surfaces. Les étudiants doivent analyser les problèmes, tant sur les plans mathématique, didactique qu'institutionnel (identification des savoirs essentiels, des préalables nécessaires et des difficultés anticipées). Dans un deuxième temps, après avoir visionné la vidéo, les étudiants doivent faire l'analyse de la compréhension de l'élève face aux notions mathématiques impliquées dans chacun des problèmes. Dans un troisième temps, ils doivent réaliser l'analyse de la démarche de l'élève dans une résolution de problème. Enfin, ils doivent effectuer un retour critique sur les problèmes en comparant les deux démarches de résolution de problème (plan didactique).

L'avantage de ce type de situation en formation des maîtres est que, en plus de travailler la démarche de résolution de problème, il permet à l'étudiant d'approfondir des contenus mathématiques tout en prévoyant, sur le plan didactique, quels sont les préalables et les difficultés à anticiper pour les élèves. Il est intéressant de constater que les difficultés anticipées sont rarement celles réellement vécues par les élèves. En effet, quand les étudiants savent résoudre un problème, ils ont souvent du mal à anticiper des stratégies erronées.

Prenons le problème de la mesure de surface. Dans ce problème, on présente le cas d'une famille qui hésite entre deux maisons, une étant située sur un terrain rectangulaire de 5 cm par 7 cm et l'autre sur un terrain carré de 6 cm par 6 cm. Finalement, la famille opte pour la maison située sur le terrain le plus grand. L'élève doit donc identifier quel est le terrain choisi. L'élève a devant lui les deux dessins représentant les deux situations. Il est à noter que, dans le problème initial, l'élève devait convertir les mesures en utilisant une échelle (1 cm = 10 m), ce qui n'a pas été demandé pour simplifier le problème.

La résolution de l'élève est très intéressante parce qu'il a commis des erreurs riches sur le plan didactique. Premièrement, l'élève s'est questionné parce que le bas du carré mesurait 5½ cm tandis que le haut du carré mesurait 6 cm. Se basant sur le fait qu'un carré a quatre côtés congrus, il a poussé plus loin son investigation pour se rendre compte que, dans le premier cas, il ne plaçait pas sa règle à 0 : « Je vais regarder pour l'autre *(bas du carré)*. Ce côté-là c'est … 6 cm. Celui-là *(côté droit du carré)* ça doit être 5½ cm également … 6 cm ? … Mais est-ce qu'il faut commencer à mesurer du 0 ou bien de là *(en pointant le bout de la règle)* ? ».

Après avoir mesuré les deux terrains, il en est venu à la réflexion suivante : « Alors moi je dirais que c'est aucun des deux terrains parce qu'ici c'est 6 cm des deux bords *(pointe le carré)* ça fait que si on fait 6 X 4 ça va nous donner 24. Alors 24. Ici *(pointe le rectangle)* si on fait 5 X 7 non, 5 X 7, ça va donner … 35. Alors finalement ce serait ce terrain-là qui serait le plus gros *(en pointant le terrain rectangulaire)* ». Un peu plus loin : « Oui mais, autrement j'aurais juré qu'ils sont de la même grandeur parce que ici *(en pointant le côté droit du rectangle)*, regarde 7 cm, c'est comme si on avait enlevé 1 cm et ajouté 1 cm au 5 ici *(le haut du rectangle)*, alors ça donnerait 6, 6, 6, 6 *(en pointant à tour de rôle les quatre côtés du rectangle)* ». Après avoir refait ses calculs, l'expérimentatrice lui a demandé s'il connaissait une autre façon qui pourrait l'aider, à quoi il a répondu : « Hum … non. Je ne vois pas vraiment. Non ». Après quelques hésitations, il a finalement pris une décision : « Ben moi je vais y aller avec la théorie du j'enlève … » et il a écrit :

> Les deux terrains sont de la même grandeur car si on enlève 1 a 7 et qu'on l'ajoute a 5 cela donne 6x6 comme l'autre terrain.

Cette situation est très riche sur les plans mathématique et didactique, et ce, à divers points de vue. D'une part, même si au final l'élève n'a pas fait d'erreur dans la mesure des côtés, une difficulté très fréquente de mesurage est survenue. Nous avons ici une belle occasion de creuser plus loin avec les étudiants en exploitant les difficultés liées à la mesure de longueur. Sur le plan de la mesure de l'aire, on peut voir que ce concept est en construction chez l'élève. Il sait la formule pour trouver l'aire d'une surface, mais se laisse berner par sa démarche de calcul. Enfin, on peut voir qu'il mélange l'aire et le périmètre. Voilà autant d'occasions pour approfondir ces concepts en classe avec les étudiants.

VII. CONCLUSION

Comme nous l'avons montré au début de ce texte, les étudiants au baccalauréat en enseignement au primaire arrivent en formation avec des niveaux très différents de compréhension en mathématiques. Étant donné que nous n'offrons pas de cours de mise à niveau en mathématiques, cette mise à niveau doit se faire à l'intérieur même des cours de didactique des mathématiques. Par les situations que nous avons présentées, nous avons tenté de montrer comment, à notre façon, nous essayons de former nos étudiants de la formation des enseignants à la didactique des mathématiques tout en approfondissant leur compréhension au plan mathématique. Nous croyons que cette façon de faire, en s'approchant le plus possible de la réalité de la classe et en articulant les dimensions mathématiques, didactiques, pédagogiques et institutionnelles, comme le proposent Bednarz et Proulx (2009), est susceptible d'aider les futurs enseignants. L'articulation d'une même activité autour de différents enjeux (mathématiques, didactiques, pédagogiques et institutionnels) nécessite cependant aussi une certaine vigilance. À vouloir exploiter trop d'enjeux de manière simultanée, il y a un certain risque de ne traiter tous les enjeux qu'en surface ou que les enjeux mathématiques, souvent plus difficiles pour les étudiants qui sont dans les programmes de formation à l'enseignement au primaire, ne prennent le dessus sur les réflexions aux autres niveaux.

Bien que nous considérions notre approche comme étant susceptible d'aider les futurs enseignants, elle ne permet pas de reconstruire entièrement les conditions en place dans une classe véritable. Pour cette raison, une présence des formateurs en didactique lors de la supervision des stages nous semble également essentielle. Lors des rétroactions sur les activités réalisées par les étudiants, il devient alors possible de susciter des réflexions didactiques et mathématiques, en partant de leur pratique effective en milieu de stage.

REFERENCES

Adihou A., Arsenault C. (2012) Dispositif de formation mathématique pour les enseignants du primaire : choix, caractéristiques, résultats et impacts. In Proulx J, Corriveau C, Squalli H. (Eds.) (pp. 225-253) *Formation mathématique des enseignants de mathématiques : pratiques, orientations et recherches*. Québec : Les Presses de l'Université du Québec.

Adihou A., Arsenault C., Marchand P. (2006) Réflexion sur un dispositif de formation pour le développement de compétences en mathématiques chez les futurs maîtres. In Bednarz N., Mary C. (Eds.) *Actes du 3e colloque international Espace mathématique francophone, « L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés »*. [Cédérom]. Sherbrooke : Éditions du CRP.

Arsenault C., Voyer D. (2003) Une démarche d'auto-évaluation au service de l'actualisation des savoirs mathématiques dans le cadre de la formation à l'enseignement. Dans Association francophone internationale de recherche scientifique en éducation (AFIRSE) et Ministère de l'Éducation Nationale (Eds.) *Former les enseignants et les éducateurs – une priorité pour l'enseignement supérieur. Actes du Colloque de l'AFIRSE organisé par la Commission nationale française pour l'UNESCO*.

Ball D., Thames M., Phelps G. (2008) Content knowledge for teachers. What makes it special? *Journal of teacher education* 59, 389-407.

Bednarz N., Proulx J. (2009) Connaissance et utilisation des mathématiques dans l'enseignement : Clarifications conceptuelles et épistémologiques. *For the Learning of Mathematics* 29(3), 1-9.

Hill H., Ball D. (2009) The curious – and crucial – case of mathematical knowledge for teaching. *Phi delta kappan* 91(2), 68-71.

Matthews M., Seaman W. (2007) The effects of different undergraduate mathematics courses on the content knowledge and attitude towards mathematics of pre-service elementary teachers. *Issues in Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal* 1, 1-16.

Morin M.-P. (2008). Les connaissances mathématiques et didactiques chez les futurs maîtres du primaire : quatre études de cas. *Canadian Journal of Education* 31(3), 537-566.

Morin M.-P., Theis L. (2006) Mesures d'aide en mathématiques pour soutenir les étudiantes et étudiants de la formation initiale qui présentent des difficultés. In Bednarz N., Mary C. (Eds.) *Actes du 3e colloque international Espace mathématique francophone, « L'enseignement des mathématiques face aux défis de l'école et des communautés »*. [Cédérom]. Sherbrooke: Éditions du CRP.

Pickreign J. (2007) Rectangles and rhombi: how well do pre-service teachers know them? *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers: The Journal* 1, 1-7.

Proulx J. (2010). Reconnecter les futurs enseignants avec les mathématiques du secondaire: travailler autour de conceptualisations riches en « faisant » des mathématiques. In Proulx J., Gattuso L. (Eds.) (pp. 129-152) *Formation des enseignants en mathématiques : tendances et perspectives actuelles.* Sherbrooke: Éditions du CRP.

Stacey K., Helme S., Steinle V., Baturo A., Irwin K., Bana J. (2001) Preservice teachers' knowledge of difficulties in decimal numeration. *Journal of Mathematics Teacher Education* 4(3), 205-225.

QUELLES MATHÉMATIQUES POUR LES FUTURS ENSEIGNANTS ? RÉFLEXIONS ET EXEMPLES DE PRATIQUE D'UNE FORMATRICE

Valériane PASSARO*

Résumé – Cette contribution propose d'abord d'expliquer la rupture entre les expériences mathématiques des étudiants en formation initiale en enseignement secondaire et celles des enseignants en pratique en prenant appui sur les notions de « conception opérationnelle » et de « conception structurelle » des objets mathématiques (Sfard 1991). Puis, des exemples de tâches visant le développement d'une conception structurelle chez les futurs enseignants sont présentés. Finalement, les observations faites lors de la réalisation de ces tâches et les réflexions amorcées alimentent la discussion sur la formation mathématique, ainsi que sur l'articulation entre la formation didactique et mathématique des futurs enseignants.

Mots-clefs : expériences mathématiques, formation initiale, conception opérationnelle, conception structurelle

Abstract – This contribution proposes first an explanation of the rupture between the mathematical experiences of pre-service and in-service secondary schoolteachers building on the notions of "operational conception" and "structural conception" of mathematical objects (Sfard 1991). Then, examples of tasks for pre-service teachers' development of a structural conception are presented. Finally, the observations made during the realization of these tasks and the begun reflections feed the discussion on mathematical formation and as well on the articulation between didactical and mathematical formation of the pre-service teachers.

Keywords: mathematical experiences, pre-service education level, operational conception, structural conception

La formation mathématique des enseignants est au cœur de nos préoccupations. Nous savons qu'il existe une rupture entre les expériences mathématiques vécues par les étudiants en formation des maîtres et les expériences mathématiques vécues par les enseignants dans leur travail quotidien (Proulx et Bednarz 2008). Mes expériences diverses en tant qu'étudiante, enseignante, formatrice, superviseure de stage etc. m'ont permis de considérer la question sous plusieurs angles à différents moments de ma pratique. Mon cheminement m'amène aujourd'hui à prendre du recul et à faire le point. Ma contribution consiste donc à présenter une partie de mes plus récentes réflexions sur le sujet.

En partant de l'exemple de la formation initiale des enseignants de mathématiques au secondaire de l'Université du Québec à Montréal (UQÀM), je présente une brève comparaison des expériences mathématiques de l'étudiant et de l'enseignant en pratique telles que je les connais. Puis je propose une analyse des éléments de comparaison ressortis de manière à éclairer la nature de la rupture entre ces deux types d'expériences. Visant une reconnexion de ces dernières, je présente des exemples de ma pratique et la réflexion qui s'ensuit.

Dans cette contribution, je ne présente pas un compte-rendu de recherche mais mon témoignage comme enseignante intervenant dans la formation des maîtres. Les éléments théoriques sont donc abordés uniquement parce qu'ils m'ont permis à un certain moment d'organiser mes idées. Ces dernières sont d'ailleurs fortement influencées par la perspective des didacticiens de l'UQÀM (voir Bednarz, Gattuso et Mary 1995) qui ont été ma première et principale source d'inspiration. Je considère que mes réflexions viennent donc à la fois compléter et diffuser les idées des didacticiens de cette équipe qui ont, pour la plupart, passé le flambeau.

* Université de Montréal – Canada – valeriane.passaro@umontreal.ca

© Passaro V. (2012) Quelles mathématiques pour les futurs enseignants ? Réflexions et exemples de pratique d'une formatrice. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT1, pp. 206–214). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

I. COMPARAISON ET ANALYSE DES DIFFÉRENTES EXPÉRIENCES MATHÉMATIQUES

1. Un premier regard sur la situation : observations et impressions personnelles

D'un côté, les expériences mathématiques vécues par l'étudiant tout au long de sa formation sont diverses. Néanmoins, la formation disciplinaire se fait explicitement dans les cours de mathématiques avancées. Dans ces cours, on s'entend généralement pour dire que les étudiants font des mathématiques de manière à acquérir une expertise dans leur matière ou encore qu'ils développent la compétence à « agir en tant que professionnelle ou professionnel héritier, critique et interprète d'objets de savoirs ou de culture dans l'exercice de ses fonctions »[†]. Ainsi, on y vise l'acquisition de concepts mathématiques dits « avancés ». L'étudiant qui aborde ce contenu nouveau et relativement complexe, travaille principalement à un niveau procédural et devient particulièrement habile à réaliser des tâches routinières.

D'un autre côté, les enseignants en pratique vivent une toute autre expérience des mathématiques. En effet, leur connaissance des mathématiques leur permet principalement de planifier leur enseignement et d'intervenir en classe. Or, comme l'indique Morin (2008), « réagir à une situation mathématique exige une bonne maîtrise des connaissances disciplinaires à enseigner ». Ainsi, l'enseignant doit connaître les concepts mathématiques qu'il enseigne d'une façon approfondie, il doit atteindre un niveau de maîtrise qui dépasse largement l'application d'une procédure. À ce titre, il doit être un expert de sa matière.

Dans les deux cas, il est clair qu'il est question d'une certaine expertise. Par contre, les caractéristiques de cette expertise sont différentes et afin de mieux expliciter cette différence, j'ai choisi d'utiliser le cadre proposé par Sfard (1991).

2. Un cadre d'analyse : conceptions opérationnelle et structurelle de l'objet mathématique

Sfard (1991) parle de deux conceptions complémentaires d'un concept mathématique : la conception opérationnelle, en lien avec les processus, et la conception structurelle, en lien avec l'objet. Elle précise que pour arriver à connaître un objet mathématique, il faut d'abord en développer une conception opérationnelle puis une conception structurelle. Le passage de la première à la seconde se fait en trois étapes :

1. **L'intériorisation** est un niveau de familiarisation avec un nouveau concept de manière procédurale, compartimentée. L'accent est mis sur des processus, on se concentre sur les détails.
2. **La condensation** est une étape à laquelle il y a une première activité de synthèse, de généralisation. Une organisation des processus débute et les détails sont de moins en moins importants.
3. **La réification** est l'étape ultime à laquelle tout s'organise et prend un sens. On sait alors comment et pourquoi, on a une vue d'ensemble. Les détails ne sont plus importants, on comprend que les processus ne sont que des détails, que des outils au service de l'objet. On saisit alors l'objet mathématique.

L'auteur ajoute que la réification est directement en lien avec l'intériorisation de concepts plus complexes. En fait, pour que la réification ait lieu il doit y avoir une motivation. Tant que la conception opérationnelle est suffisante et efficace, il n'y a pas d'intérêt à développer une

[†] Première des 12 compétences professionnelles attendues des enseignants et des enseignantes du secondaire, selon le Ministère de l'éducation, du loisir et du sport du Québec.

conception structurelle. L'intérêt se fait ressentir lorsque vient le temps de travailler sur de nouveaux concepts plus poussés en lien avec le concept de base.

3. *Un second regard sur la situation : approfondissement des idées et source de la rupture*

Ce second regard correspond en fait à une explicitation du premier à l'aide de la théorie précédemment présentée. Il est à noter que je suis consciente que cette théorie ne reflète pas la complexité du processus de compréhension d'un concept mathématique. J'explicite d'ailleurs mes idées à ce sujet dans ma recherche doctorale (voir l'affiche présentée au présent colloque). Néanmoins, je m'en tiendrai ici aux idées de Sfard puisqu'elles me servent uniquement de tremplin pour poursuivre ma réflexion.

Tel que mentionné, dans les cours de mathématiques avancées, l'étudiant-maître aborde de nouveaux concepts mathématiques. Or, la première étape dans le processus d'apprentissage d'un nouveau concept mathématique, selon Sfard, est l'intériorisation. Il est donc normal que le travail effectué se situe d'abord à un niveau procédural. Par la suite, si les concepts sont travaillés en profondeur l'étudiant peut passer aux étapes de condensation et de réification. Cependant, le temps alloué et le type de travail effectué sur les objets mathématiques abordés ne semble pas permettre aux étudiants d'en développer une conception structurelle. Ainsi, selon mes observations, la plupart des étudiants atteignent le stade de la condensation. Leur compréhension des concepts mathématiques est de nature opérationnelle.

L'enseignant en pratique, quant à lui, doit connaître les concepts mathématiques qu'il enseigne de façon approfondie. En fait, l'enseignant, pour pouvoir réagir vite et adéquatement, doit avoir une vue d'ensemble, il doit être flexible et confiant avec les concepts mathématiques qu'il enseigne. Le niveau de maîtrise nécessaire est celui du stade de la réification. Pour l'enseignant, posséder une conception structurelle des concepts mathématiques qu'il enseigne est indispensable.

Ainsi, d'un côté, dans les cours de mathématiques avancées, les étudiants développent une conception opérationnelle de certains concepts mathématiques dits « avancés ». De l'autre, les enseignants en pratique doivent utiliser particulièrement leur conception structurelle des concepts mathématiques de base, sujets de leur enseignement. Il existe donc une rupture évidente entre ces deux expériences. Non seulement les concepts mathématiques utilisés ne sont pas les mêmes, mais en plus ils ne sont pas travaillés de la même façon.

II. TENTATIVES DE RECONNEXION ENTRE LES DIFFÉRENTES EXPÉRIENCES MATHEMATIQUES

1. *Objectif global*

Si on se base sur les caractéristiques de l'expérience mathématique de l'enseignant pour guider la formation initiale des maîtres, alors il faut que les étudiants soient amenés à développer leur conception structurelle des concepts mathématiques qu'ils devront enseigner. Dans la perspective didactique dans laquelle je m'inscris, mathématiques et didactique des mathématiques vont de pair et l'un des objectifs des cours de didactique est de « faire vivre aux futurs enseignants une autre approche des mathématiques » (Bednarz, Gattuso et Mary 1995, p. 20) pour les amener à approfondir leur compréhension des concepts mathématiques qu'ils ont déjà abordés en tant qu'élèves. La piste de reconnexion envisagée est donc de faire faire des mathématiques aux futurs enseignants de façon à stimuler la réification des objets mathématiques qu'ils connaissent, mais desquels ils n'ont développé qu'une conception opérationnelle.

