FACTEURS DE COMPLEXITÉ DES MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES

NAJAR* Ridha

Résumé – Dans cet article, nous étudions l'effet des changements qui se produisent en mathématiques lors du passage du secondaire au supérieur. L'analyse des réponses d'étudiants entrant à l'université à un test d'évaluation, fait état de difficultés persistantes et d'obstacles dans la mise en œuvre des connaissances apprises. L'article envisage de caractériser ces difficultés et de déterminer les besoins d'apprentissage pouvant les atténuer.

Mots-clefs : rupture, abstraction, formalisme, praxéologie mathématique.

Abstract – In this article, we study the effect of the changes that occur in mathematics during the transition from high school to university. The analysis of the responses of students entering the university to an evaluation test, reveals persistent difficulties and obstacles in the use of the knowledge learned. The paper considers characterizing these difficulties and identifying learning needs that can mitigate them.

Keywords: rupture, abstraction, formalism, mathematical praxeology.

I. INTRODUCTION

Les mathématiques enseignées dans les filières scientifiques spécialisées du supérieur ont toutes les caractéristiques des mathématiques savantes : concepts abstraits, raisonnement logique, développement axiomatique et formel. Les étudiants poursuivant leurs études dans ces filières sont généralement « choqués » par ce changement brutal de la discipline par rapport à ce qu'ils se sont habitués à voir et à étudier avant en mathématiques. Malgré leurs efforts pour acquérir les nouveaux modes de travail et réussir cette « nouvelle » matière, beaucoup d'étudiants, attachés à « des façons de faire » et à des habitudes longuement apprises au secondaire, se trouvent désarmés devant cette transition brutale. Cette situation nous conduit à nous interroger sur les facteurs à l'origine de la complexité des mathématiques supérieures, et sur les besoins d'apprentissage en résultant.

II. PROBLEMATIQUE ET CADRE THEORIQUE

Nous considérons que la complexité des mathématiques enseignées n'y est pas intrinsèque, elle décrit plutôt le rapport de compréhension de l'apprenant vis-à-vis la discipline. Ce rapport se trouve étroitement lié à la formation institutionnelle préalable, qui détermine, pour une bonne part, les possibilités de réussite de l'étudiant dans la matière. Ce faisant, nous adoptons l'approche anthropologique (Chevallard 1998) pour chercher ce qui, dans les choix institutionnels d'enseignement se trouve à l'origine de la complexité des mathématiques enseignées au supérieur. Des recherches antérieures ont ciblé trois composantes particulières des mathématiques supérieures qui pourraient engendrer cette complexité : la nature abstraite des objets mathématiques (Chin et Tall 2002), le formalisme mis en œuvre dans les énoncés mathématiques (Dorier 1997, Durand-Guerrier V. Arsac G. 2003), et les praxéologies mathématiques composant ces énoncés (Bosch 2004). La première composante renvoie au mode de construction axiomatique et formel des objets mathématiques, le formalisme se réfère au langage symbolique et aux règles de logique utilisés dans les développements mathématiques, quant à la troisième composante, elle concerne la complétion des praxéologies mathématiques construites, leur possibilité d'intégration, ainsi que les rôles joués par leurs composantes (tâches, techniques, technologies, théories).

* Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue – Canada – ridha.najar@uqat.ca

Concernant cette troisième composante, Bosch, Fonseca et Gascon (2004) expliquent les difficultés en mathématiques qui surgissent à l'entrée de l'université par le fait que les praxéologies mathématiques (PM) enseignées au secondaire sont généralement ponctuelles, rigides et peu coordonnées entre elles, ce qui rend difficile à l'université, voire empêche les étudiants, de travailler sur les praxéologies mathématiques locales (PML), ou régionales, relativement complètes enseignées. Pour justifier ce point de vue, les auteurs postulent l'existence d'indicateurs caractéristiques du degré de complétude d'une PML, que nous résumons dans les points suivants :

i_1) Intégration des types de tâches composant la PML, soit par un discours technologique, soit par le développement successif des techniques associées.

