Mathématiques pour l'enseignement: une approche anthropologique

Danielle Huillet : *Université Eduardo Mondlane, Département de Mathématiques et d'informatique ; Maputo, Mozambique*

Résumé

Cet article présente une réflexion sur les connaissances nécessaires à un professeur de mathématiques. On y analyse les principaux apports théoriques à ce sujet à la lumière de la théorie anthropologique du didactique. On y conclut qu'il n'y a pas lieu de distinguer les connaissances 'purement mathématiques' des connaissances mathématiques utilisées dans l'enseignement. Dans les institutions de formation des enseignants, les cours de mathématiques devraient être orientées vers l'enseignement. Une nouvelle description des mathématiques pour l'enseignement est ensuite proposée.

Introduction

Cet article présente une réflexion théorique sur le type de connaissances nécessaires à un professeur de mathématiques pour enseigner d'une façon non routinière. Cette question est l'objet d'étude et de discussion au sein de la communauté d'éducateurs mathématiques depuis de nombreuses années, après l'introduction par Lee Shulman des notions de 'Subject Matter Knowledge' (SMK) et 'Pedagogical Content Knowledge' (PCK)[1] qui remirent en cause, pour la première fois, la dichotomie entre les connaissances mathématiques et les connaissances pédagogiques de l'enseignant. Depuis lors, de nombreux éducateurs mathématiques ont tenté de caractériser le SMK (par exemple Even, 1990 et 1993) ou le PCK (par exemple Ball, Thames & Phelps, 2007). Ce sujet a aussi été thème de discussion dans des conférences internationales (par exemple au 11ème Congrès International ICME en juillet 2008, le Topic Study Group 27 intitulé 'Mathematical knowledge for teaching' (connaissances mathématiques pour l'enseignement) orienté par Deborah Ball and Jill Adler).

Cet article est une contribution à cette réflexion. En premier lieu, on y présente les principaux apports théoriques à ce sujet, depuis les travaux de Shulman jusqu'aux travaux les plus récents de plusieurs éducateurs mathématiques. Ces contributions sont ensuite analysées en utilisant la théorie anthropologique du didactique développée par Yves Chevallard (Chevallard, 1999). On conclut de cette analyse qu'il n'y a pas lieu de distinguer des connaissances 'purement mathématiques' et des connaissances mathématiques utilisées dans l'enseignement, car les mathématiques ne vivent pas dans le vide mais dans des institutions. Dans les institutions de formation des enseignants, les cours de

[1] Dans cet article on utilisera les expressions anglaises Subject Matter Knowledge ou SMK (connaissance de la matière), Pedagogical Content Knowledge ou PCK (connaissance pédagogique du contenu).

mathématiques devraient être orientées vers l'enseignement de cette discipline. Une nouvelle description des mathématiques pour l'enseignement, ayant pour base l'analyse du travail de l'enseignant quand il planifie l'étude d'une organisation mathématique par ses élèves, est ensuite proposée. Cette description se base sur les six moments de l'étude de Chevallard (2002).

Subject Matter Knowledge et Pedagogical Content Knowledge: les premiers pas

En 1986 Lee Shulman remet en cause les connaissances nécessaires aux professeurs pour enseigner les mathématiques (Shulman, 1986, 1987), en connexion avec la nouvelle réforme aux Etats-Unis, en posant la question suivante :

> Quelles sont les source des connaissances de base nécessaires à l'enseignement? En quels termes peut-on conceptualiser ces sources? Quelles en sont les implications pour les politiques d'enseignement et la réforme de l'éducation? (1987: 1)[2]

En réponse à ces questions, Shulman (1987) classifie ces connaissances en trois catégories : Subject Matter Knowledge, Pedagogical Content Knowledge et connaissance du curriculum. Cet article est centré sur les deux premiers aspects de ces connaissances : SMK et PCK.

Subject Matter Knowledge (SMK)

D'après Shulman, en plus des faits et des procédures, les professeurs devraient avoir une compréhension profonde des structures substantives et syntactiques du sujet qu'ils enseignent. Il définit ces structures comme suit :

> Les structures substantives sont les différentes façons dont les concepts et les principes de base de la discipline sont organisés de façon à organiser les faits. La structure syntactique de la discipline est l'ensemble des façons de distinguer le vrai du faux, ce qui est valide de ce qui ne l'est pas (1986: 9).

