DES OUTILS POUR ANALYSER LA TRANSITION COLLÈGE-LYCÉE EN MATHÉMATIQUES

HOROKS* Julie – CHESNAIS** Aurélie

Résumé – Nous questionnons les pratiques enseignantes dans l'enseignement d'une même notion mathématique en classes de 3e et 2nde pour comprendre les difficultés des élèves dans la transition entre ces deux classes. Pour cela, nous présentons nos outils d'analyse des contenus, que nous illustrons sur la résolution de problèmes liés à la représentation graphique de fonctions, pour anticiper des différences de pratiques chez les enseignants des deux niveaux.

Mots-clefs : pratiques, activités, transition, registres, fonctions,

Abstract – We analyze teaching practices related to the same mathematical topic, in grades 9 and 10, to understand the possible difficulties for students in the transition between these two classes. To this end, we present our tools to analyze mathematical contents and tasks, which we illustrate on a task involving the graphical representation of functions, and try to anticipate some differences among practices of the teachers at both levels.

Keywords: practices, activity, transition, register, functions

Notre questionnement porte sur la transition, en France, entre le *collège* (élèves de 12 à 15 ans quatre niveaux de classes, le dernier étant la classe de 3e) et le *lycée* (élèves de 15 à 18 ans, trois niveaux, le premier étant la classe de 2nde) dans l'enseignement des mathématiques.

I. LA TRANSITION COLLEGE-LYCEE : UN MOMENT CLE POUR REVELER LES DIFFICULTES DES ELEVES

1. Notre constat de départ

Notre étude repose sur un constat de départ : les difficultés d'élèves de classe de 2nde (15-16 ans) à résoudre certaines tâches sur les fonctions impliquant le registre graphique, alors même que, selon les programmes scolaires actuels en France, ces tâches peuvent être traitées dès la classe de 3e. Nous interrogeons alors l'enseignement d'une même notion de part et d'autre de la transition, pour essayer de comprendre les écarts possibles et éventuels malentendus pour les élèves.

Ainsi, lors d'une réunion d'un groupe d'enseignants de 3e et de 2nde il y a quelques années, une vive discussion avait été engagée autour des difficultés des élèves des deux niveaux à résoudre un même type de tâche : dire si, une fonction étant donnée par sa formule algébrique, un point de coordonnées données appartenait ou non à la courbe représentative de la fonction. Les enseignants de 3e considéraient que cette tâche était très difficile pour leurs élèves, tandis que ceux de 2nde la considéraient comme une tâche simple et qui aurait dû être familière pour leurs élèves, mais qui pourtant leur posait généralement problème.

C'est en effet une tâche qui correspond aux attendus des programmes scolaires des deux niveaux, et qu'on trouve dans les manuels de 3e et de 2nde, mais qui n'est vraisemblablement pas considérée comme complexe en 2nde : elle n'apparaît souvent que de manière relativement « anecdotique », comme application directe de la définition de la courbe représentative d'une fonction. Ainsi, par exemple, dans le manuel Indice 2nde (2009) (p. 37) la réponse corrigée à la question « f est la fonction définie sur [0 ;3] par $f(x)=x^2-x-2$. […] le point A(2,25 ; 0,81) est-il

* Laboratoire de Didactique André Revuz – France – julie.horoks@u-pec.fr
** Laboratoire LIRDEF – France – aurelie.chesnais@umontpellier.fr

un point de [la courbe représentative de f] ? » est uniquement : « On a f(2,25)=0,8125 ; or 0,8125 $\neq$0,81. Le point A n'appartient donc pas à la courbe. » Notons que le manuel précise dans une bulle : « pour vérifier si le point de coordonnées (a ;b) appartient à la courbe, on compare b et f(a). »

Pourquoi ces difficultés pour les élèves, au collège comme au lycée ? Quels éléments, dans la transition 3^{e} / 2nde, pour expliquer les différences d'attentes des enseignants des deux niveaux ?

Les moments de transition dans l'enseignement des mathématiques ont déjà été pointés par la recherche comme des moments de rupture, à la fois révélateurs et aggravateurs des difficultés des élèves. Leur étude a pour nous l'objectif de mieux comprendre ces écarts, en questionnant des différences entre les deux niveaux, pour aider les élèves et leurs enseignants à mieux appréhender ces passages.

2. Des pratiques enseignantes différentes de part et d'autre de la transition ?

Nous faisons l'hypothèse, confortée par le cas de la discussion reportée plus haut, que les pratiques des enseignants ne sont pas les mêmes de part et d'autre de ces transitions, mais que ces différences sont ignorées par tous, ou du moins minorées, et, par manque de communication, peu prises en compte dans l'enseignement, bien que ces enseignants aient eu, en France, un recrutement et une formation initiale identiques.

