ENSEIGNER LES NOMBRES DECIMAUX ET LES FRACTIONS

TRANSITIONS (OU RUPTURES ?) PRIMAIRE-SECONDAIRE

COULANGE[*] Lalina – TRAIN[**] Grégory

Résumé – Ce texte se veut une synthèse de résultats de nos recherches actuelles sur l'enseignement et l'apprentissage des décimaux et des fractions dans la transition école collège. Nous abordons des aspects liés aux différents registres de représentations sémiotiques de ces nombres, qui nous semblent des points importants à considérer pour mieux appréhender leur enseignement dans le contexte d'une telle transition.

Mots-clefs : fractions, décimaux, transition (primaire-secondaire), représentations, désignations

Abstract –We synthetize the results of our current research on the teaching and learning of decimal numbers and fractions in the school transition from primary to secondary. We will focus on aspects related to the different registers of semiotic representations related to these numbers. From our viewpoint, these aspects seem to be important in such a school transition.

Keywords: fractions, decimal numbers, transition (primary-secondary), representations, designations

Nous étudions depuis plusieurs années, des phénomènes didactiques liés à l'enseignement et à l'apprentissage des nombres décimaux et des fractions dans la transition primaire-secondaire en prenant appui sur des observations faites sur la durée dans un Lieu d'éducation Associé, l'école primaire Carle Vernet, située dans un quartier prioritaire[1] de la ville de Bordeaux ainsi que dans différents collèges. Nous adoptons une perspective langagière, sémiolinguistique dans l'étude de ces phénomènes didactiques. Nous nous intéressons tout particulièrement aux registres de représentation sémiotique (à la fois discursif, symbolique, iconique …) des décimaux et des fractions (Duval 1993, 1995) et à leur(s) rôle(s) au sein des situations d'enseignement et d'apprentissage que nous observons ou co-construisons dans ce contexte. Nous commencerons par présenter les éléments de ce cadrage théorique, puis nous présenterons une synthèse des résultats de nos recherches, en centrant notre propos sur ce qui nous semble éclairer des questions plus spécifiques de la transition école-collège, qu'il s'agisse de potentielles continuités ou possibles ruptures relativement aux savoirs à enseigner, enseignés ou appris sur les nombres décimaux et les fractions.

I. ENSEIGNEMENT DES NOMBRES DECIMAUX A L'ECOLE ET AU COLLEGE

1. Registres de représentation sémiotique des nombres décimaux

Dans l'enseignement des nombres décimaux, différents registres de représentation sémiotique sont potentiellement à l'œuvre, à la fois :
- *symboliques :* les écritures fractionnaires[2] notamment celles du type $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}$; les écritures décimales et les sommes associées à ces écritures
- *discursifs :* faisant intervenir ce que Chambris (2008) ou Tempier (2013) appellent des unités de numération, *dixième, centième et millième*.
- *mixtes* : à l'œuvre par exemple dans des écritures du type *1 unité + 3 dixièmes + 2 centièmes* ou dans des tableaux de numération
- *matériels ou iconiques :* comme un carré constitué de 100 carreaux dont 25 sont grisés.

[*] Lab-E3D, Université de Bordeaux - France – lalina.coulange@u-bordeaux.fr
[**] Lab-E3D, Université de Bordeaux - France – gregory.train@u-bordeaux.fr

[1] Les élèves de cette école sont majoritairement issus de milieux socio-défavorisés.

[2] Signalons qu'en France, les écritures décimales sont introduites après les écritures « fractionnaires – décimales », et ce depuis plusieurs années, ce qui n'est pas le cas dans d'autres pays.

Souvent présents de manière concomitante dans les situations d'enseignement et d'apprentissage des décimaux, ces registres de représentation sémiotique sont également susceptibles d'être évoqués doublement, à la fois à l'oral et à l'écrit. Le concept de désignations doubles voire multiples, associant des désignations liées à des représentations sémiotiques distinctes au même objet, proposé par Duval (1995) permet de rendre compte de ce phénomène. Ainsi lit-on oralement l'écriture symbolique[3] $\frac{25}{100}$ comme *vingt-cinq centièmes,* ce qui permet sa mise en relation avec le registre des unités de numération, au primaire. Cette désignation pourra trouver d'autres formes oralisées au secondaire, *vingt-cinq sur ou divisé par cent,* nous y reviendrons. Pour poursuivre l'investigation de la complexité qui se dessine dans des lectures possibles d'écritures symboliques, notons que ces désignations des nombres, multiples ou associées, symboliques, discursives et autres, sont convoquées dans des contextualisations variées en prise d'appui sur des registres iconiques supports de la construction des nombres. Par exemple, on lit $\frac{25}{100}$ comme *vingt-cinq centièmes,* en référence à des situations qui contextualisent la fraction comme partage d'une unité, au sein desquelles la fraction est représentée sous des formes schématiques ou matérielles.