2. Obstacle à la réification et moyen envisagé pour dépasser cet obstacle

Sfard (1991) indique que la réification est une activité difficile dans la mesure où elle nécessite la mise de côté des processus qui jusqu'à présent constituaient le seul et unique sens du concept. Elle voit cette remise en question comme un obstacle à la réification.

Dans le cas des étudiants qui débutent une formation en enseignement des mathématiques, cet obstacle est particulièrement présent. En effet, leur expérience d'élève leur a permis de développer une conception opérationnelle forte et efficace mettant l'accent sur le caractère ordonné, prévisible et sécurisant des mathématiques. Aussi sont-ils confiants quant à leurs connaissances mathématiques et ils s'attendent à ce que leur formation à l'enseignement suive ce modèle opérationnel, c'est-à-dire qu'elle leur apporte des techniques (ou même **la** technique) d'enseignement des mathématiques (Rioux 2011). Finalement, ils ne s'attendent pas à remettre en question leur connaissance des mathématiques car ils n'envisagent pas que cela puisse contribuer à leur formation à l'enseignement.

Dans la mesure où la conception opérationnelle est une connaissance qui s'est avérée optimale dans un certain domaine défini, elle peut devenir un obstacle au sens où Brousseau (1998) l'entend. Ainsi, comme l'indique ce dernier, franchir cet obstacle passe par la déstabilisation.

3. Quelques exemples de tâches

Trois moyens sont envisagés et pour chacun la source de la déstabilisation est différente :

1. **Faire faire des mathématiques autrement.** L'étudiant redevient (ou presque) un élève du secondaire. On lui propose de « jouer » à l'élève en refaisant les activités destinées aux élèves du secondaire. Par contre, on lui indique bien que les activités proposées risquent d'être différentes de ce qu'il a vécu quand il était élève. Ainsi, on l'amène à revoir ses connaissances mathématiques, mais dans des contextes pour lesquels il doit pousser sa réflexion. Une conception opérationnelle est insuffisante pour répondre aux questions posées et l'étudiant doit aborder les objets mathématiques qu'il connait sous un autre angle. La déstabilisation vient du fait qu'on impose de ne pas avoir recourt aux façons de faire familières et opérationnelles. On enlève soudain les processus qui semblaient auparavant à eux seuls définir le concept. Les étudiants ont l'impression d'avoir affaire à une situation qui n'a pas sens.
2. **Créer un choc.** On place l'étudiant en situation d'échec. En fait, on l'amène à prendre conscience que ses connaissances sont limitées et facilement ébranlables. Les limites d'une conception strictement opérationnelle sont mises en évidence. L'étudiant est d'abord confiant lorsqu'il réalise une tâche qu'il pense réussir. Il est par la suite déstabilisé lorsque sa solution ou celles de ses collègues sont présentées et qu'il prend conscience des erreurs commises.
3. **Forcer la réflexion et la métacognition.** Une première étape consiste en ce que l'étudiant réfléchisse et analyse sa réflexion. Il doit prendre conscience de ses actions, de leurs origines et de leurs conséquences lors de la réalisation d'une tâche. Une seconde étape est l'analyse de la réflexion des autres. Le recul nécessaire à la réalisation de ces tâches force l'étudiant à organiser ses connaissances, à faire des mises au point et à prendre conscience du fonctionnement de sa pensée et de celle des autres. La déstabilisation se produit dès le début car l'étudiant n'a pas l'habitude

d'analyser son propre processus de pensée. Il doit se détacher des actions pour passer à un niveau réflexif et cela lui demande un effort intellectuel avec lequel il peut ne pas être à l'aise.

Ces idées peuvent donner lieu à différentes interventions et je présente ici des exemples de tâches que j'ai eu l'occasion d'expérimenter à plusieurs reprises. Pour chacun, je précise le moyen envisagé, le titre du cours duquel provient l'exemple et le sujet abordé, puis je donne mes premières observations sur le déroulement et l'issue de la réalisation de la tâche par les étudiants.

Exemple 1	
Moyen	Faire faire des mathématiques autrement
Cours	Didactique des mathématiques 1
Sujet	La moyenne
Description de la tâche	Les étudiants doivent réaliser une activité en équipe de 4. On leur distribue une enveloppe et donne la consigne suivante : « Dans votre enveloppe, il y a quatre paquets de cure-dents : un paquet de 4 cure-dents, un paquet de 8 cure-dents, un paquet de 14 cure-dents et un paquet de 22 cure-dents. Vous devez trouver le nombre moyen de cure-dents par paquet *de deux manières différentes* en manipulant le matériel. L'usage de la calculatrice est interdit. »
Premières observations	Les étudiants ne saisissent pas au départ ce qu'ils doivent faire, ils veulent calculer, utiliser la formule qu'ils connaissent. Je les ramène à la consigne : ils doivent obtenir le résultat suite à une manipulation. Ils apprécient l'activité et finissent par procéder exactement comme le font les élèves du secondaire. Ils trouvent deux manipulations différentes associées aux raisonnements de « total-répartition » (on met tous les cure-dents ensemble puis on re-distribue équitablement) et de « mise à niveau » (on enlève des cure-dents aux paquets qui en ont le plus pour en donner à ceux qui en ont le moins de manière à obtenir le même nombre de cure-dents dans chaque paquet).

Exemple 2	
Moyen	Créer un choc
Cours	Didactique de l'algèbre
Sujet	Le calcul algébrique
Description de la tâche	Les étudiants doivent répondre rapidement à des questions et noter leurs réponses sur une feuille que je ramasse. L'objectif n'étant pas de les évaluer, les productions sont anonymes. Je compile alors les résultats et effectue une synthèse de manière à présenter aux étudiants les différentes solutions proposées. Voici un exemple de question : Résoudre dans $\mathbb{R}$: 1) $\sqrt{x} + 4 = 2\sqrt{x}$

	2) $\frac{x}{2}+6-3x=2x+2-\frac{9}{2}x+4$
Premières observations	Les étudiants se prêtent au jeu. Certains sont sûrs d'eux, d'autres moins, mais tous répondent ou essaient de répondre aux questions. La plupart d'entre eux pensent avoir bien « réussi » car ils ont donné une réponse. Lorsque je présente les solutions, je le fais sans jugement, c'est un constat, une synthèse objective. Les étudiants sont particulièrement attentifs, ils reconnaissent leurs solutions et n'en sont pas particulièrement fiers. En effet, il y a beaucoup d'erreurs. Certains semblent vexés et se cherchent des excuses (« l'énoncé n'était pas clair !! » par exemple), d'autres acceptent et même en rient. Il n'y a pas de doute, un choc se produit. Exemples de réponses : 1) $\left(\sqrt{x}+4\right)^2=\left(2\sqrt{x}\right)^2$ $x+8\sqrt{x}+16=4x$ $\left(8\sqrt{x}\right)^2=(4x-x-16)^2$ $64x=9x^2-96x+256$ $9x^2-160x+256=0$ $x_1\approx 1{,}78$ et $x_2=16$ 2) $\frac{x}{2}+6-3x=2x+2-\frac{9}{2}x+4$ $\frac{x}{2}+\frac{9}{2}x+6-6-3x-2x=0$ $\frac{10}{2}x-5x=0$ $5x-5x=0$ $x=0$

Exemple 3	
Moyen	Forcer la réflexion et la métacognition
Cours	Didactique de la variable et de la fonction
Sujet	Les fonctions polynomiales du second degré
Description de la tâche	Les étudiants doivent résoudre un problème en étant attentifs à leur façon de raisonner en premier lieu. Ils doivent pouvoir expliquer ce qu'ils font et pourquoi. Ils doivent particulièrement se questionner sur ce qui leur permet d'affirmer que leur solution est correcte. Ensuite, ils doivent trouver au moins une autre façon de résoudre le problème et expliquer cette nouvelle solution. Exemples de problèmes : a) Détermine la règle de la fonction f sachant que sa courbe a pour sommet S(2, 3) et qu'elle passe par le point A(5, 30). b) Détermine la règle de la fonction g sachant que sa courbe passe par A(0, 11), B(1, 25) et C(2, 43).
Premières observations	La résolution des problèmes est assez rapide. Les étudiants commencent la plupart du temps par résoudre puis ils reprennent leur solution et essaient de l'expliquer. L'explication est difficile, elle ressemble plutôt à une description des actions posées sans une réelle réflexion. Ils ne sont clairement pas capables de répondre au « pourquoi ». En fait leurs justifications sont de l'ordre de « j'agis ainsi parce que c'est ce que j'ai appris à faire ». Trouver une autre solution est aussi difficile et souvent ils

	vont remanier simplement leur solution initiale, ils n'envisageront pas un autre raisonnement. Les étudiants trouvent cette activité difficile et ils se découragent rapidement. Le retour est toujours pénible et pauvre. Exemple de solution proposée au problème a) par un étudiant avec ses justifications : C'est une fonction quadratique donc sa règle peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x-h)^2 + k$ (h, k) sont les coordonnées du sommet et ici c'est S(2, 3) donc $f(x) = a(x-2)^2 + 3$ La courbe passe par A(5, 30) donc je peux remplacer x par 5 et y par 30 pour trouver la valeur de a : $a(5-2)^2 + 3 = 30$ $9a + 3 = 30$ $9a = 27$ $a = 3$ $f(x) = 3(x-2)^2 + 3$

4. Sur quoi débouchent ces tâches ?

Comme indiqué précédemment, ces tâches agissent en tant que déclencheur d'un apprentissage. Chacune d'entre elle débouche à la fois sur un travail mathématique et un travail didactique.

La tâche présentée au premier exemple fait ressortir deux raisonnements permettant le calcul de la moyenne arithmétique. Par la suite, les étudiants sont amenés à pousser leur compréhension de ces raisonnements en les travaillant dans divers contextes et dans différents registres de représentation. En parallèle, ils commencent à envisager la planification de l'enseignement de ce concept en prenant appui sur ces raisonnements. Ces derniers peuvent en effet jouer le rôle de fils directeurs autour desquels les autres éléments de l'analyse conceptuelle viennent se greffer (conceptions, difficultés, erreurs etc.).

La tâche proposée dans le deuxième exemple débouche, quant à elle, sur le travail de l'erreur d'un côté et sur des raisonnements permettant de donner du sens aux manipulations algébriques d'un autre côté. En effet, l'analyse des solutions des étudiants permet d'amener le questionnement sur l'origine de ce type d'erreurs et de faire ressortir les limites d'un travail strictement opérationnel. Les raisonnements apparaissent alors comme un moyen de donner du sens aux manipulations.

La tâche du troisième exemple mène au travail sur tous les raisonnements sur lesquels reposent les techniques comme celle utilisée dans l'exemple de solution. Ce travail est particulièrement long puisqu'on se rend vite compte que chaque technique repose sur une autre technique qu'il faut aussi expliciter. Le travail mathématique prend alors beaucoup de place. Évidemment, les raisonnements servent une fois de plus d'assise à la planification de l'enseignement.

Il est à noter que dans ces cours de didactique, on propose aux étudiants des tâches mathématiques comme celles présentées, mais aussi des tâches didactiques (analyse d'une solution d'élève, analyse d'une tâche proposée dans un manuel scolaire etc.). Ces dernières mènent de la même façon à un travail didactique et mathématique. Toutefois, elles ne permettent pas, selon moi, une déstabilisation et c'est pourquoi leur impact sur l'apprentissage des mathématiques me semble moins important.

III. ANALYSE DES RESULTATS

Bien que cette contribution ne porte pas sur une recherche à proprement dite, je pense qu'il est intéressant d'aborder quelques éléments d'analyse des tâches proposées. Je fais donc part de mes observations et réflexions sur la façon dont les étudiants vivent la déstabilisation et sur l'impact de celle-ci sur leur apprentissage.

Plusieurs facteurs influencent la façon de vivre la déstabilisation (assurance, attentes, temps etc.) et ils sont tous liés à la solidité et la stabilité de la conception opérationnelle développée. On peut néanmoins facilement se douter que personne n'apprécie d'être déstabilisé, mais les réactions sont plus ou moins fortes d'un étudiant à l'autre. Ainsi, certains sont plus réceptifs que d'autres et l'impact sur l'apprentissage dépend de cette réceptivité.

En outre, l'impact dépend aussi des tâches proposées puisque pour chacune la source de la déstabilisation n'est pas la même.

Pour le premier exemple, la déstabilisation vient de la perte de sens. On enlève ce qui donnait du sens, on établit les nouvelles règles du jeu et on entre ainsi dans une nouvelle culture mathématique. Le fait de proposer une piste pour entrer dans ce nouveau jeu et le fait qu'on fasse travailler des raisonnements simples et accessibles permettent aux étudiants de retrouver rapidement leur stabilité. C'est pour cette raison qu'ils finissent par apprécier la tâche. Ce nouveau jeu leur apparaît amusant car il ne constitue pas un obstacle trop grand. Toutefois, ils ne comprennent pas vraiment ce qu'ils font.

Dans le second exemple, la déstabilisation dépend de la situation. L'étudiant qui a commis une erreur par exemple sera plus déstabilisé que celui qui observe les erreurs des autres. En général, au moins le tiers du groupe commet des erreurs et la plupart des étudiants se sent concernée. L'analyse de l'erreur fait ressortir le problème d'un travail machinal sans raisonnement. La prise de conscience des limites de cette manière de faire ouvre une porte. Cependant, l'ouverture n'est pas grande et si la nouvelle façon de faire n'est pas rapidement satisfaisante, elle se referme. Les étudiants ont tendance à revenir rapidement à ce qu'ils connaissent.

En ce qui concerne le troisième exemple, la déstabilisation est plus ou moins présente. En fait elle provient surtout de l'explicitation d'un nouveau contrat didactique dont les étudiants ont de la difficulté à cerner les règles et les enjeux. Ils doivent raisonner, mais ils ne savent pas comment faire et pour eux ça n'a pas vraiment de sens. En fait, ils ont développé un sens qui leur convient et ne comprennent pas pourquoi ils doivent en trouver un autre. De plus, cet autre sens semble plus lourd et plus complexe, ils résistent donc fortement au changement.

Finalement, chacune des tâches permet d'ébranler à sa façon la conception opérationnelle des étudiants. Néanmoins, cela ne suffit pas et il faut régulièrement recommencer.

IV. SYNTHÈSE ET RÉFLEXION

À travers mon analyse de la situation de rupture entre les expériences mathématiques de l'étudiant et de l'enseignant, je revendique le fait qu'il y a plusieurs façons de faire des mathématiques. Chacune de ces façons a une raison d'être et est appropriée dans un contexte donné. La question est d'identifier ce qui est approprié pour un futur enseignant. Ce que j'ai tenté de montrer, c'est que le futur enseignant doit particulièrement développer une conception structurelle des concepts mathématiques qu'il devra enseigner. Afin d'alimenter la réflexion sur les moyens de favoriser ce type d'apprentissage, j'ai présenté quelques exemples de ma pratique située dans la perspectives d'une équipe de didacticiens de l'UQÀM et j'ai fait part de mes observations sur les actions et les réactions des étudiants lors de la réalisation de ces tâches.

Il apparaît indispensable de faire travailler les étudiants sur les concepts mathématiques de base pour lesquels ils n'ont développé qu'une conception opérationnelle. Cependant, le passage vers une conception structurelle constitue une rupture qu'il n'est pas facile de provoquer. Les exemples de tâches que j'ai présentés ont pour objectif de forcer cette rupture. Chacune d'entre-elles propose de déstabiliser l'étudiant d'une manière différente, mais elles débouchent toutes sur un travail mathématique et didactique. Le travail mathématique est axé principalement sur le raisonnement et permet d'envisager les concepts autrement. En ce sens les étudiants sont amenés à développer une certaine conception structurelle de ces concepts. Le travail didactique quant à lui s'articule sur le travail mathématique, l'un ne va pas sans l'autre.

Finalement, j'ai choisi d'aborder la formation mathématique qui prend place dans les cours de didactique. Ainsi, le travail sur les concepts mathématiques de base se fait-il par l'intermédiaire d'une réflexion et d'une remise en question des connaissances de ces concepts. Néanmoins, le travail sur les concepts mathématiques avancés a sa place et il faut poursuivre la réflexion de manière à clarifier le rôle de ce travail dans la construction de la conception structurelle des concepts mathématiques de base.

REFERENCES

Bednard N., Gattuso L., Mary C. (1995) Formation à l'intervention d'un futur enseignant en mathématiques au secondaire. *Bulletin de l'Association Mathématique du Québec. Mars, n°1,* 17-30.

Brousseau G. (1998) *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.

Morin M.-P. (2008) Les connaissances mathématiques et didactiques chez les futurs maîtres du primaire : quatre études de cas. *Canadian Journal of Education* 31(3), 537-566.

Proulx J., Bednarz N. (2008) The mathematical preparation of secondary mathematics schoolteachers: Critiques, difficulties and future directions. Texte présenté à *11th International Congress on Mathematics Education (TSG 29).* Monterey, Mexique. http://tsg.icme11.org/tsg/show/29.

Rioux M. (2011) Que veulent apprendre les futurs enseignants dans leurs cours de didactique et qu'attendent-ils vraiment de vous ? Atelier présenté au *congrès annuel de l'Association Mathématique du Québec.*

Sfard A. (1991) On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics* 22(1), 1-36.

DE L'EXISTENCE DE MATHÉMATIQUES DE LA DIDACTIQUE : RÉFLEXIONS SUR L'ARTICULATION ENTRE MATHÉMATIQUE ET DIDACTIQUE

Jérôme PROULX*

Résumé – Pour discuter de l'articulation des connaissances mathématiques et didactiques, j'explore la possibilité de l'existence de mathématiques spécifiques à la didactique des mathématiques, que j'appelle des « mathématiques de la didactique ». En m'inspirant des travaux récents en didactique des mathématiques, j'offre trois entrées pour réfléchir sur ces « mathématiques de la didactique » : le travail conduit à la formation des maîtres en mathématiques, les mathématiques mobilisées à l'intérieur des pratiques enseignantes et les concepts mathématiques tirés des travaux en didactique des mathématiques.

Mots-clefs : articulation mathématique et didactique, mathématiques spécifiques à la didactique, didactiques des mathématiques, légitimité mathématique

Abstract – To discuss the link between mathematical and didactical knowledge, I explore the possibility that specific mathematics exists within the world of didactics, which I call "mathematics of didactics." Delving in recent work in didactics of mathematics, I offer three entry points to engage in reflections about these "mathematics of didactics": work conducted in mathematics teacher education, mathematical knowings mobilized in teachers' practices, and mathematical concepts developed in didactics studies.