i_2) Existence de techniques alternatives associées aux types de tâches des PML et présence d'éléments technologiques permettant de questionner ces techniques et d'effectuer un choix approprié parmi plusieurs techniques pour réaliser une tâche donnée.

i_3) Indépendance des techniques par rapport aux objets ostensifs et importance du choix et de la gestion des ostensifs dans la réalisation de la tâche donnée.

i_4) Existence de techniques réversibles permettant de résoudre une tâche et la tâche inverse.

i_5) Possibilité d'interpréter le fonctionnement des données et/ou des techniques.

i_6) Existence de tâches mathématiques ouvertes, où les données, les inconnues et/ou le mode de raisonnement à adopter ne sont pas préétablis ou indiqués.

i_7) Incidence des éléments technologiques associés aux PML sur la pratique mathématique, comme la génération de nouveaux types de tâches et de techniques (par le biais, entre autres moyens, d'un changement de cadre de travail ou de système de représentation sémiotique).

Utilisant ces indicateurs, nous avons étudié dans (Najar 2015) les rapports aux notions ensemblistes fonctionnelles des institutions enseignement secondaire (ES) et première année des classes préparatoires scientifiques (CPS1) en Tunisie. Cette étude fait état d'une rupture et de dysfonctionnement institutionnels lors du passage de ES aux CPS1. Elle montre que dans les CPS1, l'environnement praxéologique relatif à l'enseignement des notions ensemblistes fonctionnelles est dominé par des PML relativement complètes, et que le savoir en jeu fonctionne essentiellement au niveau formel-structural. D'un autre côté, dans ES, l'étude montre que le fonctionnement des connaissances dans le topos des élèves est de niveau technique-procédural et que l'environnement praxéologique est dominé par des PM ponctuelles (PMP) et isolées, dont la mise en œuvre est axée essentiellement sur le bloc pratico-technique, et dont le matériel technologique joue un rôle négligeable dans le travail donné aux élèves. Cette situation semble être à l'origine de difficultés et d'obstacles d'apprentissage pour les étudiants entrant en CPS1. Notre travail dans cet article envisage de caractériser ces difficultés et de voir s'il y a un rapport entre ces difficultés et les choix d'enseignement dans les institutions ES et CPS1.

III. METHODOLOGIE

Pour répondre à notre questionnement, nous analysons les réponses de deux classes d'étudiants des CPS1 à un exercice extrait d'un test d'évaluation. Notons que dans les CPS1, les mathématiques constituent la matière d'enseignement de base[1], et les étudiants sont généralement fortement investis dans le projet de formation de leur institution. Cela suppose une limite de l'effet des caractéristiques personnelles des étudiants (p. ex., manque de travail ou d'intérêt pour la matière) et permettra, de ce fait, de différencier ce qui relève réellement

[1] Les étudiants font 12 heures de mathématiques par semaine durant toute l'année universitaire.

des choix et des contenus d'enseignement, de ce qui relèverait d'apprentissages normalement attendus des étudiants, mais non réalisés.

Nous situant dans ce contexte, notre travail comprend deux parties. Dans la première, nous réalisons une analyse a priori de l'exercice du test pour décrire les caractéristiques des mathématiques enseignées. Cette analyse se fera par rapport aux trois facteurs présentés dans le cadre théorique : nature des objets mathématiques en jeu, langage formel à mettre en œuvre et complétude des PM intervenant dans la réalisation des tâches. Dans la deuxième partie, nous analysons les réponses des étudiants aux questions de l'exercice, en vue d'identifier, parmi les caractéristiques déterminées dans la première partie, les facteurs de complexité qui sont à l'origine des difficultés qu'éprouvent les étudiants.

