

(RE)MODÉLISATION DE DÉCORS GÉOMÉTRIQUES : L'EXEMPLE DE LA MOSAÏQUE ANTIQUE

PARZYSZ* Bernard

Résumé – Une recherche en cours sur le long terme, ayant pour finalité de retrouver les connaissances et les gestes professionnels des artisans de l'Antiquité qui ont réalisé les mosaïques à décor géométrique, menée conjointement avec des archéologues spécialistes, est ici présentée, en prenant appui sur un exemple. Ce type de recherche peut être étendu à d'autres domaines et époques, et il peut également être décliné au niveau du collège, dans le cadre d'EPI faisant intervenir au moins mathématiques, histoire et arts plastiques.

Mots-clés – mosaïque, modélisation, géométrie, collège, EPI.

Abstract – An ongoing long-term research, the aim of which is to uncover the knowledge and professional gestures of the antique craftsmen who carried out mosaics with geometric patterns, undertaken together with archaeologists specialists of the domain, is presented here and illustrated with an example. Such a research can be extended to other domains and periods, and it can also be applied to high school teaching as a multidisciplinary work involving at least mathematics, history and plastic arts.

Keywords – mosaic, modelling, geometry, high school, multidisciplinary.

[Il libro dell'Universo] è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi ed altre figure geometriche, senza i quali mezi è impossibile intenderne umanamente parola; senza questi è un aggirarsi vanamente per un oscuro laberinto.

Galilée, *Il Saggiatore* (1623)

Cette science ridicule a pour objet des surfaces, des lignes et des points, qui n'existent pas dans la nature. (...) La géométrie, en fait, n'est qu'une mauvaise plaisanterie.

Voltaire, *Jeannot et Colin* (1764)

Le but de cet article est double : d'une part, présenter une recherche au long cours articulant géométrie et archéologie du décor, et d'autre part proposer la prise en compte, au niveau du collège, d'un type de projets interdisciplinaires dans lequel interviennent tour à tour, et sont articulés les uns avec les autres, des réalisations appartenant au domaine des arts appliqués, des procédures de construction relevant de la géométrie instrumentée et les modèles correspondants en géométrie euclidienne.

I. PRÉSENTATION DE LA RECHERCHE

Cette recherche, débutée il y a maintenant plus de dix ans, est partie du constat que les mosaïstes antiques ont réalisé des pavements à décor « géométrique » qui sont parfois de véritables chefs d'œuvre. Même si jusqu'ici ces réalisations n'ont que très peu intéressé les archéologues spécialistes de mosaïque, faute d'outils pour les étudier, elles méritent mieux que le sort qui leur est habituellement réservé. Il existe bien un ouvrage de référence recensant les décors [Balmelle *et al.*, 1985], au demeurant d'une grande utilité, mais pour chaque décor recensé il se cantonne à un dessin accompagné d'une description. Or, une question essentielle, pour un historien des sciences et des techniques, est celle de la façon dont ces décors ont pu être obtenus à l'aide des instruments, des connaissances, des techniques et des conditions de travail de l'époque. Aucun écrit contemporain ne nous est malheureusement parvenu sur les

^{1*} Université d'Orléans & Laboratoire de Didactique André Revuz - France

savoirs et les savoir-faire antiques mis en œuvre dans ce domaine, et les seuls documents dont nous disposons sont en fait les mosaïques elles-mêmes. La situation est d'ailleurs sensiblement la même pour d'autres types de décors – notamment la peinture, la pierre et le stuc – antiques mais aussi médiévaux, auxquels ce qui suit peut également être appliqué *mutatis mutandis*.

L'idée de départ est qu'un panneau de mosaïque à décor « géométrique » est l'aboutissement, sous une forme particulière – un assemblage de petits fragments taillés de pierre, de céramique ou de verre (les *tesselles*) – d'un dessin réalisé sur place au seul moyen d'un cordeau, et éventuellement d'une règle et d'une équerre. On se situe donc dans le cadre de la géométrie instrumentée, une géométrie « pratique » dans laquelle les objets en jeu sont des tracés réalisés à l'aide de certains instruments, la problématique étant celle de la précision et la validation étant essentiellement d'ordre perceptif (le « coup d'œil »), éventuellement instrumenté. Cette idée s'appuie sur le fait que des tracés préparatoires dessinés, peints ou incisés ont parfois été retrouvés sous des mosaïques, comme à Besançon², mais leur caractère exceptionnel – lié en partie au fait que par le passé on n'y prêtait pas attention – fait qu'ils ne peuvent être que d'une utilité très marginale pour la détermination de ces modèles. Précisons qu'il ne faut pas confondre les lignes directrices, d'un décor qui ont pour fonction de guider la mise en place de la structure conçue par le maître d'œuvre (le *pictor*), avec les tracés préparatoires, qui sont destinés à guider la pose des tesselles par l'ouvrier.