Keywords: links between mathematics and didactics, didactics' specific mathematics, mathematics didactics, mathematical legitimacy

I. MISE EN CONTEXTE DU QUESTIONNEMENT

La didactique des mathématiques est un domaine d'études assez récent. Pour plusieurs didacticiens, elle s'est établie de façon plus officielle durant les années 1970 à plusieurs endroits autour du globe, suite à l'avènement des mathématiques modernes dans le milieu scolaire (voir Moon, 1986). La didactique des mathématiques s'est donc développée de façon contextualisée et dépendante de ses divers milieux d'origine en ce qui a trait à ses orientations, mais aussi à la nature des travaux qui y ont été réalisés. Elle porte ainsi, tel que le souligne Bednarz (2007), un caractère multi-référentiel et hautement contextualisé, amenant à parler *des* didactiques des mathématiques et non d'une seule didactique des mathématiques. À titre d'exemple, comme l'explique Bednarz (2001), alors qu'elle s'est développée en France dans une intention d'en faire une science, elle s'est davantage développée en Italie pour des envies d'innovation des pratiques de classes et aux Pays-Bas en lien avec la vision de Freudenthal des mathématiques comme activité humaine. Ces différents contextes sont importants, car ils ont fait émerger différentes façons de faire et de concevoir les travaux en didactique des mathématiques. Plus près de moi, au Québec et particulièrement à l'UQAM, la didactique des mathématiques s'est développée dès les années 1970 dans une préoccupation de formation des enseignants, orientant de ce fait la nature des travaux et des réflexions qui y ont été menés. C'est ce contexte qui enracine les questions que je pose dans cet article – nées de préoccupations au carrefour de la didactique des mathématiques et de la formation des enseignants – pour aborder la notion d'articulation au cœur du thème du GT1.

II. IMBRICATION DES CONNAISSANCES DIDACTIQUES ET MATHÉMATIQUES

Les questions d'articulation sont, du moins au Québec, au cœur des préoccupations de formation des enseignants en mathématiques (voir le collectif Proulx et Gattuso 2010). Ces

* Université du Québec à Montréal – Québec, Canada – proulx.jerome@uqam.ca

© Proulx J. (2012) De l'existence de mathématiques de la didactique. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT1, pp. 215–227). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

questions d'articulation apparaissent importantes, particulièrement face aux questions d'organisation et de la place accordée aux différentes composantes de la formation des enseignants, par exemple les mathématiques, la didactique et la pédagogie (voir Kuzniak 2007), où des choix doivent être faits et où une critique persiste face à la tendance d'atomisation de ces différentes composantes dans la formation (voir Ball 2000). Cette critique est d'autant plus vive que les travaux sur les pratiques enseignantes montrent que l'enseignant mobilise de façon simultanée des connaissances mathématiques, didactiques et pédagogiques dans son enseignement (Bednarz et Proulx 2009; Huillet 2009), questionnant la tendance à dissocier celles-ci à travers des cours distincts de mathématiques, de didactique et de pédagogie. Dans la même veine, dès les années 1990 suite aux travaux de Shulman (1986), des chercheurs comme Even (1990, 1993) ont montré qu'il était difficile, voire impossible, de séparer les connaissances uniquement didactiques de celles uniquement mathématiques chez les enseignants. Ceci soulève plusieurs questions qui ont trait à la nature des « mathématiques » en didactique des mathématiques : Quels sont les liens et les différences entre didactique et mathématiques à la formation des enseignants ? Doit/peut-on les distinguer? Est-ce que cette distinction est importante, particulièrement en formation des enseignants ? Ces questions guident vers une autre, particulièrement centrale ici : S'il existe une (ou des) didactique(s) propre(s) aux mathématiques, donc une didactique des mathématiques, existe-t-il des mathématiques propres à la didactique, donc des mathématiques de la didactique ? J'explore cette question dans cet article.

III. DISCUTER DE DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES ET DE MATHÉMATIQUES DE LA DIDACTIQUE

> Il y a un certain nombre de concepts mathématiques qui n'ont pas d'intérêt pour les mathématiciens – et qui n'ont pas, de ce fait, de statut culturel ou social : par exemple l'énumération d'une collection n'est pas un concept mathématique important et c'est pourtant un concept important pour l'enseignement. Est-ce que la didactique a le droit d'introduire dans le champ des mathématiques des concepts qui lui seraient nécessaires. C'est un sujet dont il va falloir débattre avec la communauté mathématique et avec d'autres. (Brousseau 1998, p. 313)

Le nom de notre domaine d'études, « didactique des mathématiques », est une expression qui vaut la peine d'être regardée de plus près. En effet, lorsqu'on dit didactique *des* mathématiques, on peut penser qu'il y a une certaine possessivité des mathématiques par rapport à la didactique, comme si elle appartenait aux mathématiques, de la même façon qu'on dit une table *de* cuisine, une chaise *de* salon, le crayon *de* Jean, etc. Si on tente l'exercice contraire, cette fois-ci pour les mathématiques, on obtient la possessivité opposée : « mathématiques de la didactique ». Par cette expression, on affirme qu'il existe des mathématiques spécifiques à la didactique, insistant simultanément sur leur existence et sur la prédominance de la didactique (car ce serait elle qui possèderait les mathématiques). Une idée bien bizarre à première vue. Ce jeu sur les mots met toutefois en relief des distinctions qui questionnent le rôle et la signification des termes « didactique » et « mathématiques » dans ces expressions et amène à vouloir mieux les comprendre.

Pour prendre une définition souvent utilisée, on peut dire que la didactique des mathématiques s'intéresse à l'étude des phénomènes d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques. On peut être tenté, avec les nouveaux développements en recherche, de parler aussi d'utilisation des mathématiques dans des cadres autres que scolaires (les études en ethnomathématiques, par exemple). Ainsi, on peut dire que la didactique des mathématiques est le domaine d'études qui s'intéresse à l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques et aux pratiques et mobilisations diverses des mathématiques. Cette définition satisfait peut-être les chercheurs, mais probablement peu les praticiens ou les formateurs. En effet, la définition ci-haut est davantage la définition d'une didactique de recherche, pourrait-on dire, alors qu'un enseignant ou un formateur peut vouloir désigner la didactique en d'autres termes, par exemple sous l'influence de la dénomination de Martinand (1992) de « didactique praticienne ». De cette entrée sur une didactique davantage axée sur des questions de formation, la didactique des mathématiques devient une façon de faire les choses et d'approcher les questions d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques, ainsi qu'une réflexion/sensibilité à rendre communicables ou accessibles les mathématiques pour les faire apprendre, comprendre et mobiliser.

On retrouve dans ces façons de décrire notre domaine des aspects surtout reliés à l'enseignement, l'apprentissage, les pratiques, etc., ceux-ci étant connectés bien évidemment aux mathématiques. Les aspects « didactiques » priment. Toutefois, l'exercice inverse, avec l'expression « mathématiques de la didactique », donne quelque chose du genre : « des mathématiques qui ont une appréhension ou une sensibilité pour l'enseignement, l'apprentissage et les pratiques mobilisées ». Cette entrée fait réfléchir en quelque sorte à un autre champ d'intérêt, dont l'objet d'attention devient les mathématiques (ses connaissances, processus, ses modes de pensée, ses manières de faire, ses pratiques, etc.) et pour l'étude duquel l'entrée privilégiée serait la didactique ; une entrée qui offrirait une couleur particulière aux questions mathématiques abordées. Cet angle possède, d'un point de vue de la formation des enseignants, une entrée intéressante car une partie du travail de formation implique, comme plusieurs auteurs le mentionnent (Ball et Bass 2003 ; Kuzniak 2007 ; Bednarz 2001), un re-travail des mathématiques chez les futurs enseignants pour les aligner davantage aux préoccupations de classe, des élèves et d'enseignement. Ainsi, existe-t-il des mathématiques spécifiques et particulières travaillées à la formation des enseignants, à l'intérieur des « cours de didactique des mathématiques » comme nous les appelons au Québec, et qui sont propres à la didactique et existent uniquement en didactique des mathématiques, comme les mathématiques actuarielles ou celles de l'ingénieur? J'aborde cette idée dans les prochaines sections.

IV. DES MATHÉMATIQUES DE LA DIDACTIQUE : QUELQUES EXEMPLES

Tel que mentionné, plusieurs chercheurs ont souligné les difficultés à dissocier les considérations ou connaissances didactiques de celles mathématiques dans l'acte d'enseigner (voir la synthèse de Huillet 2009). Dans Bednarz et Proulx (2009), nous avons mis de l'avant l'idée que ces composantes de la pratique enseignante sont imbriquées et mobilisées en simultané. Dans la pratique et les choix faits, l'enseignant met parfois une dimension (didactique, mathématique ou pédagogique) plus en avant, mais jamais de façon isolée des autres dimensions : les décisions ne sont jamais « purement » mathématiques, didactiques ou pédagogiques, elles sont les trois en même temps et à différents niveaux. Cette idée d'imbrication peut en fait être poussée plus loin, au point d'en arriver à se demander si les mathématiques mobilisées par l'enseignant ne sont pas liées à la didactique *au point de ne pouvoir être viables sans elle*. Dans ce qui suit, j'offre des exemples permettant de discuter de cette option et d'initier une réflexion. Ces exemples proviennent de différentes sources et sont de différentes natures, tant de la formation des enseignants, de la pratique enseignante, que des travaux de recherche en didactique des mathématiques[1].

[1] Malgré que j'aborde par mes exemples des questions d'enseignement et de formation des enseignants, je ne réfère pas dans cet article aux expressions « mathematics-for-teaching » (voir Davis, 2010) ou « mathématiques pour l'enseignement » (voir Huillet, 2009), qui décrit un courant de recherche très spécifique tentant de comprendre et décortiquer les connaissances et pratiques mathématiques mobilisées par les enseignants lors de l'enseignement des mathématiques (voir le numéro thématique 29(3) de *For the Learning of mathematics,* 2009 ;

1. *Connaissances développées en formation des enseignants : des connaissances didactiques mathématisées*

Les exemples de cette section sont tirés d’un cours de formation des enseignants de mathématiques du secondaire, que j’ai donné dans mon institution. Un travail a été fait sur les questions d’opérations sur les fonctions, dans le but d’initier une réflexion et sensibilité didactique chez les étudiants au niveau de ce contenu mathématique. J’entre ici sur la nature des connaissances mobilisées par les futurs enseignants à travers ces activités.

Après un travail sur l’analyse de solutions d’élèves, autant les difficultés que les raisonnements fructueux, les futurs maîtres ont à produire deux exercices d’opérations sur les fonctions qu’ils auront à proposer à d’autres futurs enseignants, et pour lesquels ils ont à développer les critères qui guident leurs constructions. Cette tâche amène les futurs enseignants à creuser les concepts mathématiques en jeu pour arriver à développer une tâche qui n’est pas triviale et permet de travailler la notion d’opération sur les fonctions. Par cette tâche, il est évident que les futurs maîtres continuent d’approfondir et raffiner leurs compréhensions du concept en fouillant dans des cas d’exception, des difficultés conceptuelles, des cas impossibles, des cas faciles, etc., mais aussi à développer une justification expliquant en quoi un cas est facile, difficile, impossible, intéressant, etc. Les discussions des futurs enseignants sont alors autant sur les notions mathématiques en jeu pour les opérations sur les fonctions que sur l’apprentissage des notions elles-mêmes. Leur fouille « mathématique » est teintée en même temps d’une fouille « pour faire apprendre », qu’on pourrait appeler « didactique », les deux servant de critères pour produire leurs exercices. Voici quelques exemples proposés par les étudiants maîtres :

$f(x)=x^2-2$ $g(x)=-x^2+2$ $F(x)=f(x)+g(x)$	$f(x)=[2x]$ $g(x)=2x-1$ $F(x)=f(x)+g(x)$	$f(x)=\sin x$ $g(x)=-0{,}41(x-1{,}52)^2+1$ $F(x)=f(x)+g(x)$	$f(x)=2x+4$ $g(x)=-\frac{1}{2}(x+3)^2+1$ $G(x)=f(x)+g(x)$
$f(x)=x^2$ $R\to R$ $g(x)=\sqrt{x}$ $R^+\to R^+$ $F(x)=f(x)-g(x)$	$f(x)=\frac{1}{x}$ si $x\neq 0$ $g(x)=x+2$ $F(x)=f(x)-g(x)$	$f(x)=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$ $g(x)=-x^2$ $F(x)=f(x)+g(x)$	$f(x)=\lvert x\rvert$ $x\in R$ $g(x)=-\frac{1}{8}x^2$ $x\in R$ $G(x)=f(x)-g(x)$
$f(x)=\begin{cases} x+2 &]-\infty,-5[\cup]5,\infty \\ 4 & [-5,5] \end{cases}$ $g(x)=\sqrt{x}+3$ $F(x)=f(x)+g(x)$	$f(x)=-x^2+4$ $g(x)=2^x$ $E(x)=f(x)+g(x)$	$f(x)=[x+3]$ $g(x)=x+2$ $F(x)=f(x)+g(x)$	$f(x)=x^2$ $R\to R$ $g(x)=-x$ $Z\to Z$ $E(x)=f(x)-g(x)$

Ces différents exemples sont affichés au mur durant le cours et distribués par la suite à d’autres futurs maîtres pour être solutionnés et discutés. Lors du retour en grand groupe, les exercices sont discutés, critiqués, appréciés et des modifications sont proposées pour les améliorer ou les transformer. De plus, les étudiants qui ont créé les exercices ont à expliquer les critères ayant guidé leurs choix. On en profite alors pour proposer, pour chaque exercice, un autre qui est similaire mais plus simple et un autre plus difficile. Cette activité s’avère une occasion d’approfondir à nouveau les critères, ancrés dans les compréhensions mathématiques

Ball et al., 2009). Mon propos se veut plus large et touche la nature des concepts et pratiques mathématiques travaillés en didactique des mathématiques au sens large, soit à travers ses divers travaux de recherche.

des élèves, c'est-à-dire ce que ces exercices peuvent potentiellement provoquer comme compréhensions mathématiques chez les élèves. Les élèves et leurs apprentissages sont donc constamment présents à l'intérieur des critères « mathématiques » émis par les futurs enseignants pour construire ou modifier les exercices. Voici quelques exemples de critères :

- Poser des opérations qui ne sont pas uniquement des additions et faire travailler sur des soustractions, des multiplications et des divisions pour élargir ce que signifie « opérer sur des fonctions » ;
- Proposer des nombres décimaux rend l'opération difficile à calculer avec précision. Toutefois, ceci ne rend pas nécessairement la conceptualisation de l'opération difficile;
- Travailler avec des constantes permet de voir l'effet de la constante sur l'opération (autant comme image que comme multiplicateur) ;
- Travailler avec plus de deux fonctions rend le processus moins technique, une suite d'opérations permet à l'élève de démontrer vraiment sa compréhension ;
- Offrir des opérations pour lesquelles le résultat est nul à quelques endroits [addition de $f(x) = x$ et $f(x) = |x|$] (ou sur l'ensemble de la nouvelle fonction [addition de $f(x) = x$ et $f(x) = -x$]), rendant le résultat surprenant et forçant sa vérification ;
- Même idée pour la variation des images, en proposant des fonctions qui ont des images positives et négatives et pour lesquelles leur combinaison (+,-,´,¸) offrent des réponses positives ou négatives ;
- Travailler avec des fonctions continues et non-continues, ainsi que des fonctions qui ont des indéterminations, pour s'assurer de la compréhension de l'effet de l'indétermination sur l'opération possible et que les opérations ne se font pas sur des « valeurs » mais sur des images (si indéterminé, pas d'image, donc pas d'opération) [ce jeu peut être étendu à 3, 4, 5 fonctions] ;
- Même idée pour les fonctions discrètes (par exemple, N—>N) jumelées avec des fonctions continues ou définies par parties ;
- Poser des exercices pour lesquels les ensembles de départ et d'arrivée ne sont pas les mêmes et ont des restrictions (par exemple, R—>R ou 2—>2) pour s'assurer que les élèves les prennent en compte et soient vigilants ;
- Offrir des fonctions qui offrent un résultat attrayant esthétiquement, soulignant l'attrait que peut avoir les mathématiques au niveau artistique et esthétique ;
- Jouer sur des exercices ou la réponse s'obtient rapidement et d'autres qui demandent un travail plus en profondeur pour varier le type d'exercices à résoudre et aiguiser la compréhension.

Dans ces quelques critères, il est difficile de dissocier les aspects mathématiques des aspects didactiques : les deux semblent aller ensemble et se compléter. On peut se demander si les connaissances développées dans cette activité de formation sont uniquement didactiques ? Il devient rapidement évident que non seulement les étudiants maîtres ont développé leurs connaissances mathématiques à travers cette activité (ce qui est assez habituel à la formation), mais surtout que ces connaissances mathématiques développées sont ancrées dans une réflexion didactique qui les rend difficilement séparables des compréhensions « mathématiques » en soi. Cette dernière idée apparaît particulièrement intéressante à considérer lorsqu'on demande aux étudiants maîtres d'inventer un exercice d'opérations sur les fonctions *qui peut se résoudre mentalement en passant par le graphique*. Les critères développés pour les exemples choisis ne sont alors pas les mêmes que ceux développés pour la tâche précédente et ont une intention différente : développer chez l'élève une image mentale des opérations sur les fonctions, en s'assurant que le problème soit accessible mentalement. Voici quelques exemples des critères proposés :

- Faire additionner ou soustraire des fonctions simples pour développer une familiarité avec le processus d'opération de fonctions, mais aussi pour développer une image mentale sur ce qui se produit au niveau de l'image obtenue [essayer aussi avec plus de deux fonctions, en demeurant accessible mentalement] ;
- Additionner et soustraire une fonction par une fonction constante (par exemple, $f(x) = x$ et $g(x) = 3$) pour voir le résultat rapidement et comprendre l'impact de la fonction à images constantes ;
- Faire la même chose avec la multiplication et la division, en s'assurant que les fonctions soient accessibles mentalement ;
- Offrir des exercices pour lesquels la fonction résultat est la fonction nulle, pour travailler l'opération sur les valeurs d'images (addition de $f(x) = \mathrm{x}$ et $f(x) = –x$; et $f(x) = -x^2+2$ et $f(x) = +x^2–2$) ;
- Travailler sur des exemples qui guident intuitivement vers une erreur, forçant une réflexion supplémentaire sur le processus d'opération (par exemple, additionner $f(x) = |x|$ et $g(x) = x$ ou soustraire $f(x) = |x|$ et $g(x) = x$), ainsi que pour permettre de voir mentalement ce qui se produit sur des intervalles donnés ;
- Même idée avec des exercices où certaines parties des deux fonctions sont égales et le résultat de l'opération est nul (par exemple, $f(x) = |x|$ et $g(x) = x$).

Ces exemples servent à illustrer l'idée de travail didactique imbriqué aux mathématiques, le tout se faisant en simultané. Cette simultanéité permet d'entrer dans ce qui peut s'appeler des mathématiques au croisement de la didactique ou de la didactique au croisement des mathématiques. En développant leurs compréhensions mathématiques sur les opérations sur les fonctions, les futurs enseignants développent des mathématiques qui ont un sens parce qu'elles sont riches pour faire apprendre le concept d'opérations sur les fonctions. Ce ne sont pas des connaissances mathématiques en elles-mêmes, par exemple sur l'addition de fonctions uniquement pour additionner des fonctions. Ce sont des connaissances mathématiques qui deviennent pertinentes parce qu'elles sont ancrées didactiquement dans l'apprentissage des élèves. Si on enlève la composante « faire apprendre » dans les compréhensions mathématiques reliées au calcul mental d'opérations de fonctions, peut-être enlève-t-on l'intérêt mathématique à savoir faire ceci pour un enseignant? Distinguer mathématiques et didactique est dans ce cas difficile. On pourrait aussi dire que ce type de travail représente un travail habituel réalisé dans un cours de formation à l'enseignement des mathématiques. Il semble alors important de réaliser que si c'est le rôle de la didactique de travailler à ce type de connaissances didactiques mathématisées, alors l'argument que ce type de connaissances mathématiques appartient à la didactique des mathématiques est justifié…

2. *Rationalité des mathématiques mobilisées dans l'enseignement : des connaissances mathématiques didactisées*

Alors que j'ai préalablement parlé de connaissances didactiques mathématisées, car constamment imbriquées dans un contenu mathématique et prenant sens dans ce contenu, j'aborde ici l'idée de connaissances mathématiques « didactisées ». Cette entrée met de l'avant une certaine légitimité mathématique différente, ancrée dans une rationalité sous-jacente qui leur donne un sens…didactique !