Nos hypothèses sur les apprentissages des élèves guident notre regard sur les pratiques. En nous appuyant sur la théorie de l'activité, élargie au champ de la didactique des mathématiques (Vandebrouck, 2016), nous considérons que les apprentissages des élèves se font, au moins en grande partie, à travers leurs activités mathématiques, elles-mêmes provoquées par les tâches proposées par les enseignants, et par les choix d'organisation de la résolution de ces tâches en classe.

Ces activités ne résultent cependant pas uniquement des intentions de faire apprendre les mathématiques aux élèves, mais sont aussi contraintes par d'autres dimensions du métier d'enseignant. Nous analysons les pratiques enseignantes dans le cadre de la Double Approche didactique et ergonomique des pratiques (Robert & Rogalski, 2002) qui distingue leurs différentes composantes. Ainsi, pour caractériser les pratiques nous prenons en compte non seulement les tâches proposées, et la gestion de leur déroulement en classe (composantes cognitive et médiative des pratiques) mais aussi des composantes externes aux contenus mathématiques, et qui relèvent du public concerné (composante sociale), de l'expérience de l'enseignant (composante personnelle) ou des programmes et instructions officielles (composante institutionnelle).

Pour le problème de transition qui nous intéresse, il est probable que la composante institutionnelle joue un rôle non négligeable, à travers les instructions officielles et en particulier leurs interprétations dans les ressources à la disposition des enseignants. En ce qui concerne le public d'élèves, une orientation est opérée entre la classe de 3^{e} et la classe de 2nde générale, et les élèves les plus en difficulté peuvent être amenés à suivre une autre filière, ce qui amène peut-être les enseignants à penser que les élèves de 2nde générale ont un bon niveau en mathématiques, qui est une matière sélective pour les élèves français. Tout cela a une influence potentielle sur ce que les enseignants choisissent pour leur classe, et donc sur les activités mathématiques qui peuvent en découler pour leurs élèves.

Pour approcher au plus près ces activités, aux deux niveaux de classe concernés, nous cherchons de quelle façon les notions mathématiques y sont mobilisées, et avons besoin pour cela de mettre en relief les spécificités des contenus mathématiques sous-jacents, pour mieux anticiper les obstacles possibles pour les élèves, et la façon dont les enseignants les prennent ou non en charge.

II. AU CENTRE DE NOS ANALYSES DE LA TRANSITION : LES ACTIVITES MATHEMATIQUES POSSIBLES DES ELEVES

Pour un même contenu mathématique au programme de part et d'autre de la transition, nous nous demandons si les notions proposées sont identiques a priori pour chacune des deux classes, à travers une analyse épistémologique, institutionnelle et didactique des contenus. Nous interrogeons les niveaux de conceptualisation attendus des élèves à chaque niveau, constitués, d'après Robert (2003), par des fondements, explicites ou non, des définitions et théorèmes, modes de raisonnement, démarches, avec un certain niveau de rigueur, et les problèmes que cela permet de résoudre.

Nous présentons dans cette partie nos outils d'analyse des contenus et des tâches. Nous les illustrons sur le thème des fonctions du 1er degré, et plus particulièrement de la résolution de problèmes mettant en jeu leur représentation graphique.

1. Dans les programmes scolaires

Les programmes scolaires nationaux, obligatoires pour toutes les classes de l'enseignement général, nous renseignent en partie sur des potentielles différences dans les contenus enseignés.

Dans les deux cas, en 3e comme en 2nde, le thème des fonctions apparaît en premier dans les programmes[1] et on trouve à la fois l'apprentissage de généralités sur les fonctions (image, antécédent) et l'étude spécifique des fonctions du 1er degré (les seules évoquées en 3e). En 2nde se rajoutent donc d'autres types de fonctions (degré 2 ou homographiques) ainsi que plusieurs définitions et propriétés nouvelles relatives aux fonctions (domaine de définition, sens de variation), amenant par conséquent de nouveaux types de tâches. La définition de fonction n'est pas au programme de 3e, et elle y est présentée comme un *processus de correspondance*, laissant de côté les idées de dépendance ou de covariation des deux grandeurs en jeu (cf. René de Cotret, 1988).