Cette description de SMK est très importante en Education Mathématique, car dans beaucoup de pays l'enseignement des mathématiques ne prend pas en compte ces deux structures. Les faits et les procédures sont souvent enseignés sans lien entre eux, des démonstrations toutes faites sont généralement enseignées aux élèves, sans réflexion sur les différentes méthodes pour démontrer la validité d'une affirmation en mathématiques. Les élèves apprennent des démonstrations mais n'apprennent pas à démontrer. En conséquence, les enseignants ont souvent des connaissances stéréotypées qu'ils ne savent pas expliquer, non seulement dans des pays émergents comme le Mozambique (Huillet, 2007) mais aussi dans des pays développés (voir par exemple Proulx, 2007).

---

[2] Les citations en anglais ont été traduites par l'auteur.

Pedagogical Content Knowledge (PCK)

Le PCK représente la fusion du contenu et de la pédagogie dans une compréhension de comment certains sujets, problèmes ou thèmes sont organisés, représentés et adaptés aux différents intérêts et habiletés des apprenants et présentés pour l'instruction (1987: 8).

Cette idée était nouvelle dans les années 80 car les apprentissages des contenus et de la pédagogie étaient généralement séparés dans les cours de formation de professeurs. Par exemple, un professeur de mathématiques devait avoir une solide connaissance des mathématiques supérieures et des connaissances générales de pédagogie, mais l'idée de fusionner contenu et pédagogie n'existait pas (et n'existe souvent toujours pas) dans la plupart des cours de formation de professeurs.

Pour Shulman, le PCK comprenait

> pour la plupart des thèmes généralement enseignés dans un domaine, les formes les plus utiles de représenter les idées, les analogies, les illustrations, les exemples, les explications et les démonstrations les plus fortes – en un mot, les façons de représenter et de formuler le sujet qui le rendent compréhensible aux autres. (1986: 9).

Le PCK comprend aussi la « compréhension de ce qui rend l'étude de thèmes spécifiques facile ou difficile » (1986: 9).

Ball, Thames & Phelps (2007) considèrent que les travaux de Shulman et de ses collègues ont apportés deux grandes contributions : ils ont « recadré l'étude des connaissances des professeurs de façon à mettre en avant le rôle du contenu dans l'enseignement » (2007: 6), et ils « représentent les connaissances du contenu comme des connaissances techniques spécifiques, clefs de la profession d'enseignant » (2007: 7) [3].

Les théories de Shulman ont depuis été l'objet d'étude et de développement de la part de nombreux éducateurs, non seulement en mathématiques mais aussi dans d'autres disciplines, par exemple en chimie (Davidowitz & Rollnick, 2005) et en physique (Jita & Ndlalane, 2005). On se limitera ici aux études sur les mathématiques pour l'enseignement basées sur les idées de Shulman.

SMK et PCK: développements en Education Mathématique

Ruhama Even

Even (1990, 1993) adopte la classification de Shulman en termes de SMK et PCK et décrit le SMK pour enseigner un thème mathématique développé à partir de l'étude du concept de fonction. Cette classification comprend sept aspects principaux : caractéristiques essentielles, différentes représentations, différentes façons d'aborder le concept, la force du concept, répertoire de base, connaissance et compréhension du concept, connaissances générales des mathématiques.

[3] Pour une description plus détaillée des notions de SMK et de PCK, voir Ball et al. (2007)

Bien que cette description mette l'accent sur quelques aspects importants des connaissances des professeurs, son analyse et son application au concept de limites de fonctions (Huillet, 2007) ont mis en évidence plusieurs lacunes. De fait, des sept catégories répertoriées par Even, il n'y en a que deux, la force du concept et les connaissances générales des mathématiques, qui renvoient explicitement au SMK. Quatre autres catégories se réfèrent en même temps aux connaissances mathématiques et pédagogiques, et peuvent donc être considérées comme appartenant plutôt au PCK qu'au SMK: les caractéristiques essentielles du concept, liées chez Even au concept image des étudiants ; les différentes représentations ; les différentes façons d'aborder le concept ; le répertoire de base. Ces aspects renvoient tous aux pratiques d'enseignement.

Dans la description que Even fait du SMK, la distinction entre SMK et PCK est donc floue et montre combien il est difficile de décrire le SMK sans se référer aux pratiques des enseignants.

