

1 En matière de **diagnostic des difficultés mathématiques des élèves**, on en est à peu près encore au niveau des médecins de Molière. On repère bien qu'il y a des difficultés et on observe quelques symptômes isolés, mais il n'y a pas de lien systématique avec une théorie de la connaissance mathématique. C'est différent en langue française et en psychologie, où il y a des outils diagnostiques fins et en lien avec la théorie, même si on peut les contester (comme le Q.I.).

C'est que les savoirs mis en jeu dans l'activité mathématique sont de natures très diverses; mais il y a illusion de simplicité (par rapport au couple lecture/écriture en français par exemple). C'est cette diversité qui fait que diagnostiquer les compétences mathématiques se révèle extrêmement difficile.

Certes les **savoirs théoriques (définitions et propriétés des objets mathématiques)** se présentent en général de manière explicite et on peut au moins les nommer; mais les autres savoirs apparaissent de manière plus diffuse ou implicite.

D'où l'importance de différencier les différents types de savoirs mathématiques, afin de pouvoir mettre en place un diagnostic des difficultés et de pouvoir envisager des démarches de remédiation pertinentes (et intelligentes!) →

2 Nous proposons de nous baser pour cela sur une typologie des connaissances (que nous avons développée par ailleurs) que nous appelons l'« épistémographie » laquelle postule que les objets mathématiques présentent (au moins) trois aspects (dimensions) indissociables: **une dimension sémiolinguistique, une dimension pratique et une dimension théorique.**

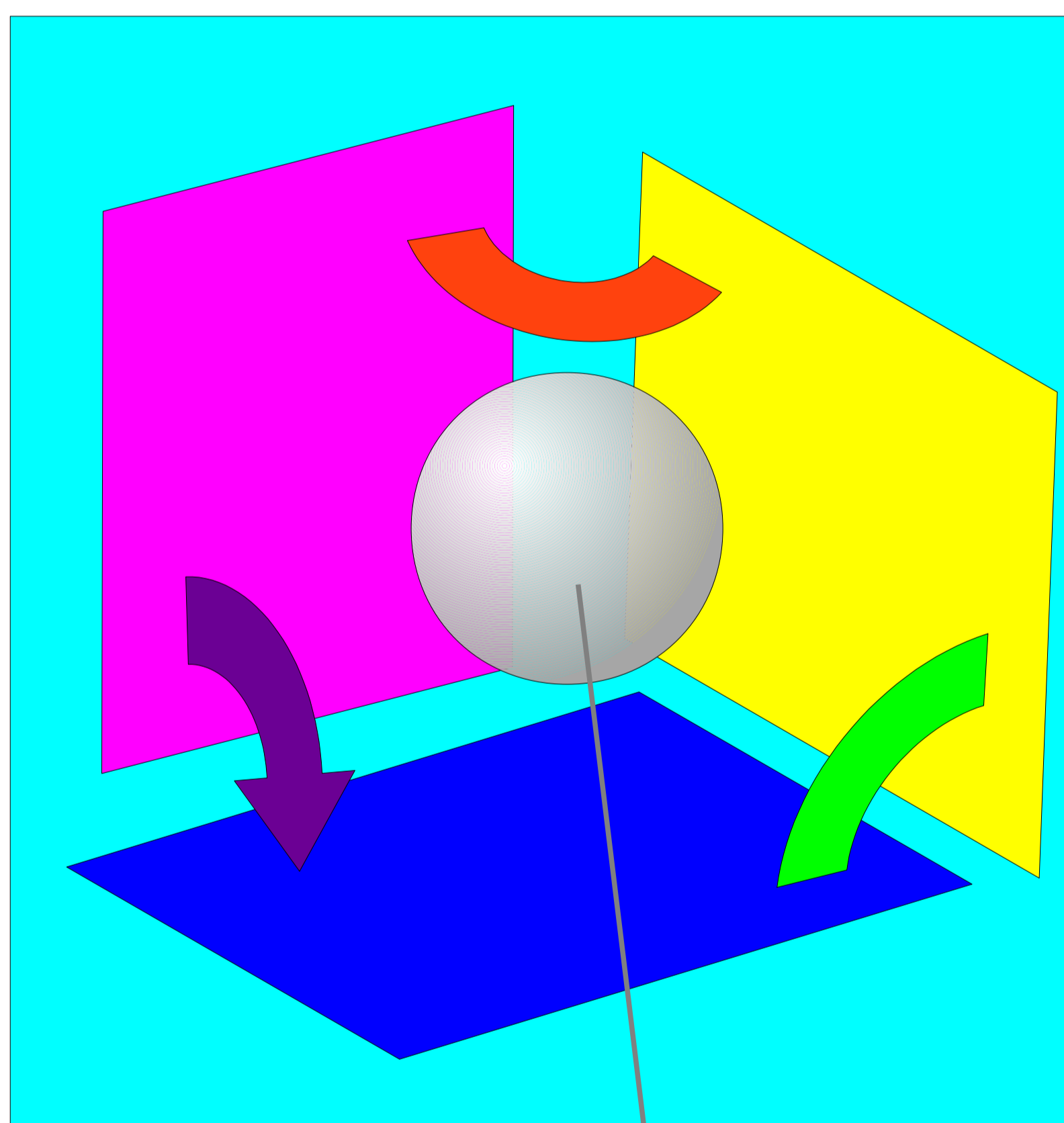
Par exemple les trois dimensions de la multiplication sont:

- **sémiolinguistique: les mots "multiplication", "fois", "par" et les symboles "x" qui l'expriment, mais aussi les tables de multiplication etc.**
- **pratique: les algorithmes de multiplication posée, les stratégies de multiplication pensée, l'usage des calculettes, des bouliers, des doigts, des règles à calcul etc.**
- **théorique: tout ce que la théorie mathématique dit de la multiplication (qu'elle est commutative, distributive par rapport à l'addition etc.).**

Pour pouvoir travailler dans ces trois dimensions, il faut mobiliser pas moins de 8 types de connaissances →

9

- Les connaissances **nomologiques** sont liées aux règles du jeu mathématique;
- *quand est-ce qu'un résultat à la calculette est acceptable et quand est-ce qu'il ne l'est pas?*
- La difficulté propre aux règles du jeu est double: il faut les connaître, mais aussi accepter de les suivre (Wittgenstein 1995, Bouveresse 1987), ce qui peut poser des problèmes particulièrement ardu dans le cas d'élèves qui justement rechignent à suivre les règles de l'école (Giroux, 2008).
- Leur formulation est plus ou moins équivalente à un énoncé du type : « pour faire ceci on doit » (ou : « on a le droit de » ou : « on ne peut pas » etc.) « faire cela. »
- Voir: « Droits et devoirs du petit mathématicien » (Daniel Lacombe)
- Légitimité : voir CK4 (Nicolas Balacheff)
- Nécessité (Assude, Sackur, Maurel, Drouhard, Paquellier)
- Ludwig Wittgenstein (le « second » Wittgenstein)



4

Les **connaissances notionnelles** sont celles des propriétés d'ordre théorique des objets mathématiques:

par exemple la commutativité de la multiplication en fait partie.

Les connaissances notionnelles sont indépendantes du registre de représentation sémiotique utilisé, et sont dépourvues de finalité explicite.

Elles portent sur les objets mêmes du domaine, leur nature (définitions) et leurs relations (propriétés)

Questions notionnelles:

- *Qu'est-ce que c'est?*
- *En quoi ça consiste?*
- *De quoi c'est fait?*
- *À quoi est-ce relié?*

6

- Les **connaissances instrumentales** sont celles qui sont mobilisées pour l'emploi des instruments (calculette, doigts, abaques, bouliers, calcul posé...)
- Les connaissances instrumentales se distinguent des **connaissances notionnelles** en ce qu'elles sont orientées vers un but (téléologique).
- Leur formulation est plus ou moins équivalente à un énoncé du type : « pour faire ceci il faut » (ou : « on a intérêt à » ou : « mieux vaut éviter de » etc.) « faire cela. »
- En font partie les méta-connaissances stratégiques, cf. Aline Robert, Marc Rogalski, Jean-Luc Dorier (le « méta »)
- Questions portant sur des instruments:
- *Comment on s'en sert?*
- *À quoi ça sert ?*
- *Qu'est-ce qu'on a intérêt à faire pour... ?*