Nous faisons l'hypothèse que ces désignations multiples d'un même objet, le nombre décimal, dans différents registres de représentations jouent un rôle essentiel dans la conceptualisation de ces nombres. Il nous semble d'autre part, que la manière dont ces modes de désignation orale ou écrit des décimaux se négocient ou se (re)négocient dans la transition primaire-secondaire, tant du point de vue des pratiques langagières d'élèves et d'enseignants que de celui des contenus en jeu, est intéressante à considérer.

2. Doubles désignations, conversions et traitements

Les observations conduites au sein des classes de primaire du LéA ont été l'occasion de rencontrer différents phénomènes à l'œuvre dans les classes et liés aux désignations symboliques et/ou discursives des nombres décimaux.

Les écritures fractionnaires décimales et les sommes liées à de telles écritures sont, de manière récurrente, désignées à la fois par les élèves et les enseignants en ayant recours aux unités de numération dans leur discours oral : $\frac{1}{100}$ est ainsi désigné un centième. Une des fonctionnalités de cette double désignation réside particulièrement dans la mise en œuvre de techniques de comparaison ou de calcul des nombres décimaux, en prise d'appui direct sur des conversions entre unités de numération, du type « dix *centièmes égalent un dixième* ». Ce constat fait écho aux valences sémiotique et instrumentale des unités de numération, caractérisées dans les travaux de Chambris (2008) et de Tempier (2013) sur l'enseignement de la numération décimale. Autrement dit, dans la perspective adoptée dans ce texte, les unités de numération spécifiques des décimaux sont un point d'appui plébiscité dans différents traitements liés aux savoirs à enseigner sur ces nombres à l'école ou au collège.

Dans le même temps, ce jeu de double désignation qui convoque le registre de représentation des unités de numération dans la lecture d'écritures symboliques fractionnaires et qui permet le contrôle de différentes écritures fractionnaires associées à un même nombre décimal, semble parfois manquer d'une forme d'autonomie du côté des élèves. Ainsi, dans les observations conduites à l'école primaire, faut-il, de manière récurrente, attendre l'intervention d'un tiers (celle d'un autre élève ou du professeur) pour régler la question du caractère erroné d'égalités du type $\frac{5}{100}+\frac{5}{100}=\frac{10}{200}$: le recours à une (re)désignation orale de

[3] Ecriture lié au registre symbolique des écritures fractionnaires des nombres décimaux.

l'écriture $\frac{5}{100}$ en *cinq centièmes* permettant alors d'emporter la conviction des « fautifs ». Par ailleurs, ces transformations erronées d'écritures symboliques semblent gagner en importance à l'entrée au collège : comme le montrent des réponses à des évaluations posées à des élèves de sixième que nous suivions en primaire. Ce phénomène pose question : Est-il lié à des modalités de travail spécifiques de la transition école-collège ? Les élèves ont-ils à traiter des écritures symboliques fractionnaires de manière plus autonome et plus « silencieuse » au début du secondaire ?

Malgré des recommandations institutionnelles déjà anciennes en la matière (programmes français de 2002[4]) le registre discursif des unités de numération semble plus difficilement associé à l'écriture décimale des nombres – une fois celle-ci introduite –par les élèves et les enseignants du primaire, comme du secondaire. Ainsi, un nombre écrit sous la forme « 2,58 » est spontanément lu comme « *deux virgule cinquante-huit* » que comme « *deux et cinquante-huit centièmes* » par les élèves et par les enseignants et ce, malgré le fait que ces derniers soient conscients des potentialités des unités de numération[5]. Plus encore, lorsque des formulations en lien avec les unités de numération, visant à justifier diverses techniques (de comparaison, opératoires, etc.) sont convoquées par l'enseignant, une forme de résistance apparaît parfois du côté d'une partie des élèves. Nombre d'entre eux, notamment les plus en difficulté, adhèrent visiblement plus volontiers à la verbalisation d'actions sur l'écrit rendant compte de transformations d'écritures symboliques. Ainsi, quand sous l'insistance de son professeur, un élève de primaire formule la justification de la transformation d'écriture 1,9 en 1,900 (pour le comparer à 1,589) *« car c'est 900 millièmes »* ce qui est pareil que *« 9 dixièmes »*, une majorité d'élèves retiendra d'un tel épisode de classe, l'ajout possible de zéros, privé de la justification pourtant formulée à l'oral dans le registre des unités de numération. Là encore, ce phénomène questionne. Quelle place donner à ce registre des unités de numération ? S'agit-il de veiller à le faire *vivre* davantage, y compris à l'écrit comme le suggèrent les auteurs cités auparavant, ou comme un intermédiaire, nécessaire à la compréhension de l'écriture décimale ? Si oui, comment[6] ?