L'exemple utilisé provient de la pratique d'une enseignante répertoriée à l'intérieur de la recherche de Saboya (2010) et avec laquelle ma collègue N.Bednarz et moi-même avons soutiré bon nombre d'analyses sur les questions d'imbrication de didactique et de mathématiques (Bednarz et Proulx 2010, 2011). La vignette qui suit concerne l'écriture exponentielle où Nadia, l'enseignante, travaille avec ses élèves à simplifier l'expression $\frac{10^4+10^5}{10^2+10^3}$.

Nadia : $\frac{10^4+10^5}{10^2+10^3}$, on ne peut rien faire avec ça. Ça reste comme ça, on ne peut rien faire.

Lidia : Pourquoi ça ne…

Nadia : Quand c'est des « plus » qu'il y a entre les deux on laisse ça comme ça, on ne peut rien faire.

France : On peut séparer…

Nadia : Non on ne peut pas séparer ça…

France : Ah non?

Nadia : Là si tu le sépares ça fait $\frac{10^4}{10^2}+\frac{10^5}{10^3}$. Ça veut dire que lorsque tu additionnes des fractions, tu additionnes en haut et en bas. Est-ce qu'on a le droit?

France : Non.

Nadia : Non, donc quand tu sépares ça en deux, c'est ça que tu fais.

Anne-Julie : Mais est-ce qu'on peut faire juste $\frac{10^4}{10^2}$?

Nadia : Non. Qu'est-ce que tu fais quand tu fais ça là $\frac{10^4}{10^2}+\frac{10^5}{10^3}$. C'est ça que tu as fait Anne-Julie?

Anne-Julie : Oui.

Nadia : Ça ne marche pas ça, parce que quand tu me dis que tu additionnes deux fractions, tu additionnes en haut et tu additionnes en bas.

Carmen : Mais elles sont additionnables les fractions.

Nadia : Elles sont additionnables, mais uniquement lorsqu'elles ont le même dénominateur.

Une première réaction à cette discussion est de dire que $\frac{10^4+10^5}{10^2+10^3}$ est simplifiable, donnant $\frac{10000+100000}{100+1000}=\frac{110000}{1100}=100$. Dire que cette expression n'est pas simplifiable est une erreur en fonction du savoir mathématique de référence. Toutefois, Nadia ne commet pas une erreur mathématique. En fait, Nadia sait très bien que cette expression se simplifie encore. À titre d'exemple, dans une rencontre de recherche, elle explique ceci à propos de l'exemple $\frac{a^2+a^3}{a^5+a^2}$:

> Je divise par a en haut et en bas mais j'ai a^2+a^3, donc ça va faire $\frac{a+a^2}{a^4+a}$. Et là on regarde est-ce qu'on peut encore simplifier ? Je re-divise encore par a. Je vais avoir $\frac{1+a}{a^3+1}$ et là je ne peux plus rien faire. Et

> j'ai toujours le *plus* qui est là, on ne peut plus simplifier. Moi je pense que cette approche permettrait de contourner le problème [des élèves avec la simplification d'expressions].

Dans la vignette de départ, Nadia est en contexte de travail de simplification de notations exponentielles entre elles. D'une certaine façon on peut avancer qu'en contexte de notations exponentielles cette expression ne se simplifie plus au niveau des exposants entre eux sans les transformer en autre chose (comme je l'ai fait ou comme Nadia le propose par la division). Ceci amène une première couche de contexte, qu'on pourrait appeler « scolaire » et reliée à une certaine didactique, qui fait en sorte que le savoir mathématique mobilisé, qui semble fautif ou incomplet, est adéquat dans son contexte d'utilisation. On peut dire que ce savoir a légitimité dans ce contexte, et non dans un contexte général de simplification. Mais il y a plus.

C'est en fait pour éviter les erreurs chez ses élèves que Nadia « invente » cette nouvelle connaissance sur les exposants et sur la simplification. C'est ce qui va amener Nadia à dire que l'on ne peut simplifier l'expression et que cela « reste comme ça », parce qu'elle est sensible aux erreurs d'élèves reliées à séparer l'expression en fractions ou à jumeler ensemble les exposants dans un contexte additif. Est-ce un savoir légitime? Oui, dans ce contexte didactique et d'enseignement. Par contre, il n'est probablement pas légitime en contexte de communauté mathématicienne intéressée à simplifier une expression numérique...

Cet extrait montre une mobilisation de connaissances mathématiques qui ont légitimité en contexte didactique, en fonction de la situation d'enseignement et d'apprentissage. Ce ne sont pas toutefois des connaissances « purement » mathématiques, car, sorties de leur contexte didactique, elles sont difficilement légitimes. Ce sont des compréhensions mathématiques spécifiques qui ont leur source dans une réflexion didactique. Ces mathématiques, pourrait-on dire, sont modulées par les intentions didactiques de cette enseignante. Ces connaissances sont-elles des exemples de mathématiques appartenant à la didactique, de mathématiques de la didactique? Peut-être ceci en fait des « mathématiques didactisées », qui n'existent ou ont un intérêt que dans le champ d'études de la didactique des mathématiques…

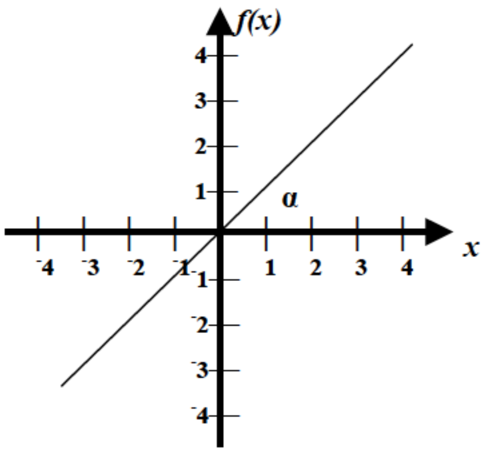
3. Concepts mathématiques développés en didactique

Alors que les deux premiers exemples concernaient des actions ou connaissances mathématiques reliées à la formation des enseignants et la pratique enseignante, les trois exemples suivants concernent des concepts mathématiques qui ont été développés suite à des préoccupations, intérêts ou sensibilités didactiques à l'intérieur de travaux de recherche en didactique des mathématiques. Les trois exemples utilisés pour illustrer cette idée sont le concept d'idécimal, le concept de pente analytique et géométrique et le concept de reste variable de la division.

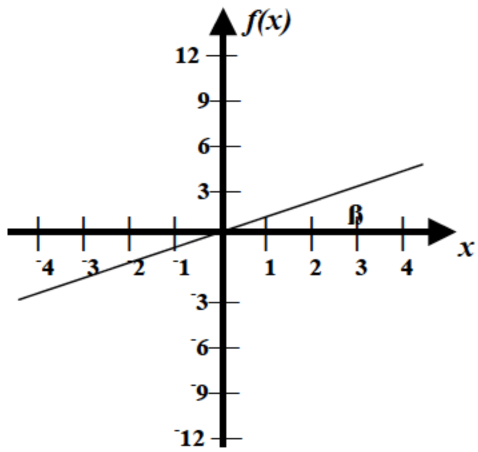
Le concept d'idécimal. Ce concept a été développé par Bronner (1997) pour désigner un nombre qui n'est pas décimal. Par exemple, 1/3 serait *idécimal*, c'est-à-dire non décimal, car 1/3 est une fraction irréductible et son dénominateur n'est pas sous la forme d'un produit de facteurs égaux à 2 et à 5. Cette distinction mathématique entre décimal et idécimal est fort intéressante, particulièrement au niveau didactique alors qu'on voit bien les distinctions qui peuvent être faites pour insister sur certaines propriétés et aspects des nombres rationnels avec lesquels on travaille. Ce type de distinction peut amener à réfléchir en profondeur sur les nombres rationnels, les décimaux, les périodiques, etc., et donc l'invention de ce concept est fort intéressante dans une orientation didactique. Bronner argumente en fait que cette catégorisation est plus pertinente, pour les élèves du secondaire, que la catégorie rationnels/irrationnels. Toutefois, est-ce que ce concept a une légitimité mathématique en dehors de la didactique ? Est-ce un savoir reconnu par la communauté mathématicienne? Une chose certaine est que ce savoir est né en didactique, avec des sensibilités didactiques pour l'apprentissage du concept de nombre rationnel, et il prend légitimité dans ce contexte.

La pente analytique et la pente géométrique. Le concept de pente semble un bon exemple d'un concept qui a été tenu pour acquis comme non problématique assez longtemps et que la didactique (ou les gens sensibilisés aux questions d'enseignement et d'apprentissage des mathématiques) a révélé comme flou ou problématique. Par exemple, dans leur article, Zaslavsky, Sela et Leron (2002) montrent comment l'idée de pente (*slope* en anglais) peut à la fois être interprétée comme objet géométrique ou objet analytique, voire les deux à la fois, chez différentes personnes travaillant avec les mathématiques (mathématiciens, didacticiens, enseignants, élèves). Voici l'exemple de tâche (traduite) qu'ils ont proposé aux différents participants, leur demandant en premier lieu de résoudre la tâche 1 et ensuite la tâche 2.

Tâche 1:
Le graphique de la figure 1 représente la fonction ***f*** tel que ***f*: *x*→ *x***



Tâche 2:
Un élève a tracé le graphique de la même fonction ***f*** (tel que ***f*: *x*→ *x***) dans un environnement informatisé et a obtenu le graphique suivant:



Répondez aux questions suivantes:
1. Quelle est la pente de la fonction ***f*** ? Comment l'avez-vous déterminée?
2. Est-ce que le graphique de ***f*** trace une bissectrice entre les deux axes? Comment le savez-vous?
3. Pouvez-vous trouver la tangente de l'angle entre le tracé du graphique et l'axe des *x*? Si vous le pouvez, quelle est la valeur? Comment l'avez-vous calculée? Si non, pourquoi? Que représente cette donnée, cette tangente?

Pour Zaslavsky et al., ce type de tâche et la diversité des interprétations et réponses recueillies souligne l'intérêt de faire une distinction entre pente (géométrique) et taux de variation (pente analytique) pour éviter les confusions[2]. Toutefois, cette distinction est-elle légitime comme

[2] Je ne peux parler que du Québec, car je ne connais pas assez le contexte ailleurs sur les changements survenus dans les programmes d'études et les pratiques d'enseignement, mais le concept de « taux de variation », étiqueté comme tel, n'était pas vraiment présent dans l'enseignement avant les mi-années 1990 au secondaire, alors

savoir de référence au niveau de la communauté mathématicienne ? Dans l'étude en question, la diversité des réponses fournies par les mathématiciens entre eux (et les didacticiens entre eux, en plus de celle retrouvée chez les enseignants et les élèves) permet de questionner cette légitimité. Peut-être que la légitimité mathématique de la notion de pente et de taux de variation (tel qu'employée au secondaire) se situe dans le cadre de la didactique ou dans les réflexions, préoccupations et sensibilités didactiques qui les accompagnent ?

Le reste variable de la division. Ce troisième exemple illustre un travail didactique pouvant amener au développement de propositions sur des concepts mathématiques, créant une rupture avec les savoirs mathématiques de référence, mais possédant une richesse didactique pour en comprendre ces mêmes concepts.

Tel que l'explique Brown (1981), la définition de la division euclidienne respecte certaines conventions – ou conditions – ainsi le reste r est défini comme étant situé entre 0 et le diviseur[3]. Ainsi, $18 \div 4$ donne $4r2$ et non $3r6$, malgré que les deux sont conceptuellement acceptables au niveau du raisonnement sur le processus de division sous-jacent. Brown s'est en fait intéressé à cette idée suite à l'analyse des compréhensions d'une élève, Sharon, ce qui l'a amené à considérer l'idée de reste variant pour lequel différentes réponses seraient données à la division en fonction du reste. Ainsi, $18 \div 4$ pourrait donner $4r2$, $3r6$, $2r10$, $5r^{-}2$, etc. Cette idée de reste variable de la division, au niveau didactique, permet particulièrement de questionner la présence des conventions et définitions en mathématiques, distinguant alors l'idée de comprendre un concept et celui de connaître la convention, un jeu parfois enfoui à l'intérieur de la procédure souvent tenue pour acquise dans la compréhension mathématique.

Avec une collègue (Proulx et Beisiegel 2009), nous nous sommes intéressés à mieux comprendre l'impact de cette définition et le sens qui peut être donné à la division *avec les nombres négatifs*. Sans vouloir créer un reste de division variable comme le fait Brown, le travail fait ressortir qu'en appliquant la définition de la division avec les nombres négatifs ce sont les réponses elles-mêmes qui sont variables. Ainsi, que vaut $^{-}18 \div 4$? $^{-}5r2$? $^{-}4r^{-}2$? $^{-}6r^{-}6$? Quelle réponse respecte la convention? Doit-on développer une convention de la division pour les nombres négatifs ? Comment la définir ?

La question qui se pose dans le cas de Brown et du nôtre est si ce type de questionnement mathématique a légitimité dans la communauté mathématicienne et si les savoirs qui en sont développés (reste variable, définition de division chez les négatifs) ont légitimité mathématique en dehors de la didactique. Une chose certaine est que ces idées ont été développées à partir d'un intérêt didactique. Ainsi, ces connaissances mathématiques ont légitimité dans le champ de la didactique, parce que tout comme le concept d'idécimal de Bronner, ils ouvrent sur une sensibilité mathématique qui semble porteuse. Il y a en effet dans ces idées un potentiel mathématique, en dehors des créneaux habituels des savoirs de références, pour l'apprentissage mathématique et la compréhension du concept. Est-ce un potentiel « didactisé », c'est-à-dire une façon de rendre communicable les concepts mathématiques? Est-ce que ces mathématiques didactisées représentent des exemples de mathématiques de la didactique?

Ces idées m'apparaissent, comme didacticien des mathématiques (ou mathématicien de la didactique!) fort pertinentes et porteuses pour la formation des enseignants, en ce sens qu'elles aident à développer des « façons de faire ou une réflexion/sensibilité à rendre communicables ou accessibles les mathématiques pour les faire apprendre et comprendre » ou

---

qu'on ne parlait que de pente. À titre d'exemple, des collègues et moi-même avons été initiés à ce concept pour le secondaire uniquement par la didactique lors de nos études universitaires.

[3] Je parle ici de la division euclidienne, mais on retrouve ce principe pour l'algorithme de division, alors qu'il faut continuer à diviser tant que le reste est plus gros que le diviseur.

encore de développer des connaissances « mathématiques qui ont une appréhension ou une sensibilité sur l'enseignement, l'apprentissage et les pratiques mobilisées ». Par contre, en dehors de la communauté didacticienne, on est en droit de se questionner sur l'intérêt, la viabilité ou la pertinence de ces concepts « mathématiques ». Mais, peut-être est-ce là aussi des exemples de mathématiques de la didactique : des savoirs mathématiques qui n'existeraient ou n'auraient légitimité que dans le champ de la didactique des mathématiques…

V. REMARQUES FINALES ET OUVERTURES SUR LA FORMATION

Il m'est arrivé d'affirmer, en conférence, que les enseignants autant du primaire que du secondaire n'ont pas besoin de connaître les mathématiques avant de faire de la didactique (Proulx 2010). Mes propos étaient maladroits, car ils étaient entendus comme si j'affirmais que les mathématiques n'étaient pas importantes en didactique des mathématiques ou pour les enseigner. Par contre, mon argument était plutôt que par la didactique des mathématiques les enseignants arrivent à ré-apprendre les mathématiques qui leur font ou non défaut ; une bien vieille idée s'il en est une. Mes propos voulaient aussi contraster avec la critique fréquemment formulée au fait que les futurs enseignants (secondaire/primaire) connaissent mal ou ne connaissent pas suffisamment les mathématiques et qu'il est impossible de faire de la didactique avec eux sans qu'ils aient fait un « rattrapage mathématique ». Mes travaux de recherche menés sur ces questions à la formation continue des enseignants du primaire et du secondaire, ainsi que mes propres pratiques de formateur à la formation initiale au primaire et au secondaire, m'amènent à être en désaccord avec cette vision linéaire situant les mathématiques comme préalables au travail didactique dans le processus de formation des enseignants ; de plus, je considère que 12 ans de scolarité en mathématiques (au Québec du moins, et parfois jusqu'à 14 ans pour les enseignants du secondaire) avant d'entrer à l'université en formation des enseignants est suffisant comme expérience *préalable* en mathématiques.

Cette intervention maladroite continue toutefois à me faire réfléchir, particulièrement en lien avec les questions et idées avancées ici. Car, s'il existe vraiment des mathématiques spécifiques à la didactique des mathématiques, ou un travail mathématique propre à la didactique (Corriveau 2010), alors il peut paraître normal, dans un premier temps, que les futurs enseignants éprouvent des difficultés mathématiques dans les cours de formation à l'enseignement (que nous appelons au Québec des cours de didactique des mathématiques). En effet, celles-ci représentent de « nouvelles » mathématiques ou de « nouvelles » façons de faire et d'appréhender les concepts et raisonnements en mathématiques, et ils ne les ont pas vraiment rencontrées jusqu'à maintenant dans leur parcours scolaire (les programmes d'études du primaire et du secondaire n'ont pas en effet comme objectif de former des futurs enseignants!). Dans un deuxième temps, le travail simultané de mathématiques et de didactique dans un cours de formation à l'enseignement apparaît pertinent, car les mathématiques à voir sont celles de la didactique et ne peuvent que difficilement être travaillées ailleurs que dans ce type de cours (les mathématiques de la didactique ne sont en effet pas celles du mathématicien, ni de l'ingénieur, etc., et ni celles des programmes d'études !).

Ceci étant dit, une chose demeure certaine : ces réflexions sont importantes pour les questions de formation des enseignants, où on s'affaire souvent à mieux comprendre et mieux penser les contenus de formation. Ces réflexions sur la nature des mathématiques en didactique sont importantes parce que, d'un côté, les critiques vis-à-vis les connaissances mathématiques des futurs enseignants sont nombreuses et que ce contexte se doit sérieusement d'être repensé et nuancé et, d'un autre côté, parce que les questions d'articulation de formation mathématique et de formation didactique en dépendent et seront pensées autrement en fonction de la façon de percevoir et conceptualiser *ces* mathématiques. La question de savoir s'il existe des mathématiques propres à la didactique reste donc entière, peut-être de la même façon que celle de savoir s'il existe réellement une didactique spécifique aux mathématiques. Toutefois, cette question est importante et mérite d'être explorée, particulièrement parce que les mathématiques jouent pour plusieurs un rôle central en didactique des mathématiques et à la formation des enseignants.

REFERENCES

Ball D. L. (2000) Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, 51*(3), 241-247.

Ball D. L., Bass H. (2003) Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. *Actes de la rencontre 2002 du Groupe Canadien d'étude en didactique des mathématiques* (pp. 3-14). Edmonton, Canada: GCEDM.

Ball D. L., et al. (2009) RF01: Teacher knowledge and teaching. *Proceedings of the 33rd conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 121-150). Thessalonique, Grèce: PME.