Deborah Ball et son groupe de recherche

Ball et ses collègues ont centré leurs travaux sur les pratiques des professeurs d'école primaire, de façon à développer une « théorie des connaissances mathématiques pour l'enseignement basée sur la pratique » (Ball, Bass & Hill, 2004: 55). Ils posent les questions suivantes:

- Quelles connaissances mathématiques sont mises en oeuvre dans l'enseignement des mathématiques?
- Quelles sont les connaissances mathématiques utilisées dans l'enseignement et comment sont-elles utilisées? Comment ces connaissances mathématiques y sont-elles entrelacées avec d'autres connaissances et sensibilités? (2004: 55)

Ils subdivisent le SMK en deux sous-catégories: le 'Common Content Knowledge' (CCK) et le 'Specialized Content Knowledge' (SCK)[4].

Le CCK est défini de façons différentes dans différents articles :

- «les connaissances qu'on s'attend à trouver chez un adulte instruit mais non enseignant ainsi que le contenu traditionnellement enseigné aux étudiants de collège» (Hill, 2007: 98);
- «les connaissances du sujet que devrait avoir un bon élève, un banquier ou un mathématicien» (Hill, Rowan & Ball, 2005: 387);
- «les connaissances et capacités mathématiques utilisées dans des cadres autres que l'enseignement» (Ball et al., 2007:32).

Les définitions correspondantes du SCK sont, elles, semblables les unes aux autres :

[4] Common Content Knowledge ou CCK (connaissances communes du contenu); Specialized Content Knowledge ou SCK (connaissances spécialisées du contenu)

- « les connaissances mathématiques qui vont au-delà de celles d'un adulte moyennement instruit » (Hill, 2007: 98);
- « les connaissances utilisées dans l'enseignement des mathématiques » (Hill, Rowan & Ball, 2005: 387);
- « les connaissances et capacités mathématiques nécessaires aux professeurs dans le cadre de leur enseignement» (Ball et al., 2007:34).

Alors qu'il semble relativement simple de décrire le SCK en tant que connaissances mathématiques mises en œuvre dans l'enseignement, la description du CCK semble beaucoup plus problématique, comme le montrent les différentes définitions données par ces chercheurs et qui renvoient toutes à un cadre particulier (le quotidien, la banque, le travail de l'élève, celui du mathématicien) et aussi à une culture (les connaissances d'un adulte moyennement instruit varient d'un pays à l'autre). Il semble donc difficile de définir des connaissances 'purement mathématiques', c'est-à-dire des mathématiques qui ne soient liées à aucune pratique.

Ball introduit aussi une nouvelle notion pour décrire les mathématiques pour l'enseignement, l'idée de 'unpacking', que je traduirais ici par « décortiquer » (Ball et al., 2004), l'idée de base étant que, dans le travail mathématique, on utilise généralement les mathématiques sous une forme 'compressée'. Les professeurs doivent « décompresser » les connaissances mathématiques pour les enseigner à leurs élèves. Nous reviendrons plus tard sur cette importante notion.

Jill Adler et le projet Quantum

Le projet Quantum s'intéresse à la façon dont les mathématiques sont enseignées dans les cours de formation de professeurs de mathématiques en Afrique du Sud, par l'analyse des tâches proposées dans les épreuves d'évaluation de plusieurs institutions de formation de professeurs (Adler & Davis, 2006). Ces tâches ont été classifiées suivant leurs composantes mathématiques et pédagogiques, et plus spécialement en considérant l'exigence faite aux futurs professeurs de 'décortiquer' les connaissances mathématiques. Cette recherche montre que, dans la plupart des tâches, les connaissances mathématiques en jeu sont des connaissances 'compactées'.

Ces connaissances 'compactées' renvoient-elles au SMK, au CCK ou à quelque autre forme de connaissances 'purement mathématiques' ? Pourquoi semble-t-il si difficile de décrire ce savoir 'purement mathématique' ? Ce savoir existe-t-il ? Nous allons maintenant examiner ces questions à la lumière de la théorie anthropologique du didactique de Yves Chevallard.