Au départ il s'agissait donc, à partir d'une étude des seuls documents disponibles – à savoir les mosaïques elles-mêmes – d'essayer de déterminer la géométrie des modèles ayant servi à les réaliser afin de pouvoir en proposer des procédures de construction, en rapport avec l'appréhension séquentielle de R. Duval :

Il y a un ordre de prise en compte des unités figurales qui entrent dans la construction d'une figure. Cet ordre dépend des propriétés mathématiques à représenter et des contraintes techniques des instruments utilisés. ([Duval 1994], p. 125)

Il fallait pour cela entreprendre une étude fine des documents car

les relations constitutives des objets ne sont pas des propriétés dont la présence peut être décidée d'un simple coup d'œil, la visualisation ne permettant, pour les relations entre deux unités figurales, qu'une estimation perceptive sujette à illusion. » ([Duval 2005], p. 15)

Ce faisant, on pouvait également espérer en tirer des renseignements sur les connaissances et les techniques mises en œuvre, qui se transmettaient essentiellement oralement de maître à apprenti, comme en témoignent certains graffitis retrouvés sur des sites antiques [Parzys, à paraître].

II. ÉTUDE D'UN EXEMPLE

Considérons ce panneau de mosaïque des Grands Thermes du Nord de Timgad (Algérie)³, daté du 2^e siècle de notre ère (fig. 1 A). Il ne s'agit pas ici d'étudier le groupe de symétrie de ce décor – ce qui serait totalement anachronique – mais, en quelque sorte, de se mettre dans la peau d'un mosaïste antique expérimenté qui, mis en présence de cette mosaïque et souhaitant la reproduire ailleurs, voudrait l'étudier dans le but de l'inclure dans son « catalogue »

² [Chantreaux *et al.*, 2017], pp. 284-289.

³ [Germain, S., 1973], pl. LXXXV.

personnel de motifs⁴, et pour cela y repérer des répétitions et des figures géométriques connues.

1. Analyse.

La géométrie du modèle ayant servi à la construction de ce panneau présente *a priori* une certaine complexité ; on peut y identifier des cercles, des carrés de deux tailles et des losanges, ainsi que des motifs qui se répètent. En poursuivant l'observation, on peut considérer que le champ est carré et on s'aperçoit qu'il est constitué d'un assemblage de 9 modules identiques (3×3), deux modules voisins étant disposés en miroir par rapport à leur côté commun (fig. 1 B).

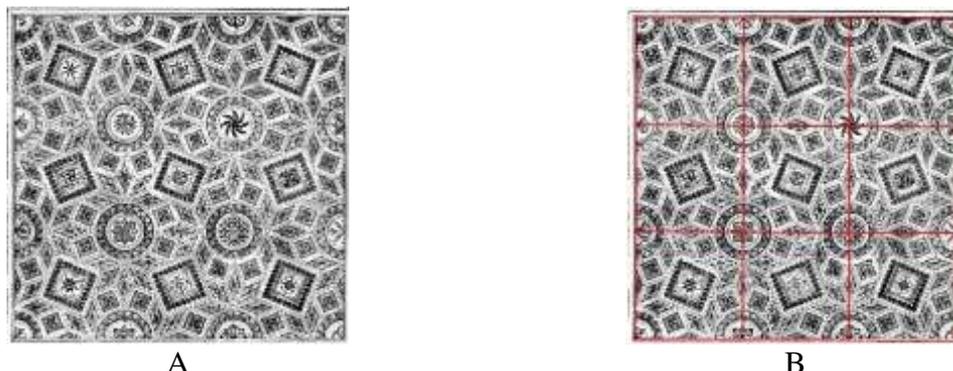


Figure 1 – Mosaïque de Timgad

Le module unitaire, carré, est composé, aux angles, de 4 quarts de cercles tangents à un motif central constitué de la réunion de deux carrés (fig. 2 A), dont les sommets sont ceux d'un octogone régulier inscrit dans le carré initial⁵ (fig. 2 B). Les petits carrés situés aux angles de ce motif résultent des parallèles menées par les intersections des carrés aux côtés de l'un des deux (fig. 2 C). Enfin, les côtés du carré central sont parallèles à ceux du second carré, leurs milieux étant les sommets des petits carrés les plus proches du centre (fig. 2 D).