Bednarz N. (2001) Didactique des mathématiques et formation des enseignants : le cas de l'Université du Québec à Montréal. *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies*, *1*(1), 61- 80.

Bednarz N. (2007) Ancrage de la didactique des mathématiques au Québec : à la recherche de sens et d'une cohérence. *Actes du colloque 2007 du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec* (pp. 21-61). UQÀR : GDM.

Bednarz N., Perrin-Glorian M.-J. (2003) Formation à l'enseignement des mathématiques et développement de compétences professionnelles: Articulation entre formation mathématique, didactique et pratique. *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2003*. Tunis: Éditions CNP.

Bednarz N., Proulx J. (2009) Knowing and using mathematics in teaching: Conceptual and epistemological clarifications. *For the Learning of Mathematics 29*(3), 11-17.

Bednarz N., Proulx J. (2010) De quel contexte parle-t-on ? Une exploitation de mathématiques professionnelles avec les enseignants. *Actes du colloque 2010 du Groupe des Didacticiens de Mathématiques du Québec* (pp. 182-192). Moncton, N.-B.: GDM.

Bednarz N., Proulx J. (2011) An attempt at defining teachers' mathematics through research on mathematics at work. *Actes du colloque CERME-7* (pp. 2569-2579). Rseszow, Poland: University of Rseszow & ERME.

Bronner A. (1997) *Etude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée.* Thèse de doctorat. Université J. Fourier. Grenoble, France.

Brousseau G. (1998) *Théorie des situation didactiques*. Grenoble : La Pensée sauvage.

Brown S.I. (1981). Sharon's 'Kye'. *Mathematics Teaching 94*, 11-17.

Corriveau C. (2010) Que signifie faire des mathématiques dans un cours de didactique des mathématiques ? In Proulx J., Gattuso L. (dirs.) (pp. 159-163) *Formation des enseignants en mathématiques : Tendances et perspectives actuelles.* Sherbrooke, QC : Éditions du CRP .

Davis B. (2010) Concept studies : designing settings for teachers' disciplinary knowledge. *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol.1, pp. 63-78). PME.

Even R. (1993) Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education 24*(2), 94-116.

Even R. (1990) Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics 21*, 521-544.

For the Learning of Mathematics (2009) *Knowing and using mathematics in teaching*, *29*(3) [numéro thématique].

Huillet D. (2009) Mathématiques pour l'enseignement : une approche anthropologique. *Actes du colloque Espace Mathématique Francophone 2009*. Dakar, Sénégal.

Kuzniak A. (2007) Savoir mathématique et enseignement didactique et pédagogique dans les formations initiales du premier et du second degrés. *Recherche et formation* 55, 27-40.

Martinand J.-L. (1993) Organisation et mise en œuvre des contenus d'enseignement. *Actes de colloque Recherches en didactiques: contribution à la formation des maîtres, 13-15 février 1992* (pp. 25-26). Paris : Éditions Jacques Colomb.

Moon B. (1986) *The 'new maths' curriculum controversy: An international story*. London : Falmer Press.

Proulx J. (2010, juin) *Les enseignants du secondaire doivent-ils vraiment connaître et maîtriser les concepts mathématiques à enseigner avant de faire de la didactique des mathématiques ?* Texte présenté lors du colloque 2010 du Groupe des Didacticiens de Mathématiques du Québec. Moncton, N.-B. : GDM.

Proulx J., Beisiegel M. (2009) Mathematical curiosities about division of integers. *The Montana Mathematics Enthusiast 6*(3), 411-422.

Proulx J., Gattuso L. (dirs.). (2010) *Formation des enseignants en mathématiques : Tendances et perspectives actuelles.* Sherbrooke, QC : Éditions du CRP.

Saboya M. (2010) *Élaboration et analyse d'une intervention didactique co-construite entre chercheur et enseignant*. Thèse de doctorat. Université du Québec à Montréal. Montréal, Canada.

Shulman L.S. (1986) Those who understand teach: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher 15*(2), 4-14.

Zaslavsky O., Hagit S., Leron U. (2002) Being sloppy about slope: The effect of changing the scale. *Educational Studies in Mathematics 49*(1), 119-140.

FORMATION D'ENSEIGNANTS EN MATHÉMATIQUES À L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE BAMAKO : QUELLE ARTICULATION ENTRE MATHÉMATIQUES ET DIDACTIQUE?

Mamadou Souleymane SANGARÉ[*]

Résumé – Dans le cadre de la reforme Licence-Master-Doctorat, nous menons une étude exploratoire sur les rapports qui devraient être établis entre les mathématiques et la didactique des mathématiques, sous le double aspect du contenu et de l'approche de formation. Un questionnaire d'entretien est ainsi élaboré autour de questions contenues dans le texte d'appel à contribution du GT1 ; cinq formateurs de mathématiques et cinq formateurs de didactique des mathématiques se sont prêtés à l'entretien. Une synthèse des réponses recueillies a permis d'identifier quelques pistes pour une restructuration des deux types de formation selon les préconisations liées au LMD.

Mots-clefs : Formation d'enseignants, mathématiques, didactique des mathématiques, articulation, système Licence-Master-Doctorat

Summary – In the framework of Licence-Master-Doctorate reform we undertake an exploratory study on the relations that should be established between mathematics and the didactic of mathematics, under the double aspect of content and training approach. For this purpose, an interview questionnaire is designed around questions stated in the call for contribution of GT1; five math trainers and five trainers of math didactic have been interviewed. An analysis of collected answers allowed us to identify some ways for a restructuring of the two types of training according to the recommendations related to LMD.

Key Words: training of teachers, mathematics, math didactic, articulation, Licence-Master- Doctorate system

I. INTRODUCTION

Le passage du système actuel d'enseignement supérieur au système Licence-Master-Doctorat (LMD[1]) au Mali, est considéré comme un enjeu institutionnel majeur pour améliorer de façon significative la qualité interne et externe des formations effectuées dans cet ordre d'enseignement. L'École Normale Supérieure de Bamako (ENSUP) est au cœur de cette réforme ; celle-ci touche tous les domaines de la formation d'enseignants. De façon récurrente, elle concerne toutes les catégories d'acteurs impliqués dans la formation. Une équipe de formateurs en didactique des mathématiques[2] mène actuellement une étude exploratoire sur la restructuration de la formation au sein du Département d'Enseignement et de Recherche de Mathématiques (DER), de l'École Normale Supérieure de Bamako. Il s'agit d'explorer d'éventuelles pistes pour circonscrire les contenus et les approches de formation d'enseignants en mathématiques, dans une perspective de basculement du système existant vers le système Licence-Master-Doctorat.

La motivation de cette étude résulte de certaines préconisations fortes qui sous-tendent la réforme en cours. Ainsi, les contenus de formation doivent être élaborés en termes d'Unité d'Enseignement (UE), pouvant impliquer plusieurs champs disciplinaires surtout en formation

[*] Ecole Normale Supérieure de Bamako – Mali – mamadoussangare@yahoo.fr

[1] Le basculement vers le système LMD au Mali, doit se réaliser selon le guide du Réseau pour l'Excellence de l'Enseignement Supérieur en Afrique de l'Ouest- REESAO (2008). *Guide de Formation du LMD*. Consulté le 18 octobre 2011 dans http://www.cames.bf.refer.org/IMG/pdf/LMD_Toolkit_-final_draft_Complete.pdf

[2] Il s'agit de l'Équipe de Didactique des Mathématiques (EDiMath) du Département d'Enseignement et de Recherche (DER) de Mathématiques de École Normale Supérieure de Bamako.

© Sangaré Mamadou Souleymane (2012) Formation d'enseignants en mathématiques à l'École Normale Supérieure de Bamako : quelle articulation entre mathématiques et didactique des mathématiques ? In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT1, pp. 228–239). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

professionnelle. Pour la formation mathématique des enseignants, cette préconisation incite à interroger les contenus actuels des formations mathématique et didactique dont les rapports se caractérisent par un cloisonnement. Aussi, nous tentons d'identifier certaines pistes permettant d'établir un lien entre ces deux contenus de formation.

Par ailleurs, les stratégies préconisées pour une meilleure professionnalisation des formations, doivent se concevoir à travers une double alternance : entre la formation disciplinaire et la formation professionnelle, entre l'établissement de formation et le milieu professionnel en privilégiant un encadrement pédagogique en équipe pluridisciplinaire. En formation d'enseignants en mathématiques, quelle approche préconiser en mathématiques et en didactique? Aussi, l'objectif de cette étude exploratoire est l'élaboration d'un avant-projet en vue d'établir une feuille de route sur les deux types formation dans le cadre du basculement de l'École Normale Supérieure de Bamako vers le système LMD.

L'intérêt accordé aux questions sur la formation mathématique des enseignants s'est considérablement accru ces dernières années ; en particulier on assiste à un développement significatif des recherches liées aux rapports qui devraient exister entre les formations mathématique et didactique de l'enseignant. Cette problématique est souvent abordée à partir de la complexité liée au travail de l'enseignant en mathématiques (Robert 2003 et 2010). Mais elle suscite aussi des points de vue opposés sur l'enseignement des mathématiques, comme ceux soutenus respectivement par Bkouche (2010) et Thomas (2010).

II. CONTEXTE DE L'ÉTUDE

1. *Aperçu du système éducatif malien*

Le système éducatif au Mali est structuré en trois ordres d'enseignement. La pyramide s'appuie d'abord sur un bloc unique appelé Enseignement Fondamental ; il est composé d'un premier cycle de six ans (correspondant au primaire) et d'un second cycle de trois ans (correspondant à peu près au collège en France). Ce bloc unique est suivi par l'Enseignement Secondaire avec deux composantes : un enseignement secondaire général étalé sur trois ans ; un enseignement technique et professionnel avec une filière courte de deux ans et une filière longue de quatre ans. Enfin, suit l'Enseignement Supérieur qui se compose des universités, des instituts, et des grandes écoles dont l'École Normale Supérieure de Bamako.

2. *L'existant sur les formations mathématique et didactique à l'ENSUP de Bamako*

La formation d'enseignants à l'École Normale Supérieure de Bamako comporte deux filières.

La première filière est celle des Professeurs d'Enseignement Fondamental (PEF)[3]; elle a une durée de formation de quatre ans. Le recrutement s'effectue sur concours professionnel ; le niveau minimal est celui de maître principal (à peu près le niveau Baccalauréat). Les deux premières années sont consacrées à des renforcements disciplinaires correspondant au niveau du DEUG. La troisième année est réservée à l'enseignement de la pédagogie et de la didactique. La quatrième année comprend un stage pratique avec un volet administratif et un volet pédagogique, en lien étroit avec la préparation d'un rapport de stage. L'option sciences prépare à l'enseignement des mathématiques, des sciences physiques, des sciences de la vie et de la terre ; il n'existe pas de lien entre ces trois disciplines tant au niveau des contenus qu'au niveau des méthodes de formation.

[3] Le Professeur d'Enseignement Fondamental enseigne au Second Cycle Fondamental (équivalent du collège en France).

La deuxième filière, celle des Professeurs d'Enseignement Secondaire (PES)[4], a une durée de formation de deux ans. Le recrutement s'effectue sur concours direct, le niveau minimal requis est la licence. En option mathématiques, objet de cette étude exploratoire, la première année est consacrée aux cours intitulés « compléments de mathématiques » et au cours de didactique (*Tableau 1*).

Compléments de Mathématiques			**Didactique des Mathématiques (DDM)**		
Enseignements	**Nombres d'heures par an**	**Nombres de formateurs**	**Enseignements**	**Nombres d'heures par an**	**Nombres de formateurs**
Algèbre	*75*	*2*	Fondements de la DDM	*30*	*1*
Analyse	*75*	*2*	Élaboration et conduite de situations d'enseignement-apprentissage	*45*	*2*
Logique mathématique	*75*	*2*	Études des Programmes et de Manuels	*75*	*2*
Géométrie	*75*	*2*	Enseignement de la géométrie au secondaire	*75*	*2*
Probabilité & Statistique	*45*	*1*	Mathématiques et Langues	*50*	*1*
Total	***345 h***	***9***	**Total**	***275 h***	***8***

Tableau 1 *– Enseignements de mathématiques et de didactique des mathématiques en 1ère année PES*

Généralement, chaque enseignement est assuré par un enseignant-chercheur spécialiste de la discipline qui en assure la responsabilité; il est secondé par un assistant détenteur d'un DEA dans la même discipline. Les contenus et les dispositifs respectifs de formation sont élaborés et mis en œuvre de façon indépendante. Les contenus de formation mathématique sont considérés comme des compléments de la formation mathématique reçue à l'université.

En plus des enseignements indiqués ci-dessus, la première année comporte l'observation de classes (*50* heures) et les TICE (*25* heures). La deuxième année PES est consacrée essentiellement à la psychopédagogie, (*50* heures/an), à des compléments de didactique (*30* heures), au stage (*75* heures/an) et au mémoire professionnel à travers les séances (*50* heures).

III. MÉTHODOLOGIE

Le choix d'une étude exploratoire se justifie par le fait que le système LMD est nouveau pour toutes les catégories socioprofessionnelles impliquées ou concernées dans sa conception et sa mise en œuvre à l'École Normale Supérieure de Bamako (administration, formateurs, élèves-professeurs, promoteurs d'école, etc.). Deux ateliers de trois journées chacun ont été organisés sur les principaux axes du système LMD et les méthodes d'élaboration des offres de formation. Cependant, cette formation s'est avérée insuffisante ; elle portait le plus souvent sur des généralités qui prenaient rarement en compte les attentes des formateurs liées aux spécificités des contenus de formation dont ils ont la charge. En particulier, les aspects relatifs

[4] Au Mali, le Professeur d'Enseignement Secondaire enseigne au lycée.

aux rapports entre les contenus de formation au niveau des parcours de formation ont été très peu abordés.

Ainsi, la méthodologie élaborée s'appuie sur une collecte initiale d'informations auprès des deux groupes de formateurs, en mathématiques et en didactique ; ensuite, il est procédé à un traitement conséquent de celles-ci afin d'établir dans ses grandes lignes une feuille de route permettant d'étudier de façon systématique les rapports qui devraient exister entre les formations mathématique et didactique, en filière Professeurs d'Enseignement Secondaire, option mathématiques dans le cadre du basculement de l'ENSUP de Bamako vers le système LMD. Cinq formateurs de chaque groupe ont été sélectionnés suivant le critère lié à leur inscription sur les emplois du temps officiels des cinq dernières années au niveau du Département d'Enseignement et de Recherche (DER) de mathématiques de l'ENSUP de Bamako. Ces dix formateurs sont parmi ceux qui ont dans le système actuel de l'ENSUP, une expérience avérée dans le domaine de la formation d'enseignants en mathématiques ; de surcroît, ils sont parmi ceux qui sont retenus pour l'élaboration des contenus de formation dans le cadre du LMD. L'auteur de cette étude exploratoire ne fait pas partie des dix formateurs sélectionnés.

Un questionnaire d'entretien a été élaboré ; il s'appuie essentiellement sur les questions d'orientation du groupe de travail GT1.

Qu'entend-on par « connaissances mathématiques pour l'enseignement au secondaire » ?

Quels devraient être la nature et le niveau de connaissances mathématiques des enseignants du secondaire?

Quel type de connaissances mobilisent les enseignants du secondaire dans leurs pratiques ?

Quelles approches en formation pour la filière PES, option mathématiques?

L'étude de ces questions est au cœur de l'une des plus importantes préconisations pour le passage au LMD de l'ENSUP : l'orientation des formations d'enseignants vers une plus grande professionnalisation. Cette préconisation est explicitement rappelée au début de chaque entretien. Ces questions ont été déclinées en vingt-quatre items ; à chaque item est attribué un objectif. Il s'agit d'accéder aux avis des formateurs interrogés sur certains aspects du système actuel de formation et sur ceux liés aux préconisations du système LMD. Le même questionnaire a été proposé aux deux groupes de formateurs sélectionnés. La durée d'un entretien était d'environ cent minutes.

Avec la taille très réduite de l'échantillon, la technique de traitement adoptée s'appuie sur l'interprétation et la comparaison des discours tenus par les deux groupes de formateurs en faisant ressortir autant que possible leurs avis respectifs sur les questions citées ci-dessus. Une synthèse de ce traitement portera sur l'identification d'éventuelles cohérences et/ou régularités des avis émis, sur d'éventuels points de convergence ou de divergence des deux groupes, à propos certaines questions clés pour l'élaboration des contenus et des stratégies de formation initiale des enseignants en mathématiques et en didactique. Cette synthèse doit être l'objet d'une restitution à l'intention de tous les formateurs de l'ENSUP impliqués dans la formation initiale des enseignants de mathématiques.

IV. PRINCIPALES PISTES IDENTIFIÉES

Nous donnerons dans ce texte certains avis émis sur des items que nous estimons significatifs par rapport aux objectifs de cette étude exploratoire. Les tableaux établis ci-dessous sont donnés uniquement à titre illustratif; ils ne peuvent être l'objet de traitement quantitatif pour en tirer des conclusions.

1. Qu'entend-on par « connaissances mathématiques pour l'enseignement » ?

Item$_1$: Les connaissances mathématiques du professeur d'enseignement secondaire sont-elles distinctes de :

celles de l'ingénieur ? Justifiez votre réponse.

celles de l'économiste ? Justifiez votre réponse.

L'objectif de cet item était de recueillir les avis des formateurs concernés sur d'éventuelles distinctions entre les connaissances mathématiques du professeur de mathématiques et celles de ces deux corps de métiers cités. A priori, la quasi-totalité des formateurs répondront par l'affirmative en raison de leur expérience avérée dans la formation d'enseignants en mathématiques et en raison des conséquences constatées sur le terrain du recrutement d'ingénieurs et d'économistes de formation depuis dix ans comme professeurs contractuels de mathématiques au secondaire[5]. Cependant, leurs avis seraient plus significatifs par rapport à nos objectifs, si ceux-ci s'accompagnent de justificatifs faisant intervenir des éléments distinctifs entre les mathématiques du professeur de celles de l'ingénieur ou de l'économiste.

Les dix formateurs ont répondu par l'affirmative. Les justifications avancées sont distinctes, mais elles ne semblent pas antinomiques.

- Pour les formateurs de mathématiques, leur justification se retrouve presque dans celle proposée par l'un des leurs: « L'ingénieur ou l'économiste utilise des recettes, des formules, des algorithmes, des modèles, mais pas de concepts mathématiques.»
- Pour les formateurs de didactique, la justification relève de la distinction entre les Organisations Mathématiques liées respectivement aux contenus de formation en mathématiques des ingénieurs ou des économistes avec celles conçues pour la formation des professeurs de mathématiques du secondaire.

Cependant, les pistes liées à la méthodologie d'élaboration d'une feuille de route pour le passage au LMD seraient mieux éclairées si des avis liés aux spécificités du métier de professeurs de mathématiques étaient émis.

Item$_2$: Les mathématiques à enseigner en première année PES à l'ENSUP devraient-elles être :

des compléments de mathématiques référés aux mathématiques enseignées à la Faculté des Sciences et Techniques ?

des contenus de formation en mathématiques, spécialement élaborés pour la formation de professeurs de mathématiques de l'Enseignement Secondaire ?

des contenus de formation en mathématiques, élaborés en référence aux mathématiques enseignées dans l'enseignement secondaire ?

Les choix ne sont pas exclusifs. Justifiez votre réponse.