Dans ce jeu de double désignation, d'autres formes possibles d'associations sont apparues. Celles en lien avec des représentations iconiques, convoquées classiquement dans la construction de la fraction « *partage* », nous sont apparues comme intéressantes à considérer. Ces associations peuvent s'avérer propices pour mettre en relation diverses représentations sémiotiques symboliques des nombres décimaux. En l'espèce, nos observations des pratiques enseignantes, mais également de leurs ressources professionnelles nous conduisent à faire l'hypothèse que si les fractions décimales fondent l'enseignement des nombres décimaux en primaire (en France), il y a par la suite, peu d'occasions de mettre en relation des écritures fractionnaires et des écritures décimales de nombres décimaux. Chesné (2017) rappelle à ce sujet que peu d'élèves français (26,9 %) et encore moins d'élèves issus de zones d'éducation prioritaire (14,9%) arrivent à répondre à la question suivante posée lors d'évaluations nationales à l'entrée au collège de manière satisfaisante :

Parmi ces quatre nombres, deux sont égaux.
Entoure-les 0,25 0,4 1,4 $\frac{1}{4}$

Figure 1 *- Evaluations nationales diagnostiques de 2008 – MEN*

[4] Le document d'application des programmes de primaire de 2002 mettait déjà l'accent sur les unités de numération : «*5,23 se lit 5 et 23 centièmes ou 5 et 2 dixièmes et 3 centièmes. La lecture courante (5 virgule 23) n'est pas exclue mais il s'agit de ne pas la systématiser (...)* » (cycle 3, p. 23)

[5] Rappelons que l'on parle d'enseignants avec qui nous travaillons sur le sujet depuis 4 années, déjà.

[6] Cela passe sans doute par un réinvestissement des unités de numération dans des consignes liées à des tâches proposées aux élèves du LéA, par exemple : « *comparer 45 dixièmes et 440 centièmes* ».

Pourtant, un épisode observé dans une classe de primaire illustre, nous semble-t-il, particulièrement les potentialités qu'offrent des associations entre écritures fractionnaires et décimales dès le primaire. Ainsi, lors de la présentation d'un jeu numérique, un échange collectif orchestré par l'enseignante autour de la figure suivante a permis à certains élèves de l'associer à une représentation de « *25 centièmes* » en l'interprétant comme « *une unité partagée en 100, 25 parts étant grisées* », cette même représentation a permis à d'autres dans le même temps de voir « *un quart* » en l'interprétant comme « *une unité partagée en 4* ». Les conditions semblaient dès lors réunies pour conclure collectivement à l'égalité : $\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$, laquelle partage une proximité certaine avec celle évoquée ci-avant : $\frac{1}{4} = 0{,}25$.

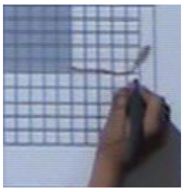

Figure 2 - $\frac{1}{4} = \frac{25}{100}$

Ceci nous conduit à envisager que de telles représentations iconiques pourraient potentiellement conduire à des désignations multiples à même de faciliter la mise en relation d'écritures symboliques (fractionnaires, décimales…) des nombres décimaux, ce dont semble attester des premières expériences conduites au sein du LéA Carle Vernet.

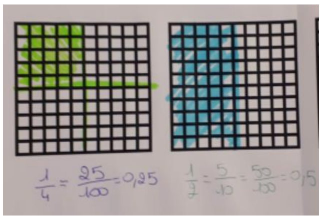

Figure 3 - *production d'un élève – écritures fractionnaires et décimales d'un même nombre*

Nous nous interrogeons sur la possibilité de faire vivre des tâches qui permettraient d'entretenir une telle flexibilité entre différents registres d'écritures symboliques des nombres. Par exemple, la tâche $\frac{1}{4} + 0{,}75$ qui mêle registre symbolique décimal et fractionnaire et pourrait être proposée en lien avec la représentation iconique précédente (voir figure 2). Des tâches du même type ($1{,}23 + \frac{4}{25}$; $1{,}23 + \frac{4}{15}$; ...), érigeant les conversions entre registres en ingrédients au cœur de différentes techniques possibles d'additions de nombres permettraient d'entretenir une telle flexibilité. Doublées d'un choix de variables adapté (somme de deux décimaux ; somme d'un décimal et d'un rationnel non décimal ; longueur de la partie décimale, etc.) de telles tâches permettraient dans le même temps d'interroger différentes techniques possibles, leur portée et leur coût ($\frac{27}{3} + 2{,}6$; $\frac{7949}{3125} + 2{,}7$; $283{,}26 + \frac{1677}{5}$; etc.) et en retour d'examiner les spécificités de chacun des registres de représentation symbolique. De telles tâches sont pourtant actuellement rarement envisagées dans l'institution scolaire française, que ce soit au niveau du primaire ou du secondaire.