La théorie anthropologique du didactique de Chevallard

Chevallard situe l'activité mathématique, ainsi que celle de l'étude des mathématiques, au sein des activités humaines et des institutions sociales. Ce modèle conçoit toute activité humaine comme un système de tâches (Chevallard, 1999; Bosch & Chevallard, 1999). Dans une institution donnée, il y a généralement quelques techniques (et souvent même une seule) reconnues par l'institution pour accomplir une tâche. Chaque type de tâche et sa technique associée forment le *bloc pratique* d'une *organisation mathématique* (OM).

La relation institutionnelle à un objet est façonnée par l'ensemble des tâches que doivent accomplir, par des techniques déterminées, les personnes occupant une certaine position au sein de l'institution. Dans une institution donnée, la plupart des tâches deviennent routinières, les blocs pratiques tâche/technique apparaissant alors comme *naturels* au sein de l'institution.

Il existe cependant une contrainte écologique à l'existence d'une technique au sein d'une institution : elle doit être à la fois compréhensible et justifiée (Bosch & Chevallard, 1999). C'est le rôle de la technologie, discours rationnel pour décrire et justifier les techniques. Ces contraintes écologiques peuvent parfois mener à une contradiction, car la compréhension des élèves peut être limitée par leur âge et leurs connaissances antérieures. Il peut s'avérer difficile de justifier une technique par un discours à la fois compréhensible et justifié.

La technologie elle-même est justifiée par une théorie, niveau plus élevé de justification, explication et production de techniques. Le bloc technologie-théorie d'une OM est généralement identifié à un *savoir*, alors que le bloc tâche-technique est considéré comme un *savoir-faire* (Chevallard, 1999).

Les deux composantes d'une OM ont été représentées dans le diagramme suivant.

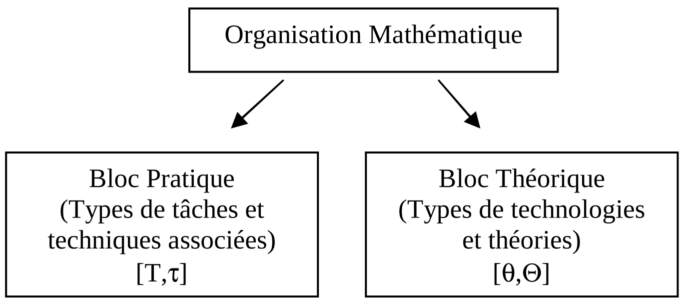

Figure 1

Organisation Mathématique

Pour enseigner une organisation mathématique dans une certaine classe, le professeur doit construire une *organisation didactique* (Chevallard, 2002). Pour analyser comment une organisation didactique permet l'étude d'une OM, nous allons regarder les différents moments de l'étude d'une OM dans une classe, suivant le modèle des six moments de l'étude proposé par Chevallard (2002) : la *(première) rencontre* avec une tâche T ; *l'exploration de T* et *l'émergence de la technique τ* ; la construction du *bloc technologico-théorique* [θ/Θ]; l'*institutionnalisation*; le *travail* de l'organisation mathématique (et en particulier *de la technique*) ; l'*évaluation*.

L'ordre de ces différents moments n'est pas fixe. Suivant le type d'organisation didactique, ils peuvent apparaître dans un ordre différent mais il est probable que tous aient lieu.

Comment l'approche anthropologique de Chevallard aide à analyser les mathématiques pour l'enseignement

La notion d'organisation mathématique

L'analyse d'Even avait pour objectif de décrire les connaissances mathématiques (SMK) nécessaires pour enseigner un thème mathématique. De fait, la plupart des sept aspects présentés dans cette description renvoient à un concept et sont appliqués au concept de fonction : les caractéristiques essentielles du concept, ses différentes représentations, les différentes façons d'aborder le concept, la force du concept et la connaissance et la compréhension du concept.

Le répertoire de base renvoie plutôt à des théorèmes ou des propriétés et à leurs applications aux différents types de tâches, alors que les connaissances générales des mathématiques renvoient aux méthodes, moyens et processus de production des connaissances mathématiques, c'est-à-dire aux « métamathématiques », qui dépassent largement tout *concept* ou même tout *thème* mathématique.

Ball et al. (2004) parlent aussi d'un *thème* et commencent leur article par une analyse de la multiplication des décimaux. Ils se réfèrent ensuite aux connaissances mathématiques des enseignants relatives à un *contenu*.