L'objectif de cet item est de collecter des avis sur le type de connaissances appelé « Horizon Content Knowledge (HCK) (Ball, Thames et Phelps 2008) », qui exige de l'enseignant de mathématiques une mise en liaison des mathématiques du niveau où il enseigne aux mathématiques des niveaux connexes du système éducatif concerné. Le caractère non exclusif des réponses émises doit permettre de percevoir l'importance accordée à la mise en connexion des niveaux scolaires. Rappelons que dans le système actuel, tous les cours de mathématiques en filière Professeurs d'Enseignement Secondaire s'effectue en première année.

[5]La décision est provisoire dit-on.

Les réponses obtenues sont les suivantes (*Tableau 2*) :

	Réponses des formateurs de mathématiques			Réponses des formateurs de didactique des mathématiques	
	Oui	**Non**		**Oui**	**Non**
a)	*5*	*0*		*4*	*1*
b)	*3*	*2*		*5*	*0*
c)	*3*	*2*		*5*	*0*

Tableau 2 *– Réponses des deux groupes à l'item$_2$*

Les avis émis dans les deux groupes de formateurs semblent indiquer que la formation mathématique des enseignants du secondaire doit se référer à la fois aux mathématiques universitaires et aux mathématiques du secondaire. Certains formateurs en mathématiques précisent la nature de la référence aux mathématiques universitaires ; les mathématiques du secondaire sont perçues comme des mathématiques universitaires allégées et les méthodes pour effectuer cet allégement peuvent s'acquérir par expérience ou encore par des sessions de formation continue. L'argument avancé repose sur la disponibilité des textes définissant les programmes du secondaire. Par ailleurs, un formateur en didactique estime que les connaissances acquises pour obtenir la licence à l'université suffisent largement ; un complément de formation en mathématiques n'est pas nécessaire à l'ENSUP.

Cependant, ces divers avis rendent problématique la dénomination compléments de mathématiques pour le contenu de formation en mathématiques. Ces compléments peuvent-ils être conçus comme compléments des seules mathématiques de l'université? L'étude des questions liées à sa définition s'avère nécessaire au regard du passage au LMD.

Item$_8$: En filière Professeurs d'Enseignement Secondaire, option mathématiques, les contenus de formation en mathématiques doivent-ils être élaborés en rapport avec les contenus de formation en didactique des mathématiques ? Justifiez votre réponse.

L'objectif principal est de recueillir les avis justifiés sur l'existence de lien entre les contenus de formation mathématique et didactique. Notons que dans le cadre du passage au LMD, ces contenus sont considérés en formation professionnelle initiale comme des Unités d'Enseignement (UE) majeures, qui peuvent impliquer plusieurs champs disciplinaires. Au cas où l'existence de ce lien est reconnue, il s'agit d'identifier les points de vue respectifs des deux groupes de formateurs sur la nature de l'articulation entre les deux catégories de connaissances pour l'enseignant du secondaire. Rappelons que les contenus de formation en mathématiques enseignés actuellement ont été conçus sans aucune mise en rapport avec la didactique des mathématiques.

Les réponses obtenues à cet item sont les suivantes (*Tableau 3*) :

Réponses des formateurs de mathématiques			Réponses des formateurs de didactique des mathématiques	
Oui	**Non**		**Oui**	**Non**
2	*3*		*4*	*1*

Tableau 3 *– Réponses des deux groupes à l'item$_8$*

Pour les formateurs de mathématiques : Les réponses positives sont justifiées par des arguments liés à des constats sur les pratiques de classes au secondaire comme semblent l'attester les propos de l'un des deux formateurs: « [...] souvent on a de la peine à se rabaisser au niveau des lycéens pour leur expliquer la résolution d'un problème [...] ». Par ailleurs, un formateur du même groupe justifie sa réponse négative comme suit : « [...] vouloir élaborer des maths avec la didactique, c'est vouloir faire de l'élève-professeur un didacticien ; or c'est bien les maths et non la didactique qu'il aura à enseigner au lycée [...]».

Pour les formateurs de didactique : Les formateurs en didactique approuvent en général la prise en compte de leur discipline dans l'élaboration des contenus mathématiques de formation. Cependant, certaines justifications sont assez générales comme dans le cas suivant : « [...] l'histoire et l'épistémologie des mathématiques peuvent jouer un rôle dans la formation mathématique des futurs professeurs de mathématiques du secondaire ».

Ces avis soulèvent des questions pertinentes sur la nécessité de concevoir un lien entre les deux contenus de formation et sur les stratégies de son élaboration. On peut en formuler d'autres :

- Comment les deux groupes de formateurs pourraient se convaincre de l'intérêt d'une mise en rapport des deux types de contenu en formation mathématique des futurs professeurs de mathématiques du secondaire dans le cadre du LMD ?
- Le rapport entre les deux contenus doit-il se référer en premier lieu aux mathématiques ? à la didactique?
- Faudrait-il entrer par un point de vue didactique pour aborder la complexité de la formation mathématique à travers les tâches professionnelles que doit accomplir un futur professeur de mathématiques (Robert 2010) ?

2. *Quels devraient être la nature et le niveau de connaissances mathématiques des enseignants ?*

Item$_{14}$: Les connaissances mathématiques du professeur du secondaire devraient-elles être en rapport avec :

les mathématiques du fondamental?

les mathématiques de l'université ?

Les choix ne sont pas exclusifs. Justifiez vos réponses.

Le système éducatif au Mali est marqué par la faiblesse des relations entre les professionnels de ses différents ordres d'enseignement. Cette faiblesse est encore plus accentuée entre l'Enseignement Fondamental et l'Enseignement Supérieur. Nous supposons que l'effectivité (ou non) du rapport entre ces deux ordres d'enseignement est un facteur qui influence de façon significative, la nature et le niveau de connaissances mathématiques du professeur du secondaire. Dans le cas spécifique de l'ENSUP de Bamako, les contenus d'enseignement en mathématiques de l'Enseignement Fondamental constituent un objet de formation ; mais cette formation se réduit à l'étude des programmes ; les connaissances sur le milieu et les pratiques professionnels au niveau de cet ordre d'enseignement sont presque ignorées. Aussi, les connaissances mathématiques du professeur du secondaire seraient a priori perçues en rapport plus étroit avec les mathématiques de l'université qu'avec celles du fondamental.

Les réponses obtenues à cet item sont les suivantes (*Tableau 4*) :

	Réponses des formateurs de mathématiques				**Réponses des formateurs de didactique**		
	Oui	**Non**	**Pas de réponse**		**Oui**	**Non**	**Pas de réponse**
a)	*3*	*0*	*2*		*5*	*0*	*0*
b)	*5*	*0*	*0*		*4*	*0*	*1*

Tableau 4 – *Réponses des deux groupes à l'item$_{14}$*

Pour les formateurs de mathématiques : Cette répartition pourrait être liée aux carrières professionnelles de ce groupe de formateurs. En effet, ceux qui ont émis une réponse positive à la question a) ont une expérience professionnelle de l'enseignement des mathématiques au secondaire ; l'un d'entre eux a en plus une expérience d'enseignement du fondamental qu'il a souvent réinvestie lorsqu'il était en poste au secondaire : « [...] quand j'enseignais au lycée, dès fois je reprenais presqu'entièrement certaines notions du fondamental pour pouvoir commencer mon cours du jour[...] C'est souvent ennuyeux pour le respect des progressions trimestrielles… ». Certains n'ont exercé qu'à l'université et l'un d'eux s'exprime comme suit : « Je sens qu'il faut prendre en compte les maths du fondamental des fois jusqu'au premier cycle, mais ce n'est pas évident [...]».

Pour les formateurs de didactique: La justification qui apparaît pour les cinq réponses positives au *a)* se retrouve dans les propos de l'un d'eux : « les connaissances mathématiques du professeur du secondaire doivent tenir compte des mathématiques du fondamental en termes de contenu ; ce contenu constitue une référence institutionnelle d'accès des apprenants au secondaire. Elles en tiennent compte aussi en termes de pratiques d'enseignement pour s'imprégner de leurs états de connaissances à la sortie du fondamental ». Pour les quatre réponses positives au *b),* l'argument privilégié est que « les connaissances mathématiques du professeur du secondaire doit prendre de la hauteur par rapport aux mathématiques qu'il enseigne » ; mais la nature et le niveau de cette prise de hauteur n'ont pas été définis. Le formateur n'ayant pas répondu au *b)* s'exprime comme suit : « [...] je pense qu'il faut s'appuyer surtout sur la formation en didactique et la formation en pédagogie pour le moment [...] ».

Les deux groupes de formateurs ne semblent pas s'opposer formellement à l'idée que les connaissances mathématiques du professeur du secondaire doivent se construire en rapport avec les mathématiques de l'université et celles du fondamental. Cependant, certains aspects importants de la question sont sous-jacents aux réponses données ; leur explicitation pourrait fournir des éléments pertinents pour une feuille de route relative au passage au LMD.

- Comment élaborer des contenus de formation en mathématiques des professeurs du secondaire en termes de réseaux de connaissances mathématiques relevant de tous les ordres d'enseignement?
- Les compléments de mathématiques à l'état actuel peuvent-ils intégrer ces réseaux de connaissances?

Item$_{16}$: Les connaissances didactiques du professeur de mathématiques du secondaire jouent-elles un rôle dans la mise en rapport de ses connaissances mathématiques avec les mathématiques qu'il enseigne ?

Justifiez votre réponse.

Si oui, quel doit être ce rôle ?

Le cloisonnement des deux types de formation dans le système actuel à l'ENSUP de Bamako, rend diffus et implicite le rôle que doit jouer la didactique dans la mise en rapport des connaissances mathématiques du professeur avec les mathématiques qu'il enseigne. Aussi, nous nous attendons à des avis plutôt contradictoires entre les deux groupes de formateurs. Les arguments avancés pour appuyer ces avis pourraient constituer une première ressource pour mieux formuler les besoins et les tâches à identifier sur cet aspect de la formation. Le tableau ci-dessous (Tableau *5*) indique les réponses par les deux groupes :

Réponses des formateurs de mathématiques				**Réponses des formateurs de didactique**		
Oui	**Non**	**Pas de réponse**		**Oui**	**Non**	**Pas de réponse**
2	*2*	*1*		*5*	*0*	*0*

Tableau 5 – *Réponses des deux groupes à l'item$_{16}$*

Pour les formateurs de mathématiques : Parmi ceux qui disent non, l'un estime que « [...] pratiquement, la didactique ne joue pas de rôle entre ces deux types de connaissances, il suffit d'avoir une maîtrise des maths et des programmes et de la méthodologie [...] ». La justification des réponses positives s'appuie sur la nécessité de tenir compte de « [...] la transposition didactique qui permet au professeur de prendre en compte l'écart entre ses propres connaissances mathématiques et celles qu'il doit enseigner [...] ». Un autre dit qu'il n'est pas en mesure de se prononcer sur cet item : « [...] puisque je n'arrive pas à spécifier ce rôle, mais j'ai senti lors de ma carrière au secondaire que les maths, la méthodologie ne suffisaient pour mener à bien certaines tâches d'enseignement… me fallait-il de la didactique ? [...] Je ne sais pas ! ».

Pour les formateurs de didactique: Les arguments avancés par ce groupe de formateurs peuvent être résumés comme suit : « compréhension et justification de ce qui doit être enseigné à un niveau scolaire donné ; compréhension de l'état des connaissances des apprenants ; construction du sens des concepts mathématiques par les apprenants [...]».

Ces avis différents nous incitent à nous réinterroger sur le rôle de la didactique dans la formation actuelle du futur professeur de mathématiques au secondaire. Les notions de didactique retenues en formation sont introduites à partir de situations, centrées le plus souvent sur le savoir scolaire, les connaissances des apprenants et les stratégies pour les faire évoluer. Par contre, cette formation en didactique propose rarement des situations sur les connaissances mathématiques du professeur. Aussi, les différents usages de ces notions de didactique ne peuvent-elles pas être explorés en tant qu'outils (Douady 1996) de résolution de situations relatives à la mise en rapport des connaissances mathématiques du professeur avec les mathématiques qu'il enseigne? Cette exploration doit s'orienter vers l'identification en formation de ces différents usages, en particulier leur mise à l'épreuve comme facteur pertinent de décloisonnement des deux types de contenus de formation.

3. *Quelles approches en formation pour la filière professeurs d'enseignement secondaire ?*

Les items liés à cette question recouvrent deux aspects principaux dans la perspective du basculement de l'ENSUP de Bamako vers le système Licence-Master-Doctorat. Il s'agit des stratégies pour l'élaboration des deux contenus de formation et des méthodes de réalisation de dispositifs de formation, avec l'objectif spécifique d'obtenir des avis sur une articulation entre les formations mathématique et didactique des futurs professeurs du secondaire.

Item_{21} : Pour l'élaboration des contenus de formation en mathématiques des professeurs du secondaire accepterez-vous que :

les formateurs en mathématiques seuls s'en occupent ?

les formateurs en mathématiques et les formateurs en didactique des mathématiques s'en occupent ?

Justifiez votre réponse ?

Dans le système actuel de formation à l'ENSUP, le cloisonnement dans le travail d'élaboration des contenus de formation n'a pas favorisé la collaboration entre les deux groupes de formateurs. L'objectif ici est de faire expliciter les arguments que les uns et les autres pourraient avancer en vue d'un éventuel travail collaboratif sur les contenus de formation en mathématiques des professeurs du secondaire.

Les réponses obtenues sont indiquées dans le tableau (*Tableau 6*) :

Réponses des formateurs de mathématiques				**Réponses des formateurs de didactique des mathématiques**			
Question a)		***Question b)***		***Question a)***		***Question b)***	
Oui	**Non**	**Oui**	**Non**	**Oui**	**Non**	**Oui**	**Non**
3	*1*	*2*	*3*	*3*	*2*	*4*	*1*

Tableau 6 *— Réponses des deux groupes à l'item$_{21}$*

Question a)

Les avis sont partagés au sein de chaque groupe. Ils pourraient a priori être liés au rapport personnel de chacun des formateurs aux mathématiques et à la didactique. Néanmoins, l'argument avancé par le formateur en mathématiques pour justifier sa réponse négative nous semble significatif d'un besoin de collaboration entre les deux groupes : « [...] il est toujours utile et même nécessaire de tenir compte de ce que les autres groupes de formation élaborent, en particulier le groupe de didactique, pour une formation professionnelle véritable [...]». Identifier ces besoins de façon concertée entre les deux groupes pourrait être un moyen significatif pour engager les deux groupes dans un travail collaboratif sur les contenus de formation. De l'autre côté, les formateurs en didactique ayant répondu négativement estiment qu'il revient aux formateurs de l'autre groupe de consolider les connaissances mathématiques des élèves-professeurs avant toute formation en didactique.

Question b)

Pour les formateurs de mathématiques : Les réponses négatives sont justifiées par des arguments qui relèvent de pratiques liées au système actuel comme l'indique cet extrait d'entretien de l'un des formateurs : « [...] les contenus mathématiques ont toujours été proposés par les formateurs de mathématiques ; alors pourquoi les élaborer ensemble maintenant?... c'est vrai que dès fois on a l'impression que certains chapitres sont enseignés pour donner une culture générale aux élèves-professeurs [...] Peut-être il faut réfléchir à consolider leurs besoins immédiats [...] ». Par contre l'un des formateurs ayant répondu oui justifie son adhésion à une collaboration des deux groupes par le fait que « la participation des didacticiens permet de mieux circonscrire les besoins réels en mathématiques du futur professeur de maths».

Pour les formateurs de didactique: Les arguments avancés sont relatifs à l'usage de certains concepts de didactique comme outils d'une approche d'élaboration des contenus de formation en mathématiques ; ces contenus doivent satisfaire à la fois à la rigueur de la discipline et à une organisation mathématique qui se fonde sur un lien étroit avec les grands domaines des mathématiques du secondaire.

Ces avis assez divers renvoient a priori aux questions liées à la spécificité des connaissances mathématiques devant être acquises par le professeur du secondaire; un aspect important de cette spécificité réside dans son caractère professionnel : peut-il être pris en charge par un seul de ces deux groupes de formateurs ?

Item$_{22}$: Selon-vous quels sont les cours de mathématiques lors desquels certaines notions didactiques pourraient être traitées ?

Justifiez votre réponse ?

L'item$_{22}$ a pour objectif d'identifier des cours de mathématiques pouvant servir de point de départ d'une recherche collaborative pour l'articulation des formations mathématique et didactique. Cependant, il faudrait considérer ce travail dans la durée de la formation.

Le Tableau *7* indique les réponses données à l'item$_{22}$:

Réponses des formateurs de mathématiques						Réponses des formateurs de didactique				
Algèbre	Analyse	Logique	Géométrie	Proba/Stat		Algèbre	Analyse	Logique	Géométrie	Proba/Stat
2	*3*	*1*	*4*	*4*		5	4	3	5	5

Tableau 7 *– Réponses des deux groupes à l'item$_{22}$*

On peut observer que les cours de géométrie et ceux de probabilités-statistique semblent être privilégiés comme candidats potentiels à un travail collaboratif entre les deux groupes de formateurs. L'un des formateurs de mathématiques qui a donné une réponse positive pour la probabilité-statistique, justifie son choix : « [...] les problèmes de ce cours renvoient à des situations de la vie qui sont faciles à comprendre par les apprenants, mais dont la résolution exige souvent une réflexion très ardue [...] ». Par ailleurs, deux formateurs de mathématiques ont suggéré d'ajouter à cette liste de cours «…les grands problèmes liés à l'histoire des mathématiques comme ceux relatifs à la construction des nombres et puis... les maths discrètes et le calcul scientifique [...]».

Ces propos semblent questionner à la fois l'appellation et le contenu des cours de mathématiques qui semblent être à l'état actuel plaqués sur ceux de l'université. Néanmoins, l'entrée par les mathématiques comme moyen d'articulation des deux disciplines dans la mise en œuvre des contenus de formation semble avoir l'assentiment des deux groupes de formateurs. Peut-on envisager cette entrée par la didactique des mathématiques?

Item$_{24}$: Pensez-vous que tous les cours de mathématiques devraient être donnés par les seuls formateurs de mathématiques?

Justifiez votre réponse ?

L'objectif était de recueillir les avis des deux groupes de formateurs sur une éventuelle ouverture des cours de mathématiques aux uns et aux autres.

Les réponses obtenues sont indiquées dans le tableau (*Tableau 8*) :

Réponses des formateurs de mathématiques			Réponses des formateurs de didactique	
Oui	**Non**		**Oui**	**Non**
4	*1*		*1*	*4*

Tableau 8 *– Réponses des deux groupes à l'item$_{23}$*

Les avis des deux groupes s'opposent ici alors qu'une certaine entente semblait se dégager sur certains cours de mathématiques pouvant servir de moyens d'articulation de certaines notions de didactique avec les cours de mathématiques (tableau 7). Ceci est à relier aux questions sur le statut et les fonctions de la didactique dans la formation mathématique des enseignants et réciproquement. Cependant, dans le cas actuel de l'ENSUP, une des conditions pour faire participer les deux types de formateurs au cours de mathématiques est de convaincre le groupe de formateurs en mathématiques de l'intérêt que peut apporter le formateur de didactique dans les cours de mathématiques. Cette tâche revient dans une large mesure au groupe de formateurs en didactique. De plus, donner ce type de cours de façon magistrale n'est pas une méthode a priori pertinente pour donner une visibilité de cet intérêt ; il faut explorer d'autres méthodes de formation.