IV. TEST D'EVALUATION

Le test est soumis à 43 étudiants des CPS1. Il entre dans le cadre d'une évaluation sommative ordinaire donnée dans le courant du deuxième trimestre de l'année universitaire. Durant la période qui a précédé le test, les étudiants ont étudié dans le cours d'algèbre les thèmes sur : les ensembles et les applications, les structures algébriques, les espaces vectoriels et les applications linéaires, les espaces vectoriels de dimensions finies et les matrices. De ce fait, les étudiants sont supposés être familiarisés avec les notions en jeu dans le test ainsi qu'avec les types de tâches donnés.

1. Analyse a priori

L'analyse a priori vise à caractériser les mathématiques enseignées dans les CPSI. Nous nous référons pour cela aux trois facteurs décrits dans le paragraphe III : la nature des objets mathématiques en jeu, la complétion des PM intervenant dans la résolution et le formalisme à mettre en œuvre pour la réalisation des tâches données.

L'exercice porte sur les notions d'injection et de surjection dans le contexte des morphismes d'espaces vectoriels de matrices. Nous nous limitons dans cette analyse à la question 3-b. Toutefois, dans notre conclusion, nous tenons compte des réponses des étudiants à toutes les questions de l'exercice.

L'exercice : On désigne par $M_n(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des matrices carrées d'ordre n à coefficients complexes. Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ et considérons l'application

$$\begin{aligned} f_A : M_n(\mathbb{C}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{C}) \\ M &\longmapsto AM - MA \end{aligned}$$

1) Montrer que f_A est une application linéaire.
2) En déduire que l'ensemble F des matrices M de $M_n(\mathbb{C})$ vérifiant MA = AM est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{C})$.
3) a- Calculer $f_A(I_n)$, où I_n désigne la matrice unité de $M_n(\mathbb{C})$.
b- Existe-t-il des matrices A de $M_n(\mathbb{C})$ telles que f_A soit injective?
c- Existe-t-il des matrices A de $M_n(\mathbb{C})$ telles que f_A soit surjective?

L'exercice étudie des propriétés d'une application f_A paramétrée à l'aide d'une matrice A. La distinction entre les statuts du paramètre A et de la variable M est essentielle pour répondre aux questions de l'exercice. Les questions 1 et 2 sont fermées et peuvent être considérées comme routinières dans les CPS1. De même pour la question de calcul 3-a. Les questions 3-b et 3-c sont ouvertes et sont susceptibles de diverses formulations dont dépend le choix des techniques de résolution. La question 3-b fait intervenir les notions de matrice, d'application linéaire entre espaces vectoriels, et d'injection. Il s'agit de trois notions abstraites, définies et étudiées dans les CPS1 de façon axiomatique formelle.

Pour étudier la complétion des PM intervenant dans la résolution, nous utilisons les indicateurs (ind.) i_1 à i_7 formulés dans II.

La question est ouverte (ind. i_6). Plusieurs techniques sont possibles pour répondre à la question (ind. i_2), selon que le résolveur choisit de travailler dans le cadre linéaire ou ensembliste. Toutefois, la réalisation de la tâche est supposée facilitée par la réponse à la question 3-a $[f_A(I_n) = 0_n]$ qui suggère implicitement le travail dans le cadre linéaire. Nous présentons deux techniques de résolution possibles :

Technique 1 : travail dans le cadre linéaire :

D'après 3-a, $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$: $f_A(I_n) = 0_n$. Donc, $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $Kerf_A \neq \{0_n\}$. f_A est donc non injective, quelle que soit la matrice A de $M_n(\mathbb{C})$.

Cette technique requiert de tenir compte du contexte de l'exercice et d'utiliser une caractéristique de l'injection pour les applications linéaires (ind. i_7), de faire le lien entre les questions 1, 3-a et 3-b, d'interpréter le calcul $f_A(I_n) = 0_n$ en termes de noyau (ind. i_5), et d'utiliser la négation logique d'une proposition (pour non injective) (ind. i_4).

Technique 2 : travail dans le cadre ensembliste.