3. *Rôle(s) d'un registre discursif de représentation sémiotique : les unités de numération*

Nous avons signalé les potentialités d'un registre de représentation discursif spécifique dans l'enseignement et l'apprentissage des nombres décimaux : celui des unités de numération. De tels constats rejoignent ceux faits par Chambris (2008) et Tempier (2013) dont les travaux portaient initialement sur l'enseignement et l'apprentissage des nombres entiers mais dont les résultats semblent pouvoir s'étendre aux décimaux, ce qui est d'ailleurs envisagé par ces mêmes auteurs (Chambris 2014 ; Chambris, Tempier & Allard 2017). Toutefois les unités de numération spécifiques des nombres décimaux comportent des spécificités à considérer de près, à même d'interroger les potentialités et les limites de ce registre de représentation discursif des nombres décimaux, à reconsidérer de plus près dans la transition école-collège.

Les unités de numération spécifiques des décimaux (le dixième, le centième et le millième) sont construites en lien avec la fraction *partage* de l'unité à l'école primaire. Une conséquence immédiate est que cette construction est réalisée dans un sens *partage* (*le dixième comme l'unité partagée en dix, le centième comme l'unité partagée en cent ou le dixième partagé en dix…*). Or, il est un constat que nous avons pu faire à de nombreuses reprises : le sens « *groupement* » largement convoqué dans les traitements propres à ce registre discursif peut faire défaut dans des situations d'enseignement et d'apprentissage observées. *Autrement dit, ce n'est pas parce que l'on sait qu'une unité d'ordre n-1 correspond à un partage de l'unité d'ordre n en dix (ou d'une unité d'ordre n+2 en cent), que l'on sait que dix (ou cent) unités d'ordre n-1 peut être convertie en une unité d'ordre n (ou d'ordre n+2).* Un travail de reconstruction des unités de numération dans le sens *groupement* nécessite une prise en charge explicite. Des relations indirectes entre les unités de numération construites dans le sens *partage* apparaissent problématiques, dès lors qu'elles sont convoquées. Ainsi si le centième a été construit comme *l'unité de référence partagée en cent*, considérer que *dix centièmes égalent à un dixième* représente un saut de complexité important pour les élèves. Ce type de difficultés a notamment surgi dans des tâches de positionnement d'écritures fractionnaires sur une droite graduée : par exemple, placer $\frac{15}{10}$, désigné oralement par *quinze dixièmes*, sur une droite graduée en centièmes nécessite le recours à des relations entre unités de numération qui reposent sur le sens *groupement*. De telles observations, récurrentes dans les classes de primaire du LéA, illustrent des difficultés à (re)construire un sens *groupement* des unités de numération construites dans un sens *partag*e, ce qui peut contribuer à éclairer le tarissement d'usages autonomes des unités de numération par les élèves (voir page 2). C'est également, dès la construction de relations entre unités de numération dans le sens *partage*, l'existence de choix entre des partages possibles à interroger de ce point de vue : par exemple, en ce qui concerne le centième, un partage de dix du dixième ou un partage de cent de l'unité. Remarquons que certaines de nos observations nous conduisent à considérer que la formulation de rapports entre les unités de numération (le centième comme « *dix fois plus petit* » que le dixième ou le dixième comme « *dix fois plus grand* » que le centième) apparaissent comme des leviers possibles, permettant de lever partiellement ces difficultés.

Si comme le signale Chambris (2008, 2010), le registre de représentation des unités de numération peut également nourrir un rapprochement entre des savoirs à enseigner sur la numération décimale et des savoirs à enseigner sur la mesure impliquant le registre des unités de mesure, un tel rapprochement soulève d'assez nombreuses questions, s'agissant des décimaux pour lesquels un tel rapprochement a d'ailleurs pu être décrié par le passé, au regard des confusions sur les décimaux appréhendés comme couples d'entiers. Nous affirmons que le rôle de la virgule dans le registre d'écritures décimales diffère, s'agissant de l'écriture de *nombres décimaux – grandeurs* ou de *nombres décimaux - abstraits*. S'agissant de *nombres décimaux – grandeurs* la virgule a la fonction d'indicateur de l'unité de mesure qui va servir de référence, cette dernière pouvant varier : ce que formule d'ailleurs très bien un élève (*« la virgule elle sert à savoir si on parle de mètres, de décimètres* ») au sein d'une classe de primaire dans laquelle un tel rapprochement a été envisagé dès l'apparition de l'écriture décimale pour désigner des *nombres décimaux – grandeurs.* (Coulange & Train 2015). Dans le domaine *stricto sensu* de la numération, en revanche, la virgule sert à indiquer comment se situent les chiffres par rapport à une unité de référence, cette dernière étant donnée et immuable (l'unité) : elle devient un marqueur positionnel permettant de *situer* cette unité dans l'écriture décimale d'un nombre. Cette dissymétrie du rôle de la virgule est rendue particulièrement visible dès lors qu'est envisagé de sortir un nombre *versus* une mesure, d'un tableau d'unités de numération *versus* un tableau d'unités de mesure, comme illustré ci-après.