V. SYNTHÈSE

Les informations collectées à l'issue de cette étude exploratoire sont parcellaires et suffisamment liées au contexte actuel de formation d'enseignants à l'ENSUP de Bamako. Cependant, elles nous fournissent des indices sur certaines questions dont l'étude est nécessaire pour l'établissement d'une feuille de route relative à la formation mathématique des futurs professeurs du secondaire dans le cadre du passage de l'ENSUP de Bamako au système LMD.

Un premier indice est lié à la restructuration des contenus de formation en mathématiques : ils ont été élaborés dans l'actuel système selon une approche disciplinaire à laquelle a été juxtaposée une formation professionnelle; le passage au LMD préconise une logique fondée sur l'articulation des deux: comment s'y prendre ?

Le second indice est relatif à la place et aux fonctions de la didactique des mathématiques en formation initiale des professeurs de mathématiques du secondaire. La première rencontre de l'élève-professeur du secondaire avec la didactique a lieu après quinze années d'apprentissage et de pratiques des mathématiques. Ce déséquilibre, tant au niveau de la durée de la formation qu'au niveau du contenu des connaissances acquises respectivement dans les deux types de contenu de formation, constitue a priori une source de questions liées à la mise en rapport des formations mathématique et didactique ; une clarification des questions y afférant est nécessaire.

Enfin, le cloisonnement actuel entre les deux types de formation est d'abord institutionnel et il concerne tous les ordres d'enseignement ; il ne favorise pas l'exploration d'une vision de la formation mathématique en termes de réseaux de connaissances mathématiques relevant de tous ces ordres d'enseignement Cette vision nous semble constituer une des particularités des connaissances mathématiques du professeur de mathématiques.

REFERENCES

Ball D. L., Thames M. H., Phelps G. (2008) Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education* 59(5), 389-407. Consulté le 18 juillet 2011, http://jte.sagepub.com/cgi/content/abstract/59/5/389.

Bkouche R. (2010) De la formation des maîtres. *Repère*s 80, 29-48.

Douady R. (1996) Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir. In *L'Enseignement des mathématiques : des Repères entre savoirs Programmes&Pratiques.* Topiques éditions.

Robert A. (2010) Formation professionnelle des enseignants de mathématiques du second degré : un point de vue didactique prenant en compte la complexité des pratiques. *Repère*s 80, 87-102.

Thomas R. (2010) À propos de la Formation des Maîtres. *Repère*s 80, 49-59.

PRATIQUES DE FORMATEURS : LA QUESTION CENTRALE DES SAVOIRS DE FORMATION

Nathalie SAYAC*

Résumé – En France, la formation des enseignants a subi une mutation profonde qui n'est pas sans incidence sur les contenus et les pratiques de formation. A partir d'une recherche centrée sur les pratiques des formateurs en mathématiques des professeurs du primaire, effectuée du temps des IUFM, je vais tenter de mettre en évidence le fait que la question des savoirs, de leur nature et de leur articulation est au cœur de la problématique de la formation des enseignants.

Mots-clefs : pratiques, formateurs, savoirs, postures, masterisation

Abstract – The teachers' training in France has undergone a deep change which had not had any effect on the contents and the practices of the training. From a focused research on the practices of primary teachers' training in mathematics, done in IUFM, I am going to try to put in evidence the fact that the question of knowledge, their nature and their pronunciation is at the core problem of teachers' training.

Keywords: practices, training, knowledge, postures, education

I. INTRODUCTION

Les questions de connaissances mathématiques et didactiques pour l'enseignement sont au cœur de mes problématiques de chercheuse et de formatrice d'enseignants. C'est pourquoi ma contribution s'inscrit pleinement dans la thématique du groupe de travail GT1 « articulation des connaissances mathématiques et didactiques pour l'enseignement : pratiques et formation » du colloque EMF 2012. Je suis, depuis 12 ans, formatrice en mathématiques en France dans un IUFM[1], chargée de la formation initiale et continue des professeurs des écoles (élèves de 3 à 11 ans). Il convient de préciser que depuis la rentrée scolaire 2010-2011, une réforme importante de la formation des enseignants a été mise en application, appelée « Masterisation ». Depuis 1991, la formation des enseignants était assurée dans le cadre des IUFM, instituts uniques et indépendants, qui suivaient un plan de formation national, décliné à un niveau local (académique). Ces formations étaient assurées en grande majorité par des PRAG[2] ou des PRCE[3] et par une minorité d'enseignants chercheurs. Depuis quelques années déjà, les IUFM ont été rattachés à des universités mais restaient maîtres d'œuvre des formations qu'ils dispensaient alors qu'aujourd'hui, toutes les formations d'enseignants doivent s'inscrire impérativement dans des masters universitaires qui peuvent être proposés en dehors des IUFM, par n'importe quelle université qui les programme. Au-delà du changement de cadre dans lequel s'effectue la formation des enseignants, cette réforme adoptée à la hâte, sans réelle concertation avec les différents partenaires concernés, n'est pas sans incidence sur la nature et les contenus de formation dispensés, ainsi que sur les pratiques de formation. Par ailleurs, les concours de recrutement dans l'enseignement primaire et secondaire ont été éclatés et placés de manière arbitraire dans des masters d'enseignement, à des moments inopportuns de l'année universitaire, en début et en fin de M2[4]. En ce qui concerne le concours de recrutement du primaire, la première partie du concours est constituée d'évaluations écrites de connaissances disciplinaires en français et en mathématiques alors que la deuxième partie comprend plusieurs épreuves orales, à visée professionnelle, en français, mathématiques, sciences et arts visuels. La place de ces épreuves

* IUFM de Créteil-U-PEC/LDAR – France – nathalie.sayac@u-pec.fr

[1] IUFM : Institut Universitaire de Formation des Maitres

[2] PRAG : professeur agrégé (ayant passé un concours pour devenir enseignant après une Maitrise universitaire)

[3] PRCE : professeur certifié (ayant passé un concours pour devenir enseignant après une Licence universitaire)

[4] M2 : master, 2ème année

© Sayac N. (2012) Pratiques de formateurs : la question centrale des savoirs de formation. In Dorier J.-L., Coutat S. (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (GT1, pp. 240–250). http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

perturbe fondamentalement l'équilibre des enseignements qui sont dispensés en vue de la formation professionnelle des futurs enseignants puisque la préparation au concours s'étale sur toute l'année et préoccupe prioritairement les étudiants alors qu'auparavant, la formation initiale des professeurs se déployait sur une année entière, après l'obtention du concours l'année précédente. Quand il a été question d'élaborer les contenus des masters d'enseignement proposés par l'IUFM auquel j'appartiens (première et deuxième année), les différents groupes disciplinaires de l'IUFM ont été sollicités et notamment le groupe mathématiques. L'articulation entre les cours de mathématiques et les cours de didactique a été discutée et pensée pour s'intégrer dans les différentes UE[5] dans lesquelles se trouvait un enseignement de mathématiques. La place de la préparation au concours, au regard de la place de la formation professionnelle, a été âprement discutée car un équilibre devait être trouvé pour satisfaire aussi bien les étudiants et leur aspiration légitime de réussite au concours que les formateurs soucieux de dispenser une formation professionnelle de qualité pour les futurs enseignants. Il va sans dire que cette transformation de la formation des enseignants, qui a introduit utilement de mon point de vue une dimension recherche dans la formation, n'a pas satisfait tous les formateurs car certains ont pensé que la réduction du nombre d'heures de formation disciplinaire était due en partie à l'ajout de ce nouvel enseignement. Un clivage, qui n'existait pas auparavant, s'est alors établi entre les formateurs PRAG ou PRCE et les formateurs chercheurs, rendant difficile les échanges sur les contenus de formation.

Pour essayer de comprendre en quoi cette « Masterisation » de la formation des enseignants a fortement impacté les contenus et la nature des formations dispensées en France aujourd'hui, je vous propose de rendre compte de la recherche que j'ai menée de 2007 à 2011 autour des pratiques des formateurs d'enseignants du primaire en mathématiques, dans un IUFM[6].

Etant à la fois formatrice et chercheuse en didactique des mathématiques, il m'a semblé opportun de vérifier l'hypothèse d'une grande diversité des pratiques des formateurs de mathématiques en formation initiale des professeurs des écoles que j'avais posée à partir des échanges que j'avais eus avec mes collègues et avec les étudiants de l'IUFM. Je me suis donc engagée dans une recherche qui m'a amenée plus loin que ce que j'avais prévu, notamment à cause de la question centrale et complexe des savoirs en formation.

Cette recherche a été menée dans deux cadres théoriques : le premier, « la double approche » est issu de la didactique des mathématiques de Robert et Rogalski (2002), le deuxième se rattache à la didactique professionnelle (Pastré 2006).

Ces deux cadres m'ont paru légitimes à plusieurs niveaux car :

- « La double approche » prend en compte à la fois l'aspect contenu et l'aspect professionnel pour l'analyse des pratiques enseignantes. Elle met en évidence la complexité de ces pratiques et cherche à les reconstituer à travers l'analyse de 5 composantes (institutionnelle, sociale, personnelle, médiative et cognitive).
- La didactique professionnelle se propose d'étudier, de conceptualiser et d'agir sur les phénomènes liés au développement et à la transmission des compétences professionnelles dans les situations de formation et de travail. Elle cherche à comprendre l'activité par son organisation.

Je vais donc tout d'abord donner quelques éléments informatifs sur le contexte de la recherche, puis je préciserai la méthodologie utilisée pour analyser les pratiques de formateurs

[5] Unité d'Enseignement. Le découpage des enseignements dispensés à l'université se fait suivant différentes UE qui se répartissent dans les 2 semestres de l'année universitaire.
[6] L'IUFM de Créteil dans lequel j'exerce mes fonctions de formatrice.

en mathématiques, j'exposerai quelques résultats et je conclurai en essayant de revenir à la thématique du GT1 sur l'articulation des connaissances mathématiques et didactiques pour l'enseignement.

II. CONTEXTE DE LA RECHERCHE

1. Les formateurs en mathématiques

Les formateurs en mathématiques exerçant en IUFM ont, pour la plupart, des parcours professionnels variés. Certains sont d'anciens instituteurs ayant passé le Capes de mathématiques[7], puis intégré la formation des maîtres dans la continuité de leur parcours. D'autres sont d'anciens enseignants du secondaire ayant cherché à se diversifier en devenant formateurs en IUFM dans le primaire. D'autres encore, enseignants-chercheurs, ont un cursus exclusivement universitaire et n'ont jamais été confrontés directement à la réalité du métier d'enseignant. Ces différentes biographies professionnelles se heurtent à la même réalité : il n'existe pas de formation de formateurs d'enseignants, même s'il existe une instance, non institutionnelle, mais reconnue en tant que telle qui la prend en charge en mathématiques depuis une vingtaine d'années dans le premier degré (la COPIRELEM[8]) et quelques années dans le second degré (la CORFEM[9]). Il faut néanmoins préciser que ces formations sont facultatives et s'adressent aux seuls formateurs volontaires.

C'est en partie à partir de ces différences que la question de la singularité des sujets (formateurs en mathématiques) mérite d'être appréhendée.

2. Les stagiaires

La formation des professeurs des écoles telle qu'elle était dispensée dans le cadre des IUFM s'inscrivait dans une logique de professionnalisation qui ne permettait pas toujours de préparer les futurs enseignants à relever les nombreux défis auxquels ils allaient être confrontés (hétérogénéité des classes, difficultés des élèves, gestion des élèves et des apprentissages). Des conflits d'intérêt avaient souvent cours entre les professeurs stagiaires[10], en attente de recettes immédiatement utilisables dans leurs classes et les formateurs qui avaient une vision à plus long terme de la formation. Il faut préciser par ailleurs que le niveau en mathématiques de ces stagiaires était souvent peu élevé du fait qu'ils étaient peu nombreux à avoir suivi un cursus scientifique[11] avant d'intégrer l'IUFM. Outre ce constat, il se trouvait également que de nombreux professeurs des écoles stagiaires témoignaient d'un passé douloureux vis-à-vis des mathématiques et arrivaient en formation avec une réelle angoisse et/ou un manque d'enthousiasme pour enseigner cette discipline. Les formateurs de mathématiques étaient donc souvent navrés d'être confrontés à des étudiants ayant un tel rapport à leur discipline et ne savaient comment combler leurs lacunes car l'enjeu de la formation initiale, telle qu'elle se présentait institutionnellement était clairement un enjeu de professionnalisation dépassant le disciplinaire. Il y avait donc un hiatus difficile à surmonter pour les formateurs de mathématiques entre leur volonté d'élever le niveau disciplinaire des stagiaires et celle de les former professionnellement. La question qui se posait donc pour les

[7] Concours pour devenir professeur dans le secondaire
[8] La COPIRELEM, Commission Permanente des IREM sur l'Enseignement Élémentaire a été créée en 1975. Elle regroupe une vingtaine de représentants des différents IREM qui s'intéressent à l'enseignement élémentaire.
[9] COmmission de Recherche sur la Formation des Enseignants de Mathématiques, créée en 1993.
[10] Les étudiants étaient en fait des « professeurs stagiaires » puisqu'ils avaient réussi l'année précédente le concours de recrutement pour devenir professeur des écoles.
[11] A titre indicatif, seulement 8% à l'IUFM de Créteil (en 2009)

formateurs de mathématiques était de trouver un juste équilibre entre la formation disciplinaire et la formation professionnelle des stagiaires qui leur étaient confiés. Cette question reste d'actualité aujourd'hui, en France comme dans de nombreux autres pays.

3. *Les contenus de formation*

De nombreuses recherches soulignent le fait que le niveau de connaissance disciplinaire d'un enseignant est un élément majeur de sa pratique[12]. La question du niveau de connaissances en mathématiques des étudiants ou stagiaires est donc une question cruciale pour les formateurs d'enseignants. Comment les formateurs en mathématiques à l'IUFM y répondaient-ils et comment cela se traduisait-il au niveau de leur offre de formation ? Existait-il des formateurs qui considéraient que le niveau de connaissances mathématiques de leurs étudiants importait peu et qu'il était prioritaire de les former seulement à des gestes professionnels ? Ou bien est-ce le contraire ? Ces questions en amènent une autre, en étroite corrélation : quelle était la place accordée à la didactique des mathématiques en formation initiale des professeurs ? Les formateurs en mathématiques avaient un parcours qui intégrait, à des degrés très différents, la didactique de cette discipline, certains avaient un doctorat, d'autres n'avaient aucun diplôme dans cette spécialité. Les plans de formation comprenaient tous des éléments de didactique des mathématiques, mais dans la pratique, comment les formateurs les interprétaient-ils ?

III. ÉLÉMENTS THÉORIQUES ET MÉTHODOLOGIQUES

1. *Eléments théoriques*

Bien que les questions de formation et de formateurs d'enseignants aient fait l'objet de nombreux travaux en sciences de l'éducation (Altet, Paquay, Perrenoud, Bucheton, Blanchard-Laville pour ne citer qu'eux), il en existe très peu concernant les pratiques des formateurs. En didactique des mathématiques, Kuzniak et Houdement (1996) ont mis en évidence différentes stratégies[13] de formation utilisées par les formateurs. Butlen, Pézard et Masselot (2010) se sont intéressés, de leur côté, à la question des pratiques des formateurs en mathématiques dans le cadre des dispositifs de formation mis en place pour l'accompagnement des professeurs néo-titulaires affectés en ZEP. Marchive (2006) avait également présenté à EMF 2006 une étude intéressante portant sur la façon dont les travaux de recherche en didactique des mathématiques étaient reçus et diffusés par les formateurs IUFM. Ces différents travaux m'ont été utiles pour défricher ce champ, mais ils se sont tous appuyés sur des éléments de pratiques déclarées ou des reconstitutions de pratiques à partir de diverses ressources (actes de séminaire de la COPIRELEM, entretiens, curriculum de formation).Or je souhaitais travailler à partir de pratiques réelles des formateurs pour être au plus près de la réalité et ainsi appréhender avec plus d'efficacité leur diversité.

Les travaux de DeBlois et Squalli (2002) sur les postures épistémologiques des futurs maîtres (la posture de l'ancien élève, la posture de l'étudiant et la posture de l'enseignant) ont également enrichi mon approche sur la question des pratiques de formateurs d'enseignants.

---

[12] Bucheton (2009) dans « l'agir enseignant : des gestes professionnels ajustés » chapitre 4 qui précise combien la spécificité des savoirs à enseigner et leur maitrise par les enseignants est de première importance.

[13] L'homologie, la monstration et la transposition : ces stratégies ont été identifiées comme des stratégies utilisées de manière variable et contextuelle par les formateurs de mathématiques en IUFM. Elles dépendraient des notions mathématiques traitées durant les séances (homologie pour les notions méconnues des étudiants, transposition et monstration pour des notions plus familières).

2. *Eléments méthodologiques*

Afin d'explorer la diversité des pratiques des formateurs en mathématiques à l'IUFM, il m'a semblé indispensable de filmer des séances de formation. Six formateurs[14] en mathématiques de l'IUFM de Créteil ont accepté de participer à cette recherche. Par ailleurs, ma démarche impliquait également de mieux connaitre les formateurs qui avaient accepté d'être filmés d'un point de vue professionnel et personnel.

J'ai donc été amenée à récolter deux types de données :

- Un questionnaire

Les formateurs ont dû répondre à un questionnaire pour préciser leur parcours personnel et professionnel, indiquer leurs conceptions de la formation initiale pour les professeurs des écoles, leurs priorités de formation, et les grands axes de leur offre de formation.

- Des vidéos de séances de formation

Une séance de formation a été filmée au cours de l'année de formation initiale des professeurs des écoles stagiaires, avec centration d'une caméra sur le formateur et d'une autre en fond de salle pour avoir une vision globale de ce qui se passait.

Les séances ont été analysées à partir d'une grille d'analyse émanant de la didactique des mathématiques, mais adaptée à des séances de formation. Trois dimensions ont été retenues :

- Une dimension liée au scénario global adopté par le formateur, le contenu de sa séance ainsi que les différentes stratégies de formation adoptées durant la séance.
- Une dimension liée à la variété des tâches (quantité, ordre, nature) à travers les activités proposées.
- Une dimension liée au déroulement global de la séance, à la nature du travail organisé, aux conditions de travail des stagiaires ainsi qu'à la durée des différents moments de la séance.

Très tôt, la question des savoirs de formation s'est avérée complexe et incontournable pour analyser les séances des formateurs et notamment la question de leur nature. En effet, les savoirs de formation se sont avérés extrêmement difficiles à identifier : savoir mathématique, savoir pédagogique, savoir didactique pour Kuzniak (2002), savoirs savants, savoirs de la « science appliquée », savoirs de la « non-science » pour Houdement (2003), savoirs disciplinaires, savoirs curriculaires ou savoirs de formation comme ils sont désignés à l'Université Laval au Québec. Toutes ces dénominations ont leur pertinence dans un cadre d'analyse qui ne se confronte pas à la réalité, mais s'avèrent insuffisantes pour appréhender leur imbrication complexe lors d'une séance de formation. Il a donc fallu approfondir cette question et chercher à rendre compte plus explicitement de la dynamique interne entre ces différents savoirs durant une séance de formation.