La résolution peut se faire de plusieurs manières, selon la caractéristique ensembliste choisie pour l'injection. Une façon de procéder est :

[f_A est injective] $\Leftrightarrow$ [Pour tous M et N dans $M_n(\mathbb{C})$, $f_A(M) = f_A(N) \Longrightarrow M = N$] (1)

On peut ensuite poursuivre de plusieurs façons :

1. Remarquer que $f_A(0_n) = f_A(I_n) = 0_n$ avec $0_n \neq I_n$, et ceci pour toute matrice A de $M_n(\mathbb{C})$. On en déduit que, quelle que soit la matrice A de $M_n(\mathbb{C})$, f_A n'est pas injective.
2. Traiter la question dans le cas général. (1) devient alors :

f_A est injective $\Leftrightarrow$[Pour tous M et N dans $M_n(\mathbb{C})$, $A(M - N) = (M - N)A \Longrightarrow M = N$] (2)

On remarque ensuite que (2) peut toujours se réaliser sans que l'on ait nécessairement, $M = N$. Il suffit de considérer M quelconque dans $M_n(\mathbb{C})$ et $N = M - I_n$.

Cette technique demande d'abord d'adapter la caractéristique ensembliste de l'injection au cas de l'application f_A (ind. i_5). Pour cela, il faut distinguer entre le statut de la matrice A d'une part et celui de M et N d'autre part, il faut traiter convenablement le calcul matriciel et bien gérer les connecteurs et les quantificateurs logiques en jeu (ind. i_3). Il faut ensuite savoir résoudre le problème d'existence des matrices M et N vérifiant (1) et utiliser la négation logique d'une proposition (pour non injective) (ind. i_4).

Cela dit, d'autres techniques sont également possibles dans le cadre ensembliste. Dans tous les cas, la réponse à cette question demande de fixer un cadre de travail, de bien comprendre la fonctionnalité des données de l'exercice, de choisir une technique appropriée au cadre de travail choisi et de mobiliser les savoirs appropriés que requièrent la technique et le cadre choisis. Il est important également de bien gérer le symbolisme et les notions de logique en jeu. Tous ces facteurs font que la PM associée à la tâche intègre autour de la notion d'injection plusieurs PMP (ind. i_1). Il s'agit des PMP relatives aux notions : application injective, application linéaire, noyau d'une application linéaire, calcul matriciel, équation matricielle, quantificateurs et connecteurs logiques.

Nous considérons pour cela que la PM associée à la tâche donnée est de niveau local. La présence des indicateurs i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6 et i_7 montre que cette praxéologie est d'un bon degré de complétude. Nous remarquons par ailleurs que le choix de la technique 1, qui est attendue des étudiants, fera preuve d'une certaine expertise au niveau du choix de la stratégie de résolution. Par contre, le choix d'une technique utilisant le cadre ensembliste montre des difficultés au niveau stratégique, vu que le travail dans ce cadre néglige le contexte de l'exercice, et omet la mise en relation de ses différentes données.

Finalement, pour ce qui est du formalisme à mettre en œuvre dans la résolution, il est évident que la réponse à la question 3-b met en œuvre un lange formel assez développé et requiert une bonne maitrise de ce langage et l'appropriation du sens qu'il porte.

Notons à cet égard que l'étude des rapports institutionnels aux notions ensemblistes fonctionnelles dans ES (Najar 2015) a révélé que les tâches données aux élèves à propos de ces notions sont essentiellement rigides et stéréotypées. Elles sont construites de manière à ce que leurs techniques de réalisation ne fassent pas appel au matériel théorique sous-jacent et de façon à ce que les élèves soient capables de reproduire ces techniques sans avoir besoin de mettre en œuvre le matériel technologique associé, ou de connaitre le sens et les règles d'usage du symbolisme manipulé. Cet état mène souvent les élèves de ES à développer des mécanismes de travail peu réfléchi à propos desdites notions.