L'introduction de la notion d'organisation mathématique (OM) semble doublement utile. D'une part elle aide à clarifier de quoi on parle : le mot *concept* est trop restrictif car il indique un seul type d'objets mathématiques ; le mot *contenu* est moins restrictif mais très vague. Chevallard définit une OM comme la réalité mathématique qui peut être construite dans une classe où l'on étudie un certain contenu (1999). Il replace ainsi toute OM dans une institution spécifique, le même contenu pouvant donner lieu à différentes OMs suivant l'institution où elle prend vie. Une OM peut être ponctuelle, comme la multiplication des décimaux dans une école primaire, mais aussi plus complexe, par exemple les limites de fonctions dans les écoles secondaires mozambicaines, ou même très générale, par exemple l'analyse mathématique (Calcul différentiel et intégral).

Par ailleurs, la notion d'organisation mathématique replace les activités mathématiques au sein des activités humaines : c'est un type spécial de praxéologie.

La notion de praxéologie

Chevallard considère que toute activité humaine peut être décrite à partir d'un modèle unique, qu'il appelle praxéologie car il a deux composantes :

un bloc pratique (praxis) et un bloc théorique (logos). Le fait de considérer une OM comme une praxéologie permet de clarifier les tâches du professeur quand il construit une organisation didactique, et ainsi que de décrire les connaissances mathématiques nécessaires pour réaliser ces tâches.

Une nouvelle description des mathématiques pour l'enseignement

Construire une nouvelle organisation didactique pour enseigner une OM est une tâche générale qui peut être subdivisée en plusieurs tâches plus spécifiques suivant les différents moments de l'étude (Huillet, 2007), en particulier :

(a) Introduire la nouvelle organisation mathématique (première rencontre) ;

(b) Introduire plusieurs types de tâches et des techniques pour résoudre ces tâches (blocs pratico-techniques)

(c) Justifier et expliquer ces tâches et ces techniques par un discours technologique (blocs technologico-théoriques) ;

(d) Clarifier ce que les élèves doivent savoir (institutionnalisation) ;

(e) Organiser le travail des techniques par les élèves ;

(f) Evaluer les élèves.

Quelles sont les connaissances nécessaires pour accomplir ces différentes tâches ?

En premier lieu, le professeur doit choisir une façon adéquate d'organiser la première rencontre de ses élèves avec l'organisation mathématique. Pour cela il lui faut connaître différentes façons de le faire, mais il lui faut aussi connaître les différentes (pré)conceptions que ses élèves peuvent avoir sur cette OM ou d'autres OMs associées, ainsi que les difficultés que les élèves de cet âge et de ce niveau d'enseignement ont généralement quand ils étudient cette OM.

Ensuite, pour aider ses élèves à explorer l'OM, le professeur doit être capable de les faire travailler dans plusieurs cadres et registres sémiotiques. Il doit leur proposer différents types de tâches et les amener à utiliser différentes techniques pour résoudre ces tâches, ainsi que de choisir une technique adaptée pour chaque tâche. Pour cela, il faut qu'il ait une bonne connaissance des différents cadres et registres disponibles pour étudier cette OM, et qu'il possède un éventail de tâches dans chaque cadre ou registre et pour passer d'une représentation à l'autre.

Le professeur doit ensuite choisir les éléments technologiques qui serviront à expliquer et justifier les techniques utilisées par les élèves. Quelles définitions seront données aux élèves, suivant leur âge et leurs connaissances antérieures ? Quels théorèmes, quelles démonstrations pour les justifier ? Les étudiants sont-ils capables de comprendre ces démonstrations ? Si non, comment les justifier ? Un changement de registre peut-il aider à expliquer une règle ? Ici aussi le professeur doit avoir une solide connaissance mathématique de l'OM à enseigner, mais aussi de ses différentes représentations et des connaissances antérieures des élèves.

L'analyse des tâches à accomplir par le professeur pour construire une organisation didactique pour enseigner une certaine organisation mathématique nous permet ainsi de considérer différentes catégories de connaissances mathématiques pour l'enseignement. Ainsi, idéalement et pour chaque OM à enseigner, le professeur devrait :

(a) Avoir une solide connaissance de l'OM enseignée dans l'institution, ce qui inclut les définitions des concepts, les théorèmes et leurs démonstrations, l'usage correct des notations et des symboles, ainsi que des connaissances générales de mathématiques.