Une première piste a été trouvée avec la notion *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) proposée par Shulman (1986 - 1987) qui m'a semblée pertinente pour préciser les savoirs en jeu lors de séance de formation en mathématiques ce qui correspondait davantage à ce qui se passait dans la réalité[15]. Dans la continuité du PCK, les travaux de Ball (2005) sur le

---

[14] Débutants, expérimentés, 2 femmes, 4 hommes, différents parcours professionnels…

[15] Les connaissances travaillées durant les séances disciplinaires ne le sont qu'à des fins d'apprentissage pour les futurs élèves qui seront confiés aux professeurs stagiaires. Les stagiaires doivent opérer une transformation de la connaissance pour passer de sa compréhension pour eux-mêmes à la compréhension pour les autres (le modèle de Shulman décrit six processus nécessaires à cette transformation). En travaillant sous plusieurs angles un

Mathematical Knowledge for Teaching (MKT) m'ont permis d'adapter le PCK au métier de formateur en mathématiques, puisque ce concept émanait d'un questionnement de formateur d'enseignants portant sur la nature des connaissances mathématiques que le professeur doit avoir pour enseigner cette discipline efficacement. Cette approche m'a intéressée dans la mesure où, les savoirs de formation intégraient des éléments constitutifs du métier d'enseignant avec ses volets didactiques, pédagogiques, institutionnels et curriculaires[16].

IV. RÉSULTATS DE LA RECHERCHE

Un des résultats de cette recherche est que la question des **savoirs** dispensés en formation s'est avérée centrale pour distinguer les pratiques des formateurs. Il a donc fallu la repenser pour pouvoir analyser les pratiques des formateurs en mathématiques d'enseignants du primaire, de manière efficiente. Par ailleurs, la question des interactions entre le formateur et ses stagiaires a pu être appréhendée à partir d'un jeu de **postures** adaptées à des séances de formation. Ces deux entrées m'ont permis de différencier les pratiques des formateurs étudiés et de vérifier que la variété supposée des pratiques des formateurs n'était pas une hypothèse oiseuse.

1. Au niveau des savoirs

Je suis donc arrivée à un découpage des savoirs de formation qui distingue deux dimensions : les savoirs disciplinaires (D1, D2, D3) et les savoirs transversaux (T1, T2, T3), tout en les incluant dans un schéma global qui constitue, dans mon approche, les savoirs pour la formation des enseignants.

<table>
<tr><th colspan="2">Savoirs disciplinaires</th><th>Savoirs transversaux</th></tr>
<tr><td rowspan="2">D1 : relatifs aux connaissances mathématiques pures et aux savoirs épistémologiques</td><td rowspan="3">D3 : savoirs relatifs à la didactique des mathématiques</td><td>T1 : relatifs aux gestes professionnels du métier d'enseignant</td></tr>
<tr><td>T2 : relatifs aux connaissances portant sur les élèves et sur les apprentissages</td></tr>
<tr><td>D2 : relatifs à la construction de programmations, de progressions par cycle…</td><td>T3 : relatifs aux programmes et aux instructions officielles</td></tr>
</table>

Figure 1 – *Savoirs de formation*

contenu d'enseignement en formation, les formateurs visent à ce que le stagiaire se l'approprie professionnellement, afin qu'il puisse l'enseigner le plus efficacement possible (" ... *the capacity of a teacher to transform the content knowledgehe or shepossessesintoformsthat are pedagogicallypowerful*") (Shulman 1986)

[16] Voir annexe

La première dimension des savoirs pour la formation professionnelle des enseignants est relative aux savoirs disciplinaires :

D1 correspond aux savoirs travaillés sous un angle strictement mathématique ou épistémologique ;

D2 concerne les mathématiques convoquées dans l'organisation du savoir à enseigner : élaboration de progressions par cycle, de programmation, gestion de situations-problèmes mathématiques, etc. ;

D3 concerne l'approche didactique des savoirs mathématiques, la transposition du savoir prescrit au savoir à enseigner : par exemple quand on étudie des manuels ou des ressources numériques d'un point de vue didactique, ou quand on travaille sur la notion de champ conceptuel, d'invariants opératoires et de signifiants (symboles, désignations) liés à une notion.

Ce dernier type de savoir ne se situe pas au même niveau que les autres dans la mesure où il est central du point de vue de la formation en mathématiques des enseignants.

L'autre dimension des savoirs pour la formation professionnelle des enseignants, plus transversale, comporte également trois entrées spécifiques :

T1 concerne les gestes professionnels élémentaires en classe : comment gérer une classe ? Comment travailler en groupe ? Comment faire des retours au calme ? ;

T2 concerne la connaissance des élèves : approches sociologique, psychologique, cognitive des élèves : par exemple quand on distingue des stades d'apprentissage, quand on s'intéresse aux ZEP[17] ;

T3 concerne les connaissances institutionnelles: instructions officielles, programmes d'enseignement, documents d'accompagnement, grilles de références.

Ces savoirs ne sont pas travaillés en alternance ou l'un après l'autre, mais ils sont souvent fortement imbriqués les uns aux autres et difficilement identifiables. Il convient donc également de rendre compte de la dynamique de ces savoirs en jeu dans la formation pour approcher au plus près la réalité des pratiques des formateurs.

2. Au niveau des postures

Pour rendre compte de la façon dont les stagiaires étaient sollicités durant la séance, je me suis inspirée des travaux de DeBlois et Squalli, (2002, 2007) sur les postures épistémologiques des futurs maîtres et j'ai ainsi défini trois postures dans lesquelles le stagiaire pouvait être engagé par le formateur. En effet, en étudiant les différentes activités proposées durant une même séance, j'ai réalisé que suivant ce qu'ils avaient à faire, les stagiaires pouvaient être placés alternativement dans différentes postures et que cela participait de la dynamique de la séance et de la pratique du formateur.

Trois postures ont donc été dégagées :

<u>La posture élève</u> : quand le formateur assigne au stagiaire des tâches qu'il doit résoudre en tant qu'élève d'un système éducatif. Par exemple, quand il le confronte à des activités qu'il doit réaliser au même titre qu'un élève le ferait, quel que soit le niveau (jouer à un jeu mathématiques, reproduire une figure géométrique, résoudre un problème, etc.) ;

[17] Zone d'éducation Prioritaire : en France, certaines écoles sont reconnues comme telles par l'éducation nationale et sont dotées de moyens supplémentaires et d'une plus grande autonomie pour faire face aux difficultés d'ordre scolaires et sociales des élèves qui les fréquentent.

La posture étudiant : quand le formateur soumet le stagiaire à des activités qui vont lui permettre de se professionnaliser, de réfléchir à une démarche d'enseignement. Par exemple, quand il lui demande de classer des activités en fonction de leurs difficultés ou quand on étudie les procédures des élèves confrontés à un problème mathématique ;

La posture enseignant : quand le formateur interpelle le stagiaire en tant qu'enseignant. Par exemple, quand il lui demande quels choix d'enseignement il ferait pour telle ou telle notion, ou ce qu'il ferait dans sa classe, etc.

Pour chaque tâche proposée, le formateur s'adresse soit à un élève, soit à un étudiant, soit à un enseignant et il attend que le stagiaire s'installe dans la posture qu'il a choisie pour lui (consciemment ou non). Le stagiaire pouvait accepter ces positionnements ou s'y opposer, ce qui pouvait engendrer des tensions au sens de DeBlois et Squalli (1997) ou des incidents au sens de Roditi (2005).

3. *Au niveau des pratiques des formateurs*

Les séances de formation filmées ont été retranscrites et analysées en fonction des savoirs convoqués et des postures assignées par le formateur à ses stagiaires. Une catégorisation globale des stratégies de formation utilisées par le formateur durant sa séance a permis de rendre compte de sa pratique au niveau global.

Il en ressort que les savoirs en jeu lors des séances de formation sont, comme nous l'avions prévu, majoritairement issus de l'axe disciplinaire, mais qu'il existe une grande diversité de savoirs spécifiques suivant les formateurs. Pour certains, la grande majorité des savoirs se trouvent en D1 (savoirs travaillés sous un angle strictement mathématique, peu épistémologiques dans les faits), même si les savoirs étiquetés D3 (savoirs didactiques) ne sont pas absents. Pour d'autres, l'essentiel des savoirs dispensés sont de nature didactique D3 et les savoirs D1 sont représentés de manière négligeable. Les savoirs D2 (organisation du savoir à enseigner) sont globalement peu présents voire inexistants, ce qui ne signifie pas qu'ils sont absents de la formation. Les savoirs transversaux sont également pris en charge de manière très diversifiée suivant les formateurs et s'intègrent avec plus ou moins de cohérence dans les activités proposées. Ils dépendent généralement de la stratégie adoptée par les formateurs. Il convient de noter que les savoirs T3, relatifs aux programmes et aux instructions officielles, sont minoritairement traités par les formateurs, de même que les savoirs T2 qui concernent les savoirs relatifs aux élèves qui sont souvent évoqués de manière épisodique.

On peut donc convenir que les contenus de formation dispensés dans le cadre d'un même IUFM étaient extrêmement divers et variés suivant les formateurs. Il est également indéniable que la biographie professionnelle des formateurs n'est pas sans incidence sur les savoirs prioritairement convoqués lors des séances de formation, même s'il n'y a pas automaticité entre un cursus qui intègre une dimension didactique et une pratique qui privilégie des savoirs didactiques[18].

Au niveau des jeux de postures privilégiées par les formateurs, on peut relever que les postures « élèves » et « étudiants » sont largement majoritaires avec des répartitions extrêmement variables. La posture « enseignant » est rarement offerte aux stagiaires, même si on peut relever que c'est à l'initiative de ces derniers qu'elle l'est le plus souvent. Les incidents repérés (ils sont rares dans l'ensemble des séances filmées) le sont d'ailleurs

[18] Un des formateurs ayant une thèse en didactique des mathématiques (datant de 1985) convoque majoritairement des savoirs D1 et très peu de savoirs D3 mais, ce formateur récuse publiquement aujourd'hui les apports de la didactique en formation.

souvent au moment du passage d'une posture à une autre soit que le formateur n'a pas été suivi dans la dynamique qu'il propose, soit que les stagiaires s'inscrivent dans une posture qui ne correspond pas à celle attendue par le formateur.

L'organisation et la gestion des différentes tâches prescrites dans le cadre d'une séance de formation sont généralement liées au projet du formateur et aux stratégies dans lesquelles il s'inscrit. Tous les modes de gestion (individuel, collectif, en groupe) sont présents dans les séances observées, même si leur usage est très différent d'un formateur l'autre. Deux formateurs sont même dans des gestions quasi uniformes de leur séance, strictement collective pour l'un et strictement par groupe pour l'autre. Ces gestions totalement différentes qui, de plus, semblent être un organisateur des pratiques de ces formateurs, témoignent indéniablement de visions de la formation qui s'opposent même si l'on ne peut en mesurer les conséquences pour les professeurs stagiaires.

V. CONCLUSION

Cette recherche a mis en évidence que la question des savoirs mathématiques dispensés en formation initiale, ainsi que celle des pratiques des formateurs en lien avec ces savoirs sont donc au cœur des enjeux de la formation en mathématiques des futurs enseignants. Elle a également montré la diversité des pratiques des formateurs en IUFM, tant au niveau des savoirs qu'au niveau de la dynamique en jeu lors des séances de formation.

Aujourd'hui que le cadre institutionnel de formation des enseignants en France a changé, on peut se demander si cette diversité est toujours effective. Cela parait néanmoins indubitable compte tenu du fait que les formateurs sont toujours les mêmes et qu'il faudra attendre quelques années pour que ce corps de métier évolue en intégrant davantage d'enseignants-chercheurs.

Néanmoins, la restructuration de cette formation va forcément imposer une nouvelle orientation des contenus de formation et redistribuer la carte des savoirs pour s'adapter à cette nouvelle donne. L'éparpillement des enseignements mathématiques en UE va-t-il avoir pour conséquence une différenciation affichée des savoirs : telle UE sera consacrée aux savoirs didactiques, telle autre aux savoirs disciplinaires ? Quelle place sera laissée à la professionnalisation dans ces enseignements ? Quelle place sera laissée à la recherche dans ces parcours ? Il est indéniable que la nature des maquettes de Master témoignera des choix adoptés par les différentes universités et que les étudiants auront surement à choisir entre des parcours qui intègrent de façon plus ou moins prépondérante des cours de didactique ou des cours de mathématiques. Quelles seront les conséquences pour leur entrée dans le métier ? Gageons que cette question restera aussi cruciale qu'elle ne l'était du temps de la formation en IUFM.

REFERENCES

Altet M. (2004) L'intégration des savoirs de sciences de l'éducation dans l'expertise enseignante : représentations et rapports aux savoirs professionnels des enseignants. In Lessard C., Altet M., Paquay L., Perrenoud P. (Eds.) (pp. 159-178) *Entre sens commun et sciences humaines.* Bruxelles : Editions De Boeck.

Baillauques S. (1998) Le travail des représentations dans la formation des enseignants. In Paquay L., Altet M., Charlier E., Perrenoud P. (Eds.) (pp.41-61) *Former des enseignants professionnels*. Bruxelles : Editions De Boeck.

Ball D. L. (2008) *Building professional education for teaching mathematics: Meeting the challenges*. In National Council of Supervisors of Mathematics Salt Lake City, UT.

Ball D. L., Thames, M.H., Phelps, G. (2008) Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education* 59(5), 389-407.

Ball D. L., Hill H.C, Bass H. (2005) Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator* 29(1), p. 14-17, 20-22, 43-46.

Bucheton, D. (Ed.) (2009) *L'agir enseignant : des gestes professionnels ajustés*. Toulouse : Octarès éditions.

Butlen D. (2004) *Apprentissages mathématiques à l'école élémentaire. Des difficultés des élèves de milieux populaires aux stratégies de formation des professeurs des écoles*. HDR, Université Paris 8, Paris.

Blanchard-Laville C. (2000) *Malaise dans la formation des enseignants*. Paris : L'Harmattan.

Cyr S., DeBlois L. (2007) Étude de la compréhension des composantes de la notion de corrélation chez des futurs maîtres du secondaire. *Petit x 75*, 50-73.

Butlen D., Charles-Pézard M., Masselot P. (2010) De l'analyse de pratiques à des scénarios de formation : accompagnement de professeurs des écoles enseignant les mathématiques affectés en première nomination dans des établissements de ZEP. In Goigoux R., Ria L., Toczek-Capelle M.C. (Eds.) *Les parcours de formation des enseignants débutants.* Clermont-Ferrand : Presses Universitaires Blaise Pascal.

DeBlois L., Squalli H. (1997) l'analyse des erreurs des élèves en mathématiques par des étudiantes et des étudiants en formation initiale à l'enseignement. In Tardif M., Ziarko H. (Eds.) *La formation initiale, entre continuité et ruptures* (pp. 125-143). Presses de l'Université de Laval, Québec.

DeBlois L., Squalli H. (2002) Implication de l'analyse de productions d'élèves dans la formation des maîtres. *Educational Studies in Mathematics* 50(2), 212-237.

Delaney S., Ball D. L, Hill H. C., Schilling S.G., Zopf D. (2008) Mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education* 11(3), 171-197.

Hill H., Ball D. L., Schilling S. (2008) Unpacking "pedagogical content knowledge": Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education* 39 (4), 372-400.

Houdement C. (2003) *Un zoom sur les stratégies de formation des professeurs des écoles utilisées par les formateurs en mathématiques*. Table ronde du « XXXème colloque national des professeurs et formateurs de mathématiques chargés de la formation des maitres ». Avignon, France.

Houdement C., Kuzniak A. (1996) Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques* 16(3), 289-322.

Lessard C., Tardif M. (1999) *Le travail enseignant au quotidien*. Bruxelles : De Boeck.

Marchive A. (2006) *Recherches en didactique et formation des enseignants : analyse d'entretiens biographiques auprès d'enseignants d'un IUFM français*. In EMF 2006. Sherbrook, Canada.

Pastré P., Mayen P., Vergnaud G. (2006) La didactique professionnelle. *Revue française de pédagogie* 154, 145-198.

Pastré P., Bru M., Vinatier I. (2007) Les organisateurs de l'activité enseignante. Perspectives croisées. *Recherche et Formation 56*. ENS de Lyon, Institut français de l'éducation.

Robert A. et Rogalski J. (2002) Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques : une double approche, *Revue canadienne de l'enseignement des sciences, des mathématiques et des technologies* 2(4), 505-528.

Roditi E. (2005). *Les pratiques enseignantes en mathématiques. Entre contraintes et liberté pédagogique*. Paris : L'Harmattan.

Shulman L. (1986) Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher 15(2)*. American Educational Research Association.
Shulman L. (1987) Knowledge and teaching: Foundation of a new reform. *Harvard Review* 57(1), 1-22.

ANNEXE

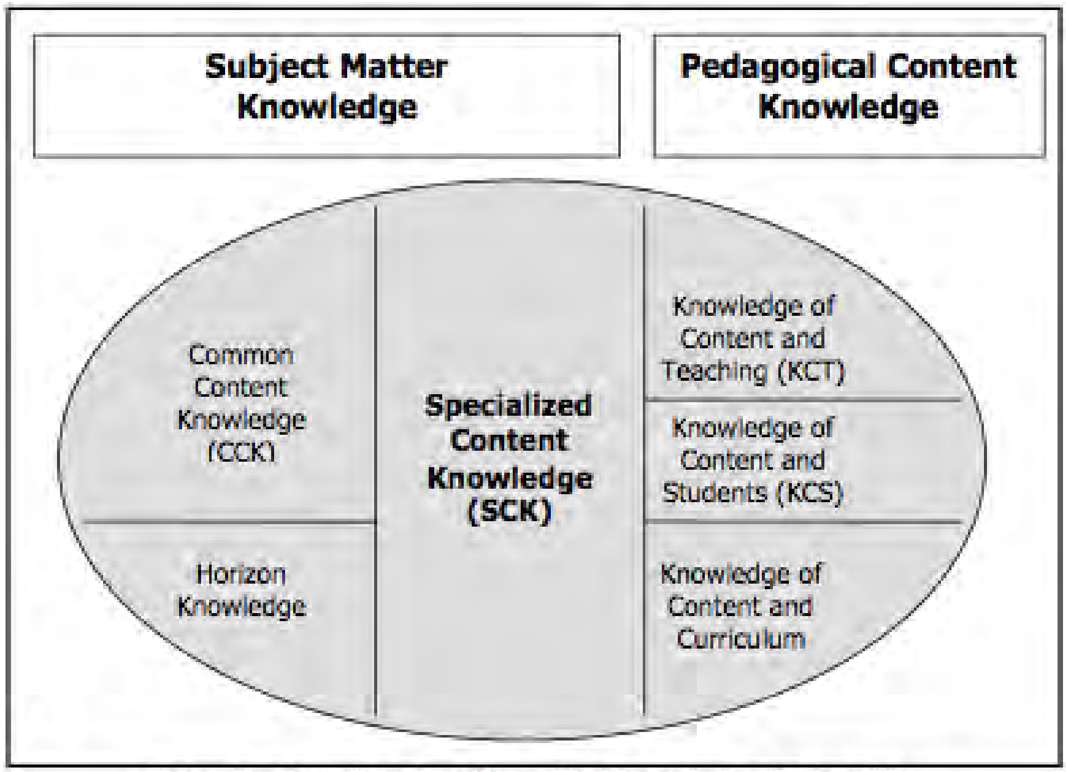


Figure 5. Domains of mathematical knowledge for teaching