2. Analyse des productions des étudiants

Cette analyse vise l'identification et la caractérisation des difficultés qu'éprouvent les étudiants dans leur travail. Nous déterminons en conséquence ce qui constitue, pour les étudiants, la complexité des mathématiques enseignées. Nous nous référons pour ce faire aux trois composantes de la complexité pointées dans II.

Pour la question 3-b, sur 43 copies, nous dénombrons 23 réponses correctes, 17 réponses fausses et 3 copies sans réponses (soit un taux d'échec de 47 %).

Sur les 23 réponses correctes, il y a 16 étudiants qui ont donné des solutions précises et convenablement rédigées. Pour les 7 autres solutions, nous notons un certain implicite ou non-conformité dans la rédaction, notamment à propos de l'usage des éléments de logique.

Concernant les 17 réponses fausses, 4 étudiants n'ont pas réussi à exprimer correctement la propriété d'injectivité dans le contexte de l'exercice. Les 13 autres étudiants sont arrivés à formuler convenablement l'injectivité de f_A, soit en termes de noyau, soit dans le cadre ensembliste. Nous commentons ci-après deux exemples de réponses fausses représentant les erreurs et les difficultés les plus fréquentes constatées chez les étudiants.

Exemple 1

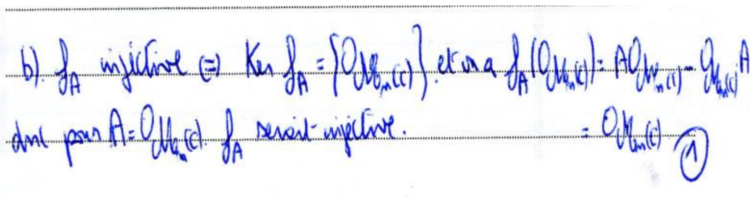

Figure 1 *– Production 1*

Dans cette réponse, l'étudiant exprime convenablement l'injectivité de f_A en termes de noyau et calcule $f_A(0_n)$, mais ne cherche pas si $Kerf_A$ contient des éléments autres que 0_n. Il semble confondre entre le fait que $Kerf_A$ contient 0_n et se réduit à 0_n. Dans sa conclusion, l'étudiant attribue à 0_n, valeur particulière de la variable M, le statut du paramètre A. Il y a là difficulté dans l'appropriation du sens de la caractérisation de l'injection énoncée et également dans le traitement du formalisme qui en a découlé.

Exemple 2

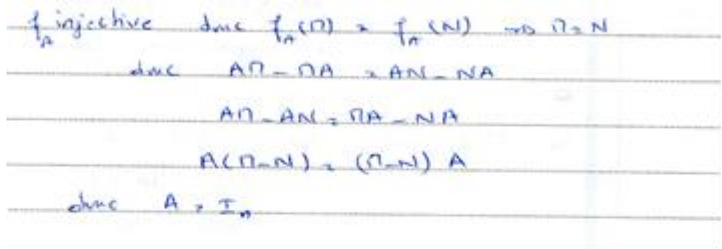

Figure 2 *– Production 2*

L'étudiant ici utilise une caractérisation ensembliste de l'injection et emploie le mot «donc» à la place d'un connecteur logique. Après avoir reformulé l'égalité fonctionnelle $f_A(M) = f_A(N)$ par l'égalité matricielle $A(M - N) = (M - N)A$, l'étudiant ne réussit pas à terminer son travail convenablement. Il se limite à donner un cas de matrice A pour lequel l'égalité $A(M - N) = (M - N)A$ est vérifiée pour tous M et N dans $M_n(\mathbb{C})$, alors qu'il devrait chercher la (ou les) matrice(s) A pour lesquelles l'égalité $A(M - N) = (M - N)A$ n'ait lieu que si $M = N$. La quantification des matrices dans la formulation de « f_A injective » de départ (absente dans le travail de l'étudiant) est essentielle pour la réalisation de la tâche. N'ayant pas tenu compte de cette quantification a, semble-t-il, induit l'étudiant dans des confusions pour connaitre ce qu'il doit chercher exactement. À la fin, l'étudiant ne précise pas si pour $A = I_n$, f_A est injective ou non!