Centaines	Dizaines	Unités	Dixièmes
	2	5	5
1	7	3	4

Quand on *sort* les nombres du tableau, on écrit 25,5 et 173,4– la virgule pallie la « disparition » d'unités de numération dans l'écriture positionnelle

dam	m	dm	cm
	2	5	5
1	7	3	4

Dans 2,55 cm (écriture licite) la virgule désigne l'unité de mesure retenue comme « unité de référence » (unité de mesure)

Figure 4 *- « sortir » un nombre décimal / une mesure d'un tableau de numération / de mesure*

En conclusion, le registre des unités de numération spécifiques des nombres décimaux présente des spécificités fortes. Il est d'une part *voué à disparaître* dans l'écriture positionnelle chiffrée, contrairement à celui des unités de mesure dans l'écriture décimale de *nombres décimaux - grandeur*s. Ce registre est, d'autre part, construit dans un sens *partage* de l'unité. Ainsi a-t-on pu s'interroger sur la pertinence d'une tâche comme *écrire en chiffres « 13,5 dizaines »*, plutôt absente du curriculum (y compris passé) du primaire comme du secondaire, dans laquelle coexistent écriture décimale positionnelle chiffrée et unités de numération. L'analyse d'une telle tâche donne à voir la complexité des techniques à l'œuvre pour l'accomplir dans le registre des unités de numération décimale. Cette complexité tient en particulier au fait que les techniques envisagées convoquent à la fois le traitement du dixième construit comme *partage* de l'unité en 10 et de la dizaine construite comme *groupement* par 10 de l'unité. De telles techniques sous-entendraient notamment que dans une action de *partage*, il s'agirait de partager autre chose que l'unité ou qu'une subdivision[7] de l'unité, ce qui n'est *a priori* abordé que plus tardivement, par exemple, quand on introduit la fraction d'une quantité dans le curriculum scolaire. Pour mieux acter de cette dissymétrie, notons que la tâche « *13,5 décamètres* » est à l'inverse tout à fait envisageable, dans ce même curriculum, ce qui tend à illustrer la différence de traitement d'écritures décimales en lien avec le registre des unités de numération et de celles en lien avec le registre des unités de mesure. Une exception semble toutefois liée à des usages sociaux : il s'agit de « *13,5 millions* » dont il s'agit sans doute d'envisager le traitement un jour dans le contexte scolaire !

Si l'on peut dès lors s'accorder sur les potentialités du registre des unités de numération dans l'enseignement des décimaux, comme étant à même de favoriser une certaine continuité dans la construction plus globale de la numération décimale, et plus particulièrement dans la transition école-collège, on peut aussi s'interroger sur les limites d'un tel projet. Si l'addition et la soustraction posées de nombres décimaux paraissent des lieux privilégiés pour « *faire parler* » les unités de numération et des traitements intrinsèques à ce registre de représentation, il n'en est pas de même pour la multiplication posée, reléguée entre 1995 et 2008 à l'entrée au secondaire en France. L'analyse de discours possibles ou effectivement tenus sur un algorithme posé de la multiplication de deux nombres décimaux illustrent des limites potentielles d'usages d'un tel registre de représentation : un discours justificatif chiffre à chiffre du calcul posé de $56{,}03 \times 8{,}3$ convoquerait inévitablement des relations entre unités de numération (3 dixièmes de 5 dizaines par exemple pour le produit considéré ici) dont le

[7] Le partage d'une subdivision de l'unité a pu été abordé dans la construction d'une unité de numération : quand on construit par exemple le centième comme le dixième du dixième de l'unité.

coût de construction reste à évaluer et *in fine* retomberait sur l'écueil signalé précédemment dans le texte, en lien avec le dixième de la dizaine et d'autres relations du même type. D'autres discours justificatifs sont certes possibles, prenant appui sur la multiplication posée d'un entier par un décimal construite en lien avec l'addition itéré et sur l'effet sur un produit d'un multiplicateur 10, 100 fois plus petit. Ainsi, on pourra entendre que si le multiplicateur était 83, le produit n'aurait en décimales que des centièmes, puisqu'on aurait répété 83 fois le multiplicande 56,03 dont les décimales sont des centièmes[8]. Comme le multiplicateur est 8,3, c'est à dire dix fois plus petit que 83, le produit doit donc avoir des « *unités dix fois plus petites que les centièmes* ». On pourra également entendre que « *multiplier 56,03* $\times$ *8,3 ou par 83 dixièmes, c'est prendre 83 fois la dixième partie du multiplicande, c'est à dire multiplier 5,603 par 83…* ». Toutefois ces autres justifications trouvées dans des manuels anciens prennent appui peu ou prou sur la triple égalité $a \times \frac{b}{c} = \frac{a \times b}{c} = \frac{a}{c} \times b$[9] dont la justification ne peut s'accommoder de la seule définition *partage* d'une fraction et engageant plus volontiers un jeu plus subtil de changement de point de vue entre nombre « opérateur » et nombre « grandeur » (Coulange et Train 2017) non sans lien avec une autre acception de la fraction : celle de *quotient.*