Pour le type de problème qui nous intéresse, si l'ancien programme de 3e, en place jusqu'en 2015, mentionnait explicitement dans les capacités attendues : « *Connaître et utiliser la relation y=ax + b entre les coordonnées (x,y) d'un point M qui est caractéristique de son appartenance à la droite représentative de la fonction linéaire x→ax+b.* », le programme en vigueur depuis 2016 mentionne uniquement le fait que les élèves « En 3e, […] font le lien entre forme algébrique et représentation graphique [d'une fonction]. » En 2nde, la notion de « courbe représentative » d'une fonction est mentionnée, avec la précision qu'il faut « […] apprendre aux élèves à distinguer la courbe représentative d'une fonction des dessins obtenus avec un traceur de courbe ou comme représentation de quelques données. », mais la caractérisation des points de la courbe par une relation de dépendance entre leurs coordonnées n'est pas mentionnée, et cela reste peu explicite en termes de types de tâches associés. En revanche, dans le domaine « géométrie », les programmes mentionnent la notion d'équation de droite, dont on peut penser qu'elle est précisément associée à la capacité à dire si un point

---

[1] Pour le cycle 4, incluant la classe de 3ème :
http://www.education.gouv.fr/pid285/bulletin_officiel.html?cid_bo=94717
Pour la 2nde : http://cache.media.education.gouv.fr/file/30/52/3/programme_mathematiques_seconde_65523.pdf

appartient à une droite ou non. Le lien avec les fonctions affines est aussi explicitement indiqué : « Droite comme courbe représentative d'une fonction affine. » Il semblerait donc que le type de tâche qui nous intéresse peut légitimement être traité en troisième et en seconde, mais que le degré de précision des programmes ne permet pas d'assurer qu'il le soit, ni de quelle manière. La question est particulièrement vive en 2nde où il existe une grande variété d'organisations possibles d'une progression entre les contenus relevant des généralités sur les fonctions, des fonctions affines et des équations de droites (Cerclé et al., op. cité).

De manière générale, la question de la prise en compte, en 2nde, des connaissances plus anciennes intervenant dans les activités mathématiques mettant en jeu une notion nous paraît importante, ainsi que la reprise ou non de ces acquis, qui n'en sont peut-être pas, par les enseignants.

2. Le caractère outil/objet

Pour comprendre ce que pourraient être les activités des élèves sur les fonctions du 1er degré et leur représentation graphique dans ces deux classes, nous étudions les caractères outil et objet de cette notion, au sens de Douady (1992).

Du côté objet, la fonction n'est pas définie formellement en 3ème, mais on peut noter l'apprentissage d'un vocabulaire et d'un formalisme, et ce dans les différentes représentations possibles des fonctions. La question des registres de représentation sémiotiques (Duval, 1993) est fondamentale ici pour appréhender le concept de fonction, qui se décline dans plusieurs registres dès la classe de 3ème (voire avant) : algébrique (formule de la fonction), graphique (courbe représentative), numérique (programme de calcul, tableau de valeurs), fonctionnel (avec des notations propres aux familles de fonctions) entre autres. Chacun de ces registres rend explicites certaines des propriétés de l'objet représenté, avec des traitements plus ou moins coûteux, un formalisme et un vocabulaire spécifiques, dont la congruence, pour passer d'un registre à l'autre, ne va pas de soi (par exemple : « *la fonction f est positive* » et « *la courbe représentative de f est au-dessus de l'axe des x* »). Si on considère plus spécifiquement les droites représentatives de fonctions linéaires ou affines, il est pertinent de mentionner aussi le registre géométrique, dans lequel les droites ont des propriétés qui s'expriment encore différemment (position relative de deux droites, droites sécantes, perpendiculaires ou parallèles), et un registre analytique dans lequel les équations de droite rajoutent encore une nouvelle façon d'exprimer la fonction sous-jacente, ce qui n'est vraisemblablement pas clair pour les élèves (Cerclé et al, 2015).

Une autre dimension importante, pointée par Vandebrouck (2016), est l'articulation des différentes perspectives, c'est-à-dire les points de vue spécifiques adoptés dans le travail sur les fonctions, associées ici principalement à leurs propriétés ponctuelles et globales. La perspective ponctuelle, point par point, s'accompagne en particulier de la question de quantification qui l'accompagne, peu présente avant l'entrée au lycée, ce qui n'amène peut-être pas le lien avec la perspective globale. La question du statut de x est attachée aussi au travail entre ponctuel et global, tantôt nombre généralisé, tantôt variable, ou encore inconnue lorsqu'on cherche un point particulier sur une courbe.