3. Commentaire pour les réponses à la question 3-b

Notons tout d'abord que le taux d'échec de 47 % pour cette question est significatif. C'est que la technique 1 de résolution est supposée accessible pour les étudiants des CPS1. D'un autre côté, nous remarquons que la majorité des étudiants dont les réponses étaient erronées (13 sur 17) ont réussi à formuler convenablement le problème de l'injectivité de f_A, soit dans le cadre linéaire, soit dans le cadre ensembliste. Les difficultés éprouvées se sont produites lors du traitement avec la formulation donnée, elles se situent essentiellement dans les points suivants : appropriation du sens porté par les énoncés formels, confusion entre les statuts des matrices en jeu, traitement avec une application, une équation ou un ensemble paramétré, difficultés dans l'usage des éléments de logique.

D'un autre côté, considérant le choix de la technique de résolution (pour les réponses correctes, comme pour les réponses fausses), nous dénombrons 22 étudiants sur 43 (soit plus que la moitié) qui ne sont pas arrivés à tirer profit de la réponse à la question 3-a et effectuer une déduction. Ceci pourrait s'expliquer par des difficultés dans la mise en relation des données de l'exercice et une tendance à travailler la question de façon isolée. Autrement dit, une tendance à travailler au niveau ponctuel des praxéologies mathématiques (application de la définition de l'injection dans le cadre ensembliste).

4. Constats quant aux réponses des étudiants aux autres questions de l'exercice

En regardant les réponses des étudiants aux autres questions de l'exercice, nous constatons que les trois premières questions (fermées ou de calcul), dont les techniques de résolution consistent à des applications directes de définitions, de propriétés ou de calcul simple, sont les mieux réussies par les étudiants (taux de réussite respectifs de 100%, 77% et 98%). Les échecs dans la question 2 sont dus principalement à des difficultés à traiter avec l'ensemble paramétré F pour montrer que F est stable pour les opérations de l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{C})$. Nous notons également, pour cette question, que 16 étudiants sur 43 (soit 37%) n'ont pas réussi à remarquer que F est le noyau de l'application linéaire et d'en déduire le résultat, comme le suggère la question. Ces étudiants ont plutôt utilisé une caractéristique générale des sous-espaces vectoriels.

La question 3-c, quant à elle est la moins réussie dans l'exercice (79 % d'échec). Dans les réponses erronées (49 %), tous les étudiants ont travaillé dans le cadre ensembliste et la plupart d'entre eux ont réussi à donner une formulation correcte de la surjection dans le contexte de la tâche, mais ils se sont heurtés à des difficultés lors du traitement de l'équation paramétrique $f_A(M) = M'$, résultante de cette formulation. La complexité de la tâche découle notamment des nuances entre les statuts des matrices A, M et M' en jeu et des confusions entre notions contiguës (surjection/application, ensemble image/ensemble d'arrivée, matrice A/matrice de l'application linéaire f_A).

D'un autre côté, le fait de travailler dans le cadre ensembliste et de répondre à la question sans tenir compte de la réponse à la question 3-b[2], confirme le constat établit dans la question 3-b à propos de la tendance des étudiants à travailler au niveau ponctuel des praxéologies mathématiques.

V. CONCLUSION

L'analyse des réponses des étudiants aux différentes questions de l'exercice fait état, en premier lieu, d'une bonne connaissance, par la majorité des étudiants, des énoncés mathématiques caractérisant les notions intervenant dans les questions, et d'une possibilité de reformuler ces énoncés dans le contexte de l'exercice. Le tableau 1 donne, pour chacune desdites notions, le nombre de formulations données par les étudiants, selon qu'elles sont conformes ou erronées.