(b) Connaître la justification sociale pour enseigner cette OM : pourquoi cette OM est-elle enseignée dans cette institution ? Dans cette classe ? Ceci inclut les relations de cette OM avec d'autres et ses applications dans la vie quotidienne, en mathématiques et/ou dans d'autres disciplines.

(c) Connaître plusieurs façons d'organiser la (première) rencontre de ses élèves avec cette OM.

(d) Avoir un répertoire de tâches dans différents cadres ou registres, ou pour passer d'une représentation à l'autre, et connaître plusieurs techniques pour accomplir ces tâches.

(e) Savoir construire le bloc technique (éléments technologiques pour justifier les techniques) suivant l'âge et les connaissances antérieures des élèves ;

(f) Connaître les conceptions et les difficultés des élèves face à cette OM.

Dans cette description, il devient difficile de distinguer le mathématique du pédagogique, car ils sont étroitement entrelacés, certains des aspects présentés étant plus mathématiques et d'autres plus pédagogiques. En fait, plus que des connaissances, le professeur doit avoir des compétences qui lui permettront de rechercher les éléments mathématiques nécessaires pour accomplir tous ces gestes lorsqu'il ne les connaît pas.

Les relations entre cette description et les autres études

Nous allons maintenant réexaminer les travaux présentés antérieurement en adoptant ce point de vue anthropologique.

Ruhama Even

La plupart des catégories présentées par Even pour caractériser le SMK sont présentes dans cette nouvelle description. Par exemple, la première rencontre avec une OM rejoint les différentes façons d'approcher un concept, le répertoire de base et les différentes représentations entrent dans la construction du bloc pratique, la force du concept fait partie de la justification sociale pour étudier le concept. Cependant, l'analyse des mathématiques pour l'enseignement basée sur l'étude des tâches des professeurs quand il planifie une OM est plus systématique et donne donc une structure aux catégories d'Even.

Deborah Ball et son groupe de recherche

Ball et ses collègues présentent une liste de gestes que les professeurs doivent faire dans la pratique de la classe, de façon à « décortiquer » les connaissances mathématiques. Nous allons voir comment ces gestes peuvent être analysées d'un point de vue anthropologique.

Un des gestes des professeurs considérés par Ball et al. (2004) consiste à analyser les méthodes utilisées par les élèves mais qu'ils ne connaissent pas, afin de décider si elles sont valables, non seulement pour la tâche proposée aux élèves mais pour toutes les tâches du même type. Cette compétence renvoie à la connaissance de plusieurs techniques pour accomplir une tâche, et à la connaissance des technologies et théories qui permettent d'expliquer ces techniques.

Ball et ses collègues affirment aussi qu'un professeur doit être capable de sélectionner des définitions mathématiquement appropriées. Ils ajoutent : « Cependant, un critère additionnel pour une 'bonne' définition mathématique est de savoir si elle est utilisable par les élèves d'un certain niveau » (2004 :58). Dans ce cas le contenu est un concept et le professeur doit être capable de choisir une définition pour ses élèves. Ball et al. (2004) mentionnent deux contraintes, la définition doit être à la fois correcte et utilisable par les élèves, qui rejoignent les deux contraintes identifiées par Chevallard (1999), non seulement pour les définitions mais encore pour d'autres aspects du bloc théorique d'une OM, par exemple les démonstrations : le bloc théorique doit être à la fois mathématiquement acceptable et compréhensible pour les élèves d'un certain âge et d'un certain niveau scolaire.

Ball et al. (2004) donnent l'exemple de la multiplication des décimaux (type de tâche) à partir de l'analyse de l'exemple suivant : 1,3x2,7. Analysons cet exemple d'un point de vue anthropologique. Il existe un algorithme pour ce type de tâche : effectuer la multiplication 13x27 et placer la virgule en comptant deux cases à partir de la droite. Il s'agit donc d'une technique associée à ce type de tâche. Ils expliquent ensuite que les professeurs devraient être capables d'analyser les réponses erronées de leurs élèves en leur expliquant ce qui est erroné et en utilisant différentes représentations pour donner du sens à cet algorithme. Ces explications et ces représentations, destinées à expliquer les techniques et leurs déviations possibles, sont du niveau de la technologie. Cet article ne mentionne pas le niveau de la théorie, qui dans ce cas pourrait être la connaissance des systèmes de numération, et en particulier du système de numération décimale, de façon à expliquer pourquoi cet algorithme fonctionne. En fait ce niveau théorique n'est pas compréhensible pour des élèves de l'école primaire, et c'est probablement pour cette raison qu'il n'est pas l'objet de cet article.