De nos jours, ces propriétés peuvent être testées – directement ou sur un document fiable – soit manuellement aux instruments, soit à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

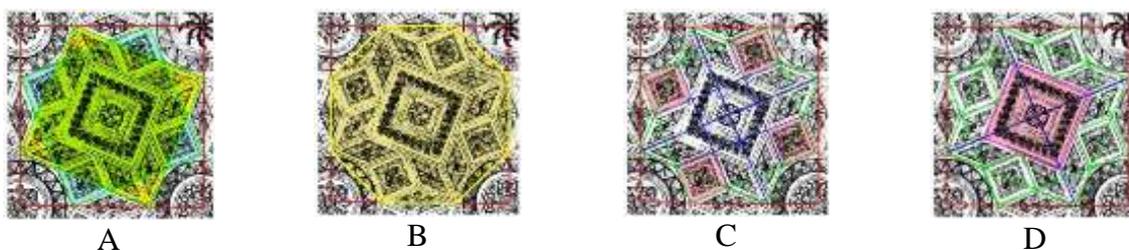


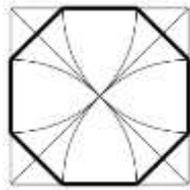
Figure 2 – Timgad : éléments du module

Le *pictor* a pu, au passage, reconnaître deux schémas-clés très répandus, qu'il connaît : l'octogone régulier inscrit dans un carré et l'« étoile de deux carrés »⁶ (fig. 3) qui, réalisés dans cet ordre, l'aideront à mémoriser le module.

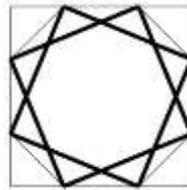
⁴ La question de l'existence de cahiers de modèles fait toujours débat parmi les spécialistes. Pour ce qui est des décors géométriques, je pense que la connaissance des constructions élémentaires et de quelques « schémas-clés » faciles à mémoriser (Parzys, 2009) permettrait de se dispenser d'aide-mémoires matériels.

⁵ Le motif de l'octogone régulier inscrit dans un carré étant très courant, et sa construction devait faire partie du bagage de base de tout mosaïste.

⁶ Selon la terminologie de référence chez les archéologues spécialistes.



octogone régulier



étoile de deux carrés

Figure 3 – Timgad : les deux schémas-clés

2. Procédure

L'étude précédente conduit à une procédure, instrumentée au cordeau, d'obtention du module à partir du carré dans lequel il s'inscrit :

- 1) Tracé des diagonales du carré.
- 2) Tracé des sommets de l'octogone régulier inscrit dans le carré.
- 3) Tracé des deux carrés constituant le motif étoilé.
- 4) Tracé des 4 carrés d'angle.
- 5) Tracé du carré central.
- 6) Tracé des quarts de cercles des angles.

N.B. La phase 6 peut intervenir après la phase 3.

On peut alors constater *de visu*, et si besoin aux instruments, que l'ensemble des tracés correspond bien aux observations faites au début de l'étude.

3. Validation

La procédure ci-dessus se décline terme à terme en une construction de géométrie euclidienne, effectuée à partir de la donnée d'un carré. Dans ce paradigme – le paradigme G2 de Houdement & Kuzniak (2006) –, pour valider cette construction par rapport aux assertions de l'étude initiale, il est alors nécessaire de répondre à un certain nombre de questions, telles que :

- Obtient-on bien des carrés ? Des losanges avec des angles aigus de 45° ?
- Les points obtenus au 2° sont-ils les sommets d'un octogone régulier ?
- Les deux quadrilatères du 3° sont-ils des carrés ? Et ceux du 4° ? Et celui du 5° ?
- Les autres quadrilatères sont-ils des losanges avec des angles aigus de 45° ?