C'est pour ces raisons entre autres, que nous faisons l'hypothèse que les nombres décimaux sont à redéfinir comme des « *nombres qui multipliés par 10, 100, 1000 … donnent des nombres entiers* » à l'entrée au collège. Muni d'une telle (re)définition, en s'intéressant encore à $P = 56{,}03 \times 8{,}3$, on a $56{,}03 \times 100 = 5603$ et $8{,}3 \times 10 = 83$ puis $5603 \times 83 = (56{,}03 \times 100) \times (8{,}3 \times 10) = (56{,}03 \times 8{,}3) \times 1000 = P \times 1000$. P est alors par définition le nombre qui multiplié par 1000 donne 5603×83. Une telle définition représente selon nous, une rupture nécessaire qui en recouvre une autre : le passage d'une fraction *partage* enseignée au primaire à une fraction *quotient* enseignée au secondaire, dont nous disons quelques mots ci-après.

II. ENSEIGNEMENT DES FRACTIONS A L'ECOLE ET AU COLLEGE

Depuis plusieurs années déjà (dès 1996 ; cette injonction officielle a été renouvelée en 2016), les programmes français mettent en avant deux acceptions institutionnelles de la fraction :
- La fraction $\frac{a}{b}$ dite *partage* appréhendée comme partage d'une unité – liée à l'action de prendre un $b^{\text{ième}}$ de l'unité (en partageant l'unité en b parts équitable), $\frac{a}{b}$ étant alors « *a fois un* $b^{\text{ième}}$ *de l'unité* », étudiée en primaire.

- La fraction $\frac{a}{b}$ dite *quotient* appréhendée comme « *le nombre qui multiplié par b donne a* », étudiée dès l'entrée au secondaire.

La fraction *partage* recouvre de nombreuses potentialités à même d'être étudiées au primaire. Dès son introduction à l'école, il est un fait constaté : les élèves « partagent » l'unité mais aussi (souvent en deux) des subdivisions de l'unité (construisant le quart de l'unité comme la moitié du demi ou le huitième de l'unité). Dans les classes observées, les élèves de primaire semblent d'ailleurs investir des connaissances quotidiennes ou sociales sur « *la moitié* », « *le quart* » et « *le tiers* » d'une unité. Ces connaissances construites en dehors de l'école peuvent se constituer comme autant de points d'appui mais aussi parfois comme des

---

[8] Notons que la véracité d'une telle affirmation peut à elle seule parfois poser question pour certaines multiplications posées ou non (par exemple s'agissant de 0,5 x 2 = 1)

[9] $56{,}03 \times \frac{83}{10} = \frac{1}{10} \times (56{,}03 \times 83) = \frac{56{,}03}{10} \times 83$

obstacles[10] dans la construction scolaire de la fraction *partage*. Interrogés, avant tout apprentissage organisé en classe, les élèves de primaire que nous suivons sont à même de formuler des réponses en prise d'appui sur l'action (de partage), sans pour autant disposer de garanties sur le retour à la référence, l'unité, ou encore sur les liens existants entre les subdivisions de cette référence.

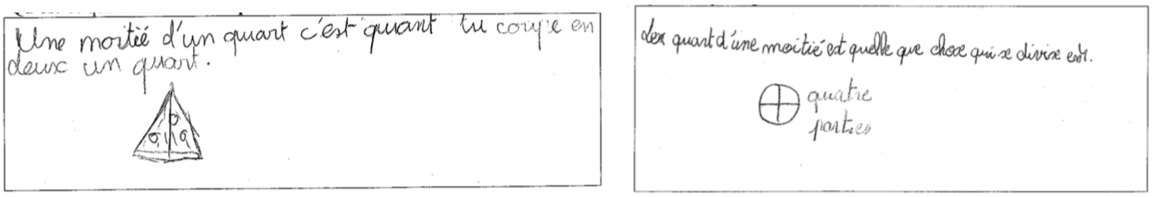

Figure 5 - *Exemples de productions d'élèves en réponse à des questions posées sur la moitié d'un quart ou le quart d'une moitié (en amont de tout enseignement des fractions à l'école)*

Il existe par ailleurs des tensions entre des actions (correspondant au partage de l'unité, de subdivisions de l'unité) et les résultats de ces actions dans les situations d'enseignement et d'apprentissage de la fraction *partage*. Par exemple, dans un contexte lié à la mesure de longueurs, le huitième de l'unité est construit comme la moitié du quart de l'unité (par des actions successives de pliage en deux) et ce n'est que dans un second temps qu'il sera véritablement considéré comme *un huitième* quand on donnera à observer le résultat de l'action qui a permis d'obtenir un partage en huit parts égales. Aussi, si des raisonnements complexes permettant la production d'égalités d'écritures fractionnaires ou de sommes (du type $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$) sont tenus par les élèves, sous certaines conditions, et qu'on partage « plus que l'unité » (des subdivisions de l'unité), la référence à l'unité joue un rôle essentiel dans la production et de validation de tels raisonnements au niveau du primaire.