Ce qui se passe en pratique, c'est que les professeurs connaissent l'algorithme de la multiplication (technique), et peuvent avoir étudié le système de numération décimale dans des cours de mathématiques supérieurs (théorie)[5], mais un lien manque cependant : comment utiliser la théorie pour produire une explication au niveau technologique qui soit à la fois mathématiquement acceptable et compréhensible pour les élèves ? C'est ce que Ball et ses collègues appellent 'décortiquer' (unpacking) et que nous pourrions classifier de discours technologique. La notion de 'décortiquer' renvoie à une analyse du discours technologique des enseignants à l'école primaire.

Jill Adler et le projet Quantum

Le projet Quantum montre que, dans les cours de formation de professeurs en Afrique du Sud, les connaissances mathématiques privilégiées dans les tâches d'évaluation sont des mathématiques 'compressées'. Ils nous donnent l'exemple d'une des quelques tâches analysées qui requiert des futurs enseignants qu'ils 'décortiquent' une technique (2006 : 16).

> Pour résoudre l'équation $ax + b = cx + d$, nous faisons des choses dans les deux membres de l'équation qui peuvent être 'défaites' (si on le souhaite).
>
> (a) Faites une liste des choses que l'on fait et qui peuvent être défaites.
>
> (b) Il faut faire très attention à l'un de ces pas car, suivant les valeurs de *a* et de *b*, on peut obtenir quelque chose qui n'a pas de sens. Expliquez.

Il existe une technique pour résoudre ce type d'équation, que les professeurs doivent être capables d'appliquer. Cependant, ce qu'on demande aux futurs professeurs dans cette tâche c'est de 'décortiquer' cette technique, en donnant des explications au niveau technologique. Ici aussi la notion de décorticage peut être vue comme faisant partie du discours technologique.

Conclusion et discussion

Dans cet article, nous avons montré comment les connaissances mathématiques dont un professeur de mathématiques a besoin pour enseigner ont été décrites par plusieurs éducateurs mathématiques, sur la base de la distinction faite par Shulman entre SMK et PCK et sur l'argument que les professeurs doivent développer des connaissances mathématiques propres à l'enseignement de cette discipline. Cette analyse a été faite à la lumière de la théorie anthropologique du didactique de Chevallard, en regardant les gestes du professeur de mathématiques quand il construit une organisation didactique pour enseigner une organisation mathématique à des étudiants spécifiques dans une institution donnée. Elle nous conduit à remettre en cause cette

[5] La plupart des professeurs de l'enseignement primaire n'ont pas fait d'études supérieures en mathématiques et ne connaissent probablement pas les explications théoriques de certaines techniques.

distinction entre connaissances 'purement mathématiques' (SMK ou CCK) et connaissances mathématiques dirigées vers l'enseignement. Il est difficile de définir les connaissances 'purement mathématiques' car les mathématiques ne vivent pas dans le vide mais dans des institutions. Dans les institutions de formation de professeurs, les mathématiques devraient vivre d'une façon spécifique, orientées vers l'enseignement de cette discipline. Cette observation rejoint la critique faite par Freudenthal (1985) à l'occasion de la première présentation par Chevallard de la théorie de la transposition didactique (Chevallard, 1985), dans laquelle il questionne la notion de *savoir savant* comme source du processus de transposition.

Pendant la construction d'une organisation didactique pour enseigner une OM dans une certaine institution, les professeurs utilisent comme 'organisation mathématique de référence' ce qu'ils ont appris sur cette OM dans les institutions où ils l'ont rencontrée : écoles, université, étude de livres de mathématiques. Cette OM de référence varie d'un professeur à l'autre. Par exemple, pour un enseigant mozambicain du secondaire, l'OM de référence des limites de fonctions a essentiellement deux composantes : des calculs algébriques et des démonstrations formelles à partir de la définition ε-δ. Pour un professeur d'un autre pays, cette OM de référence pourra être plus élaborée et inclure, par exemple, l'usage des registres numériques et graphiques. L'OM de référence d'un professeur mozambicain lui permet d'enseigner les limites de fonctions à l'école secondaire au Mozambique en suivant le programme mozambicain et les routines institutionnelles. Cela ne lui permet pas de remettre en cause la relation institutionnelle à ce concept et les routines correspondantes (Huillet, 2007). Ainsi nous pourrions séparer la question des connaissances des professeurs de mathématiques en deux questions :

Quels types de connaissances doit avoir un professeur de mathématiques pour enseigner une organisation mathématique à des élèves d'une institution donnée en accord avec la relation institutionnelle (en étant un 'bon sujet' de l'institution)?