Questions	**Notions**	**Formulations conformes (sur 43)**	**Formulations erronées (sur 43)**
1	Application linéaire	43 (100 %)	0
2	Sous-espace vectoriel	39 (91 %)	4 (9 %)
3-b	Injection	37 (86 %)	6 (14 %)
3-c	Surjection	28 (64 %)	15 (36 %)

Tableau 1 *– Conformité des formulations fournies par les étudiants*

Ces résultats pourraient s'interpréter par une maitrise, de la part des étudiants, des énoncés mathématiques enseignées et une aptitude à les reformuler dans des situations particulières. Nous considérons ceci comme preuve quant à l'aptitude des étudiants à traiter avec les notions mathématiques abstraites. Toutefois, pour beaucoup d'étudiants, la mise en œuvre des formulations données n'était pas toujours évidente. Les difficultés constatées concernent essentiellement l'appropriation du sens porté par ces formulations et la gestion du symbolisme qui y est impliqué. D'un autre côté, notre analyse révèle une tendance chez plusieurs étudiants (même pour ceux dont les réponses sont correctes) de travailler chaque question de façon isolée, sans prendre en compte les possibilités de déduction présentes dans

[2] La réponse attendue à cette question consiste à remarquer que f_A est une application linéaire entre deux espaces vectoriels de même dimension finie. Dans ce cas, les notions d'injection et de surjection sont équivalentes et la réponse à cette question découle immédiatement de la réponse à la question précédente. Soit que, f_A n'est pas surjective, quelle que soit la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

l’exercice. Ceci pourrait s’interpréter comme une certaine disposition chez les étudiants à travailler au niveau ponctuel des praxéologies mathématiques disponibles et en même temps une difficulté à mettre en intégration les PM ponctuelles et à travailler de façon autonome avec des PM locales.

Il résulte de ces constatations que parmi les trois caractéristiques des mathématiques supérieures pointées dans II, ce sont surtout celles qui concernent la gestion du formalisme mathématique et le travail avec des PM locales, qui constituent principalement la complexité des mathématiques chez les étudiants entrant à l’université. A notre avis, deux facteurs contribuent à l’installation de ces difficultés, le premier concerne les choix d’enseignement des mathématiques dans les institutions ES et CPS1, quant au deuxième, il se rapporte aux connaissances qualifiées par certains auteurs de pratiques et opératoires.

En ce qui concerne le premier facteur, l’étude faite dans (Najar 2015) montre que dans ES, l’environnement praxéologique relatif au travail des notions ensemblistes fonctionnelles se caractérise par une prédominance de PM ponctuelles isolées, dont l’intervention se limite le plus souvent au niveau pratico-technique et dont la plupart des tâches associées sont routinières, de techniques de réalisation rigides et stéréotypées. Dans CPS1, en revanche, l’enseignement des mathématiques est dominé par des praxéologies mathématiques locales relativement complètes (comme le montre l’exercice donné dans le test analysé) et le fonctionnement du savoir dans le topos des étudiants se rapproche, en ce qui concerne les méthodes et le formalisme mis en œuvre, à celui qui est le sien dans les développements théoriques des thèmes d’étude. En même temps, il y a dans CPS1 une sous-estimation quant au travail d’ordre technique et une négligence quant à la mise en œuvre des PMPs dans les tâches données aux étudiants. Par ailleurs, plusieurs chercheurs (Dorier 1997 ; Bosch et Chevallard 1999 ; Durand-Guerrier & Arsac 2003…) considèrent que les questions touchant à l’abstraction et au formalisme mathématiques sont à l’origine de multiples ruptures entre le secondaire et le supérieur, conduisant à des difficultés résistantes chez les élèves et les étudiants. La faible sensibilité des enseignants universitaires quant à l’importance qu’il faut accorder dans l’enseignement au langage symbolique ajoute à ces difficultés. Ils considèrent, généralement, que l’appropriation du sens du symbolisme mathématique et des règles qui régissent son choix et sa manipulation est naturelle et va de soi dès que les notions et objets qui y sont engagés sont convenablement explicités, ce que réfutent plusieurs recherches. Selon Bosch et Chevallard (1999),

> La méprise qui consiste à supposer que la perception des ostensifs serait naturelle – c’est-à-dire non construite – explique dans une large mesure ce que la théorie des situations a mis en évidence sous le nom de stratégies didactiques d’ostension. On désigne par ce terme la pratique d’enseignement où le professeur se limite à montrer aux élèves un objet ostensif en croyant qu’il se créera spontanément un rapport adéquat à cet ostensif et, surtout, aux non-ostensifs auxquels il est censé renvoyer (Bosch & Chevallard, 1999, p. 92).