La fraction *quotient* peine, quant à elle, davantage que la fraction *partage*, à trouver une place dans les savoirs enseignés en France, au niveau du secondaire. Dans les manuels scolaires, il est aisé de constater soit des absences, la fraction *partage* continuant à vivre largement au sein de différentes activités ou exercices, soit des tentatives maladroites d'introduction de cette fraction *quotient* (Coulange & Train 2017). Ces constats invitent à s'interroger plus avant sur cette fraction, souvent construite comme *le b*^{ième} *de a unités* dans le cadre des grandeurs (longueurs ou aires notamment) conformément à des attentes institutionnelles exprimées en ce sens. Cette action de partage de grandeurs, ici étendue à plusieurs unités (au lieu d'une) n'apparaît, nous semble-t-il, pourtant pas si proche qu'elle en a l'air de la définition de la fraction *quotient* telle que formulée ci-avant. Une autre acception de la fraction dans le cadre des grandeurs, matérialisée par la « situation de l'épaisseur des feuilles de papier » (Brousseau & Brousseau 1987, 2005), celle relative à la *commensuration* : « *la fraction n/m est la mesure d'un objet tel qu'il en « sommer » m, égaux pour équivaloir à n unités* » paraît plus proche et conforme de la définition de la fraction quotient. Elle paraît malheureusement une oubliée de l'institution scolaire française. Nous avons adapté une situation ancienne (celle dite « des automates » ou « des robots » trouvée dans un ancien ouvrage ERMEL et reprise par des auteurs variés[11]) en prenant appui sur des matériaux liés à la situation de l'épaisseur des feuilles de papier archivés au sein du Centre de Ressources de Didactique des Mathématiques – *Guy Brousseau*[12]. La ressource ainsi produite[13] (Coulange &

[10] Ainsi des élèves n'éprouvent pas lors d'une séquence observée la nécessité de plier une bande unité, étalon de longueur, pour mesurer la longueur des segments, sachant par ailleurs identifier et qualifier « la moitié » et même « le quart » de cette unité (voir contribution de Coulange et Train - GT6 du colloque).

[11] Que nous avons pris le soin de citer dans Coulange & Train (2017)

[12] http://www.imac.uji.es/CRDM/

Train 2017) nous paraît un support possible en vue d'aménager une vie à la fraction *commensuration* comme un préalable à la fraction *quotient* dont nous persistons à penser qu'elle recouvre des potentialités, comme celle déjà citée relative au produit de décimaux. Le scénario général s'articule autour du déplacement de robots sur une droite graduée en unités et organise l'étude et la caractérisation de la longueur des sauts des robots dans le but de les distinguer. Ce travail permet d'introduire une caractérisation fractionnaire des longueurs de sauts : *une longueur de saut de « 5 unités en 3 sauts » sera désignée* $\frac{5}{3}$. Ainsi, si $\frac{5}{3}$ est la longueur d'un saut, c'est bien que 3 sauts de longueur $\frac{5}{3}$ font 5 unités, se rapprochant ainsi de l'acception *quotient* de la fraction. Nous donnons ci-dessous un aperçu d'un épisode de classe lié à nos premières expérimentations, qui concerne une tâche de comparaison de fractions et qui nous paraît à même d'illustrer plus avant notre propos.

Lors de cet épisode de classe, il s'agit tout d'abord de comparer $\frac{7}{3}; \frac{9}{2}; \frac{17}{4}$. La technique formulée par un élève est celle de la mise au même dénominateur, technique construite et justifiée dans l'échange par le fait qu'à un même nombre de sauts, le robot ayant le saut le plus grand est celui qui ira le plus loin… *E : je les ai mis tous sur 12 [P : explique un peu] E : 7 sur 3 c'est pareil que 28 sur 12 parce que atteindre 7 en 3 sauts, c'est comme atteindre 28 en 12 sauts.* […] *E : j'ai fait pareil pour 9 sur 2 […] il atteint 36 en 12 sauts […] 9/2 c'est plus grand, il fait des sauts plus grands…* Lors de ce même épisode de classe, toujours en lien avec la comparaison de fractions, une autre technique est proposée par une autre élève pour comparer $\frac{7}{3}$ et $\frac{17}{4}$. Dans un premier temps, l'élève construit l'égalité $\frac{7}{3} = \frac{14}{6}$: *E : comme avec 3, on ne peut pas atteindre 4 en le multipliant, j'ai quand même multiplié par 2, ça fait 6 et j'ai aussi multiplié par deux 7, ça fait 14.* Dans un second temps, elle propose de comparer $\frac{14}{6}$ et $\frac{17}{4}$: *E : avec un plus grand nombre de sauts, on atteint une plus petite longueur, du coup, il est plus petit.* Autrement dit, ici, la technique mise en fonctionnement (et plutôt inédite) revient à dire que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ car $a < c$ et $b > d$. Nous poursuivons actuellement nos expérimentations dans différentes classes afin d'explorer les potentialités d'une telle approche et plus globalement de la fraction *quotient*, telle qu'elle nous parait devoir être mise à l'étude à l'entrée au collège.