Quels types de connaissances doit avoir un professeur de mathématiques pour enseigner une organisation mathématique à des élèves d'une institution donnée en remettant en cause la relation institutionnelle ?

Répondre à la deuxième question est évidemment plus compliqué que de répondre à la première, mais dans les deux cas nous avons besoin d'une description détaillée des connaissances mathématiques nécessaires aux enseignants, les *mathématiques pour l'enseignement*. Décrire ces connaissances n'est pas aisé, parce que la tâche du professeur est très complexe et demande de nombreuses compétences pour organiser les contenus au moment de la planification d'une organisation didactique, la mettre en œuvre dans une classe et évaluer les étudiants. Cet article est une contribution à cette description, mais il reste encore beaucoup à faire.

Bibliographie

Adler, J., & Davis, Z. (2006). Opening another black box: Researching mathematics for teaching in mathematics teacher education. *Journal for Research in Mathematics Education 36*(4), 270-296.

Ball, D., Thames, M., & Phelps, G. (2007). Content Knowledge for teaching: What Makes it Special? (consulté le 20 novembre 2007), http://www-personal.umich.edu/~dball/papers/ BallThamesPhelps_ContentKnowledgeforTeaching.pdf

Ball, D., Bass, H., & Hill, H. (2004). Knowing and using mathematical knowledge in teaching: learning what matters. In A. Buffler & R. Laugksch (Eds.). *Proceedings of the 12th Annual Conference of the SAARMSTE*. Le Cap, Afrique du Sud: SAARMSTE, 51-65.

Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). Sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques 19* (1), 77-123.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 1. Structures & fonctions. In J-L. Dorier, M. Artaud, R. Berthelot & R. Floris (Eds.) *Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques*, Version électronique du cédérom d'accompagnement. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théories anthropologiques du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques 19*(2), 221-265.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique - du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Davidowitz, B. & Rollnick, M. (2005). Learning organic chemistry is like learning to drive a car: how a lecturer's PCK improved student performance. In C. Kasanda, L. Muhammed, S. Akpo. & E. Ngololo (Eds). *Proceedings of the 13th Annual Conference of the SAARMSTE*. Windhoek, Namibie: SAARMSTE, 154-164.

Even, R. (1993). Subject-Matter Knowledge and Pedagogical Content Knowledge: Prospective Secondary Teachers and the Function Concept. *Journal for Research in Mathematics Education 24*(2), 94-116.

Even, R. (1990). Subject Matter Knowledge for Teaching and the Case of Functions, *Educational Studies in Mathematics 21*, 521-544.

Freudenthal, H. (1986). Book Reviews. *Educational Studies in Mathematics 17*(3), 323-327.

Hill, H. (2007). Mathematical Knowledge of Middle-School Teachers: Implications for the No Child Left behind Policy Initiative. *Educational Evaluation and Policy Analysis 29*(2), 95-104.

Hill, H, Rowan, B., & Ball, D (2005). Effects of Teachers Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal 42*(2), 371-406.

Huillet, D. (2007). *Evolution, through participation in a research group, of Mozambican Secondary School teachers' personal relation to limits of functions*. Thèse. Johannesbourg: Université du Witwatersrand.

Jita, L. & Ndlalane, T. (2005). Teachers' knowledge of science and pedagogy: content representations of energy and work in physical sciences. In C. Kasanda, L. Muhammed. S. Akpo. & E. Ngololo (Eds). *Proceedings of the 13th Annual Conference of the SAARMSTE*. Windhoek, Namibie: SAARMSTE, 295-305.

Proulx, J. (2007). Addressing the issue of mathematical knowledge of secondary mathematics teachers. In J. Woo, H. Lee, K. Park & D. Seo (Eds). *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Séoul, Corée du Sud, Vol. 4, 89-96.

Shulman, L. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review 57*(1), 1-22.

Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher 15*(2), 4-14.