7

- Parmi les connaissances instrumentales on distingue Les **connaissances pragmatiques** qui consistent à utiliser les **représentations sémiotiques** comme **instruments**. Par exemple: Pour multiplier par 10 un nombre entier il suffit d'ajouter (à son écriture décimale) un "0"
- Sur l'emploi des **signes** comme **outils** : cf. Vygotsky →

8

- Parmi les connaissances instrumentales on distingue les **connaissances pratiques** qui sont celles qui permettent d'associer **instruments** et **notions**.
- Par exemple le fait qu'on peut utiliser la (**notion de**) **distributivité** pour **effectuer le calcul ("de tête")** de 3×124 (consistant à décomposer 124 en $100+20+4$).
- Il s'agit donc de la connaissance de l'usage instrumental d'**Objets** (par ex. **théorèmes, lois, propriétés...**) en tant qu'**outils** (cf. Régine Douady) →

10

- Les **connaissances identificatoires** sont celles qui permettent l'identification et la catégorisation des objets ("tu vois, là, ce que tu viens de faire, c'est une multiplication!")
- Ce qui permet d'identifier (d'apposer un nom) et de catégoriser.
- Les définitions jouent un rôle dans la (re)connaissance des objets (mais aussi des **instruments** : « la factorisation »)
- Identifier, c'est aussi Id-entifier, soit faire d'une chose même, une entité (Juan Samaja) →

3

Connaissances sémio-linguistiques:

- Connaissance des systèmes sémiotiques (en particulier les langages) qui permettent de représenter les faits et les objets.
- par exemple savoir que " $2 \times n$ " et " $2n$ " sont deux écritures équivalentes, non " 2×3 " et " 23 "
- Ces connaissances sont indispensables pour lire, écrire représenter, schématiser, interpréter, communiquer... des documents scientifiques (bref, pour travailler).
- Le langage mathématique (Laborde) est constitué de :
 - langage naturel (ex. «deux fois trois»)
 - langage formel (ex. « 2×3 ») et
 - représentations non linguistiques (ex. « $///$ $///$ »)
- Les langages (naturel et formel) sont des systèmes de représentation sémiotiques particuliers
- Tous les Systèmes de Représentation Sémiotique peuvent être analysés par les théories sémiotiques (voir par ex. Peirce, Eco, Duval...)
- Les langages (et seulement eux) peuvent être analysés par les théories linguistiques (voir par ex. Saussure, Chomsky...)

5

Les **connaissances sémantiques** sont celles qui permettent d'associer **représentations** et **notions**. Nous n'avons aucun accès immédiat (sensoriel) aux **objets mathématiques**

- Un **déterminant** n'a ni couleur, ni saveur, ni odeur...
- Nous n'y avons accès qu'au travers des **représentations sémiotiques** (linguistiques ou non)
- Raymond Duval: "il n'y a pas de noésis sans sémiosis"

Une tâche plus difficile qu'il n'y paraît: décrire la sémantique des mathématiques (et plus généralement des langages formels)

- Frege (fondateur de la logique moderne)
- Tarski (base de la théorie des Modèles)

Pour les langages scientifiques en général: Gilles-Gaston Granger.

- Pour Frege le **sens** d'une **proposition** est l'état de fait qu'elle exprime tandis que sa **dénotation** en est la **valeur de vérité**.
- Selon W V O Quine, la « dénotation » de Tarski (qui dit que la signification de « la neige est blanche » est que la neige est blanche) n'est au fond qu'une dé-citation (suppression des guillemets) →

11

Le projet actuel, mené au sein du groupe MASH - CESAME de l'IREM de Nice, a pour but de réaliser un outil diagnostique des difficultés mathématiques des élèves, sur le principe d'un guide d'entretien individuel avec l'élève, basé sur l'analyse épistémographique des connaissances.