III. EN GUISE DE CONCLUSIONS

Ce texte se veut une synthèse d'un certain de nombre de réflexions, abouties ou encore en chantier, et des résultats de nos recherches actuelles sur l'enseignement et l'apprentissage des nombres décimaux et des fractions à l'école et au collège. Ces contenus illustrent nous semble-t-il, assez bien ce qui parfois peut se jouer du point de vue d'une transition institutionnelle entre le primaire et le secondaire en France. Nous avons tenté de dégager d'un part des continuités à aménager à un niveau global, concernant l'enseignement de la numération décimale, en questionnant notamment le rôle du registre sémiotique des unités de numération dans l'enseignement des nombres décimaux. Nous avons également pointé des ruptures qui nous paraissent tout aussi nécessaires dans l'enseignement de nombres comme les fractions et des décimaux dans la transition école – collège.

D'autres questions plus indirectement liées aux contenus mais qui nous paraissent contraindre les situations d'enseignement et d'apprentissage de ces nombres dans cette transition institutionnelle, émergent également. Notamment la question des modes

[13] Disponible sur https://www.researchgate.net/project/Fractions-dans-la-transition-primaire-secondaire

d'interactions entre élèves ou entre élèves et enseignants, à l'oral, à l'écrit plus ou moins typiques d'une institution scolaire ou d'une autre (primaire ou secondaire) et qui participent à la construction ou aux usages de différents registres de représentations sémiotiques des nombres décimaux ou des fractions nous intéresse particulièrement.

Il s'agit peut-être dans certains cas de considérer également une autre transition, celle avec un monde plus extérieur à l'école. Dans le cas présent, s'agissant des fractions et des décimaux, cela peut revêtir une certaine importance, les élèves arrivant visiblement à l'école en ayant déjà rencontré et fréquenté des usages sociaux ou quotidiens du fractionnement de l'unité et de l'écriture décimale. Nous avons donné ci-avant quelques exemples liés à des connaissances d'élèves sur le « quart » ou la « moitié », visiblement présentes en amont de tout enseignement officiel des fractions. Dans une des classes observées au sein du LéA Carle Vernet, un scénario « *à l'envers* » s'est même joué à trois reprises autour de l'écriture décimale, introduite à l'initiative d'un (ou plusieurs) élève(s) sans avoir fait l'objet d'un enseignement préalable, et dont l'enseignante a choisi de construire la signification dans un « après coup »…

REFERENCES

Brousseau G., Brousseau N. (1987) *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, IREM de Bordeaux.

Brousseau G. et Brousseau N. (2008) Atelier d'ingénierie et d'analyse des processus didactiques Rationnels et décimaux dans l'enseignement obligatoire. In Rouchier A. & Bloch I. (Eds.), *Perspectives en didactique des mathématiques*, La Pensée Sauvage.

Centre de Ressources de Didactique des Mathématiques – *Guy Brousseau*. http://www.imac.uji.es/CRDM/

Chambris C. (2008) Relations entre les grandeurs et les nombres dans les mathématiques de l'école primaire. Evolution de l'enseignement au cours du 20^{e} siècle. Connaissances des élèves actuels. *Thèse de l'Université Paris-Diderot.*

Chambris C. (2010) Relations entre grandeurs, nombres et opérations dans les mathématiques de l'école primaire au 20e siècle : théories et écologie. *Recherches en didactique des mathématiques*. 30(3), 317-366.

Chambris C. (2014) *Contribution à propos de la numération décimale. Contribution aux travaux des groupes d'élaboration des projets de programmes C2, C3 et C4.* MEN.

Chambris C., Tempier F., Allard C. (2017) Un regard sur les nombres à la transition Ecole-Collège, *Repères IREM*, 108, 63-91.

Chesné J-F. (2017) Les évaluations externes des élèves en mathématiques : apports, enjeux et perspectives, In Lebot B. & Vandebrouck F. (Eds.), *Mathématiques en cycle 3 – Actes du colloque*, IREM de Poitiers, 59-72.

Coulange L., Train G. (2017) Continuités et ruptures de l'enseignement des fractions au cycle 3 - Quelles perspectives ? In Lebot B. & Vandebrouck F. (Eds.), *Mathématiques en cycle 3 – Actes du colloque*, IREM de Poitiers, 143-156.

Coulange L., Train G. (2015) *Quelle(s) extension(s) d'un système de numération des nombres entiers aux nombres décimaux ?* XXIIIe colloque de la CORFEM, Nîmes.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 5, 37-65.

Duval R. (1994) *Sémiosis et pensée humaine, registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, Peter Lang.

Tempier F. (2013) La numération décimale de position à l'école primaire : une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource. *Thèse de l'Université Paris Diderot.*