Pour donner du sens au concept de fonction, le fait de pouvoir être amené à considérer cet objet dans sa globalité nous paraît pourtant être souhaitable. Or les occasions de le faire ne nous paraissent pas nombreuses (recherche d'extremum, passage de la courbe à la formule, appui sur les propriétés des familles de fonctions, opérations sur les fonctions) et a priori absentes des programmes de 3e. Nous questionnons alors le moyen de donner des raisons d'être aux fonctions au collège, autrement que comme objets d'étude, dans des tâches où des outils issus de connaissances mathématiques préalables (algèbre, lecture graphique, proportionnalité, programmes de calcul) semblent suffisants pour résoudre.

Du côté outil par conséquent, nous nous demandons quels types de problèmes peuvent motiver l'introduction des fonctions, rendant d'autres procédures de résolution inefficaces. En dehors des problèmes d'optimisation, qui supposent un travail sur les variations de la fonction, il y a peu d'occasions d'en ressentir le besoin, ce qui laisse présager un manque d'activités de découverte réelle des fonctions.

Quelle est la variété et la complexité des tâches proposées aux élèves des deux niveaux ? Quels y sont les registres et les perspectives privilégiés ? Avec quelle articulation, et quelles initiatives pour les élèves ?

3. Les tâches

Nos outils pour analyser les tâches permettent de les catégoriser suivant plusieurs dimensions :

- les différentes connaissances mathématiques qu'elles font mobiliser dans leur résolution (et donc qu'elles font apprendre selon nous), donc ici les propriétés des fonctions ;

- la complexité de cette mobilisation, ou niveaux de fonctionnement (Robert, 1998), suivant que celle-ci se fait en appliquant directement une connaissance mathématique déjà abordée, ou, à l'opposé, nécessite une prise d'initiative pour reconnaître la connaissance à utiliser, et à faire des choix dans son application, que ce soit dans les étapes de la méthode de résolution, le registre pour la représenter, ou encore les autres notions à mobiliser conjointement.

Pour une même connaissance mathématique à mobiliser, on pourrait donc trouver les mêmes tâches en 3^{e} et en 2^{nde}, ou des tâches avec des adaptations différentes (en particulier en ce qui concerne l'articulation des registres), ou bien encore des tâches dont les énoncés sont très différents mêmes s'ils amènent à mobiliser les mêmes connaissances, par exemple des tâches nouvelles en 2nde (ou des tâches de 3ème qui sont abandonnées en 2nde).

Ainsi pour la tâche qui nous intéresse, il nous faut noter des points potentiellement délicats :

- En terme de perspective, on travaille ici sur du ponctuel, même si on questionne l'appartenance à une courbe, qui donne à voir un aspect global de la fonction, avec une équivalence pour tout point M de coordonnées (x;y) (y=f(x) si et seulement si M appartient à la courbe représentative de la fonction f), qui n'est peut-être pas étudiée « dans les deux sens » dans toutes les classes. Il y a probablement une difficulté à percevoir qu'un point de la courbe représentative d'une fonction porte plusieurs informations : ses deux coordonnées mais aussi la relation de co-variation qui existe entre les deux.
- Le fait de poser la question dans le registre graphique, faisant référence à la notion géométrique d'appartenance d'un point à une courbe / une droite, appelant une réponse dans le registre graphique aussi (le point de coordonnées données appartient-il à la courbe ?), ne donne pas d'indication sur le passage obligé par le registre algébrique pour résoudre (le registre graphique seul n'offrant a priori pas une précision suffisante pour y répondre). Le changement de registre n'est a priori pas indiqué, mais peut-être devenu « automatique » si la tâche a été répétée de nombreuses fois. Les élèves de 3ème sont-ils confrontés à une telle adaptation, avec un niveau de fonctionnement

relativement élevé, puisqu'il leur faut choisir, sans indication, le registre le plus approprié ?

4. Les activités possibles des élèves

Les activités mathématiques possibles des élèves en classe sont déterminées non seulement par les énoncés des tâches choisies par les enseignants, mais aussi par les déroulements associés, pendant lesquels les interventions des enseignants peuvent modifier les tâches prescrites, et probablement changer la nature des adaptations qu'elles supposaient a priori, selon le temps et les initiatives laissées aux élèves pour y travailler. Quelle est alors l'influence des contraintes institutionnelles (temps, programme) et de ce que l'enseignant pense que les élèves savent déjà, dans le fait de choisir de leur laisser ou non des initiatives ?