Bien évidemment, ce genre de questionnement n'était pas celui du mosaïste antique, mais il se pose à celui qui, de nos jours veut accéder, non plus seulement au *comment*, mais au *pourquoi*, par exemple pour savoir si une construction est exacte ou approchée (et dans ce cas à combien près), ou pour comparer deux constructions différentes d'un même motif. La problématique de la géométrie euclidienne est celle de la *conformité* aux théorèmes et aux règles de la démonstration, tandis que celle du praticien est, conjointement avec celle de la *précision*, celle de l'*économie* : pour lui, lorsque deux constructions produisent des résultats difficilement discernables, elles se valent, et il aura tendance à privilégier la plus simple

En illustration, voici une seconde procédure – dite « cavalière » – elle aussi instrumentée au cordeau, du module de Timgad (fig. 4 B), qu'on peut comparer à la précédente⁷ (fig. 4 A) :

- 1) Subdivision des côtés du carré en 10 (par essais successifs) (voir Annexe).

⁷ Cette seconde construction n'est pas une vue de l'esprit : un nombre important de décors géométriques sont construits sur un réseau carré à l'aide de la « diagonale du cavalier » – en référence à la pièce du jeu d'échecs –, c'est-à-dire la diagonale d'un carré dont la longueur est double de la largeur [Parzysz, 2012].

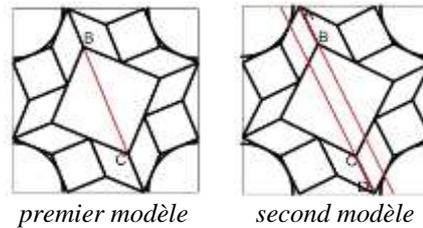


Figure 6 – Timgad : comparaison d'alignements

C'est alors une convergence d'indices qui orientera vers un modèle ou vers un autre : soin apporté dans la mise en place des détails du décor, caractère systématique ou non des écarts observés, etc.

Comme on le voit, les finalités de ce type de recherche sont multiples :

- identifier le modèle le plus vraisemblablement mis en œuvre par le mosaïste, grâce à l'identification d'éléments géométriques et de propriétés (l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique s'y avère précieuse) ;
- concevoir une procédure de mise en place *in situ* de ce modèle, avec les techniques et les instruments en usage à l'époque (cordeau, règle non graduée¹⁰, équerre) ;
- en induire des connaissances, des techniques et des savoir-faire mis en œuvre ;
- établir des parentés de structure géométrique entre diverses mosaïques, de façon à identifier des familles de décors reposant sur un même principe ou une même configuration ;
- aider les restaurateurs de mosaïques anciennes dans leur travail, en leur permettant de compléter les lacunes sous la forme qui leur semble la plus appropriée.

III. PROPOSITIONS POUR UNE UTILISATION AU COLLÈGE

Par rapport au cycle de modélisation (fig. 7) de Blum & Leiss (2005), dans l'enseignement secondaire la tâche qualifiée de « modélisation » consiste le plus souvent à appliquer un modèle connu à une situation « réelle », cette situation étant déjà en fait elle-même très fréquemment un modèle réel, obtenu en conférant un habillage pseudo-concret à une situation relevant d'un modèle mathématique bien identifiable.

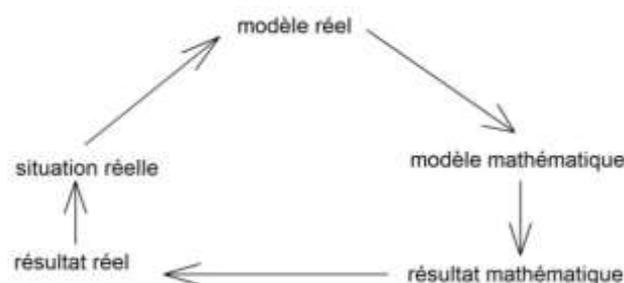


Figure 7 – Cycle de modélisation d'après Blum & Leiß

La tâche de l'élève consiste alors 1° à traduire les éléments de la situation (données, question) en un problème du modèle, 2° à résoudre le problème dans ce modèle, et 3° à traduire la solution en une réponse à la question initiale. La première partie de la démarche est

¹⁰ Le système de numération romaine et la complexité du système de mesures discréditaient de fait l'utilisation de la règle graduée ; l'opération de base était le report de longueur, associée à des techniques très simples et très efficaces.

alors escamotée, au motif bien intentionné qu'une « vraie » situation réelle serait trop complexe à gérer par les élèves concernés.