Pour ce qui concerne le deuxième facteur, il soulève le problème des apprentissages liés à la pratique des mathématiques, que les apprenants ne semblent pas pouvoir acquérir par des efforts personnels et pour lesquelles des actions didactiques semblent être nécessaires. Dans l’objectif de décrire ces besoins d’apprentissage et prouver leur nécessité pour la réussite des apprenants, Castela (2008) distingue au niveau de la technologie de toute PM intervenant dans un problème deux composantes, respectivement théorique et pratique. La composante théorique assure la validité de la technique utilisée, quant à la composante pratique, elle correspond à des savoirs très ancrés dans l’expérience, permettant de choisir, de mettre en œuvre et de piloter la technique. Pour Castela, ces connaissances d’ordre pratique sont dotées d’une légitimité mathématique (par référence à l’activité du mathématicien) et se trouvent implicitement reconnues par l’institution éducative, vu que leur nécessité se manifeste dans les tâches d'évaluation et c'est leur absence qui est institutionnellement évoquée comme facteur d'échec. Néanmoins, l'institution reste muette à propos de ces apprentissages, et n'organise aucun système didactique visant explicitement à permettre leur apprentissage.

Nous considérons que la difficulté remarquée chez les étudiants des CPS1 à mettre en intégration les PM ponctuelles et à travailler de façon autonome avec des PM locales, s'explique par des insuffisances de connaissances d'ordre pratique telles que définies par Castela.

L'ensemble des facteurs que nous venons de citer, expliquent, en quelque sorte, la rupture institutionnelle lors du passage de ES aux CPS1. Les résultats d'analyse du test montrent que les étudiants des CPS1 ont de la difficulté à dépasser cette rupture de façon autonome et semblent avoir du mal à s'adapter aux changements qui se produisent lors du passage du secondaire au supérieur. Ces étudiants, se trouvent, semble-t-il, encore influencés par la culture mathématique du secondaire.

En guise de conclusion, notre recherche confirme l'importance du travail à mener au niveau de l'enseignement sur le langage formel, sur les connaissances d'ordre pratique ainsi qu'à l'égard de l'intégration et de la complétion des praxéologies mathématiques en jeu dans les contenus d'enseignement. Ce rôle doit être pris en charge par l'institution par le biais d'organisations didactiques et mathématiques adaptées.

REFERENCES

Bosch M., Chevallard Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. Recherches en didactiques des mathématiques 19 (1) 77–124.

Bosch M., Fonseca C. Gascon J. (2004) Incompletitud de las organizaciones matematicas locales en las instituciones escolares. *Recherches en didactiques des mathématiques* 24 (2/3), 205–250. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Castela C. (2008) Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 28 (2), 135-182. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *Actes de l'université d'été de la Rochelle* (Juillet 1998), 91–118.

Chin E. T., Tall D. (2002) *Mathematical proof as formal procept in advanced mathematical thinking*. http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2002l-formal-procept.pdf

Dorier J.-L. (Eds.) (1997) *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Durand-Guerrier V. Arsac G. (2003) Méthodes de raisonnement et leurs modélisations logiques. Le cas de l'analyse. Quelles implications didactiques ? Recherches en Didactique des Mathématiques 23(3) 295–342.

Najar R. (2015) A propos de l'enseignement de la théorie des ensembles : les choix institutionnels dans la transition secondaire/supérieur en Tunisie. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 35 (2), 141- 182. Grenoble : La Pensée Sauvage.