La quantité totale de tâches différentes possibles mobilisant les plus ou moins nombreuses connaissances mathématiques visées, semble beaucoup plus grande en 2nde qu'en 3^{e}, si on étudie les manuels de chaque niveau. Cela nous amène à interroger la possibilité ou non de travailler chacune de manière répétée dans le cadre des horaires alloués à leur enseignement. On peut penser que le fait de proposer ou non des tâches répétitives aux élèves a une influence sur leur capacité à réussir ces tâches à nouveau par la suite, même si une automatisation de certaines tâches n'est pas forcément bénéfique (cf. par exemple Butlen, 2003, en calcul mental ou Dumail 2007 sur la racine carrée).

Qu'est-ce qui est alors proposé aux élèves pour à la fois relier ce grand nombre de tâches (entre elles et par rapport au cours) et pour tirer parti de chaque tâche traitée un petit nombre de fois pour généraliser ? Cela pose la question des proximités organisées par l'enseignant (Robert & Vandebrouck, 2010) entre le général et le contextualisé, et aux initiatives éventuellement laissées aux élèves dans ces proximités.

Cela pose aussi la question de ce qui est évalué par les enseignants, entre les objets du cours et les exercices associés, où les notions visées sont outils ou bien objets. En particulier quelle est la représentativité des tâches de l'évaluation par rapport à celles vues en classe auparavant, sachant que l'écart peut être plus ou moins grand suivant les enseignants (cf. Horoks 2006, Horoks & Pilet, à paraître). La question se pose d'autant que le nombre de types de tâches possibles est plus grand. Ainsi, si les évaluations sont révélatrices des difficultés des élèves, des différences potentielles dans les pratiques évaluatives des enseignants des deux niveaux seraient aussi responsables de ces difficultés.

III. EN CONCLUSION : DES PISTES METHODOLOGIQUES POUR DEBUSQUER DES ECARTS ENTRE 3^{E} ET 2NDE

Pour la suite de notre étude, nous projetons, compte tenu des points soulevés, d'analyser :

- Des manuels de 3^{e} et 2nde, dans les chapitres relatifs à la représentation graphique de fonctions du 1er degré, avec pour objectif de repérer les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances mobilisées dans les exercices, et plus particulièrement les adaptations relatives aux registres de représentation des fonctions et équations de droites, et les occasions de rencontrer le concept de fonction dans une perspective globale, pour analyser les activités possibles offertes aux élèves des deux niveaux ;
- Des séances en classe, et en particulier des moments de résolution de tâches avec des choix à faire en ce qui concerne les registres, pour voir quelles initiatives sont laissées

aux élèves, et quel discours est tenu sur les objets de savoirs étudiés, en lien avec les activités mathématiques des élèves.

REFERENCES

Butlen, D., & Charles-Pézard, M. (2007). Conceptualisation en mathématiques et élèves en difficulté. Le calcul mental, entre sens et technique. Grand N, 79. 7-32

Cerclé, V., Chesnais, A., Gosselin, E., Leberre, J., Nyssen, L. (2015). Enjeux de logique et de raisonnement au croisement des cadres et des registres a propos des équations de droites. Colloque CORFEM 11-12 Juin 2015, Nîmes, http://www.univ-irem.fr/exemple/corfem/Actes_2015_06.pdf

De Cotret, S. R. (1988). Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante. *Petit x*, *17*, 5-27.

Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères Irem*, 6, 132-158.

Dumail, A. (2007). La racine carrée en troisième, des enseignements aux apprentissages. Mémoire de Master 2. *Cahier de Didirem*, *57*.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. In *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5(1), 37-65.

Horoks, J., Pilet, J. (à paraître) Analyser les pratiques d'évaluation des enseignants de mathématiques. Dans Gueudet, G. (Eds), *Actes de l'école d'été de didactique des mathématiques, août 2015*, Brest. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Horoks, J. (2006). *Les triangles semblables en classe de seconde: des enseignements aux apprentissages-études de cas* (Thèse de doctorat, Université Paris 7).

Robert, A., & Vandebrouck, F. (2014). Proximités-en-acte mises en jeu en classe par les enseignants du secondaire et ZPD des élèves: analyses de séances sur des tâches complexes. Cahiers du Laboratoire de Didactique André Revuz, 10.

Robert, A. (2003). Un point de vue sur les spécificités du travail géométrique des élèves à partir de la classe de quatrième : l'organisation de la connaissance en niveaux de conceptualisation, *Petit x*, 63, 7-29

Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 139-190.

Robert, A., & Rogalski, J. (2002). Le système complexe et cohérent des pratiques des enseignants de mathématiques: une double approche. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, *2*(4), 505-528.

Vandebrouck F. (2016) Activity theory in French Didactic Research, 13th International Congress on Mathematical Education, Conférence invitee, Hamburg, 24 - 31 July 2016

Vandebrouck, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. In *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 16, 149-185.