Cependant, dans le cas de la mosaïque, la « situation réelle » existe bel et bien : c'est l'objet-mosaïque lui-même ; et le « modèle réel » est celui qui a été mis en œuvre par le mosaïste antique pour le réaliser. On peut par exemple, engager la classe dans un travail collectif de recherche pluridisciplinaire ayant pour but la reproduction en vraie grandeur, par exemple sur une dalle de béton¹¹ et à l'aide de craies de couleur, du décor d'un pavement de mosaïque antique. Pour cela, on fournit aux élèves des documents photographiques du panneau et, si possible, sous la forme d'un fichier d'un logiciel de géométrie de type Cabri ou Geogebra, un cliché orthogonal de la mosaïque inséré dans un rectangle. On leur propose alors de :

- 1° décrire la mosaïque (ou un motif de celle-ci) ;
- 2° ne retenir – en les nommant et en les caractérisant de façon aussi précise que possible – que les éléments géométriques qui selon eux permettront de la reproduire, à l'exclusion des éléments jugés purement décoratifs (fleurons, remplissage, etc.) ;
- 3° repérer des propriétés (alignements de points, égalités de longueurs, perpendicularités, points sur un même cercle...) permettant de situer les éléments retenus les uns par rapport aux autres ;
- 4° rédiger, sous la forme d'un algorithme, une procédure de construction du décor à partir de son cadre extérieur¹², à l'aide de droites et de cercles ;
- 5° à l'aide du logiciel, la réaliser à l'écran ;
- 6° au sol, tracer le cadre, puis le décor, en vraie grandeur à l'aide d'un cordeau, d'une règle non graduée et d'une équerre ;
- 7° comparer les résultats obtenus avec le document original.

La figure 8 A représente une mosaïque découverte à Autun (Saône-et-Loire) au début du 19^e siècle et disparue depuis, qui n'est connue que par un dessin d'époque. En 2014, aidé d'une assistante, j'ai reproduit expérimentalement le décor en vraie grandeur à la craie sur une dalle de béton (fig. 8 B), en utilisant uniquement une règle de bois (non graduée), un cordeau et une équerre fabriquée sur place. L'excellente précision du résultat obtenu avec un outillage aussi fruste m'a surpris.



A- dessin de 1836



B- épure au sol

Figure 8 – Mosaïque perdue d'Autun (milieu du 3^e siècle)¹³

D'autre part, des insuffisances et des incompatibilités apparaîtront sans doute lors des contrôles opérés au cours des essais de construction, qui seront l'occasion d'une réflexion

¹¹ À défaut, on peut utiliser un assemblage de grandes feuilles de papier fixé au mur.

¹² Le *pictor* devait le plus souvent, en effet, intégrer son décor dans une surface aux limites prédéterminées, soit par les murs de la pièce, soit par les panneaux voisins..

¹³ [Stern & Blanchard-Lemée 1975], pl. XLVIII.

ayant pour objet de résoudre ces problèmes, la comparaison finale permettant de prendre conscience des imprécisions inhérentes au passage de la géométrie à l'objet matériel et de discuter du degré d'approximation « tolérable » dans la réalisation.. Lorsque des procédures différentes seront en concurrence, on les comparera afin de décider si elles produisent, ou non, la même configuration. Et, finalement, on discutera de celle qui sera finalement retenue par l'ensemble de la classe.

Dans cette démarche (fig. 9), le 1° concerne la situation réelle, tandis que le 2° et le 3° se situent dans le modèle réel (G1), où est opérée une certaine abstraction par rapport à l'objet matériel dans un but déterminé : la reproduction. Il faut donc prendre en compte le fait qu'une mosaïque est en quelque sorte un dessin « pixelisé », les pixels étant ici les tesselles, petits fragments minéraux colorés qui la constituent. En particulier, le remplissage décoratif des surfaces, les couleurs, ainsi que l'épaisseur des traits (généralement constitués d'un ou deux rangs de tesselles) sont provisoirement « oubliés ».

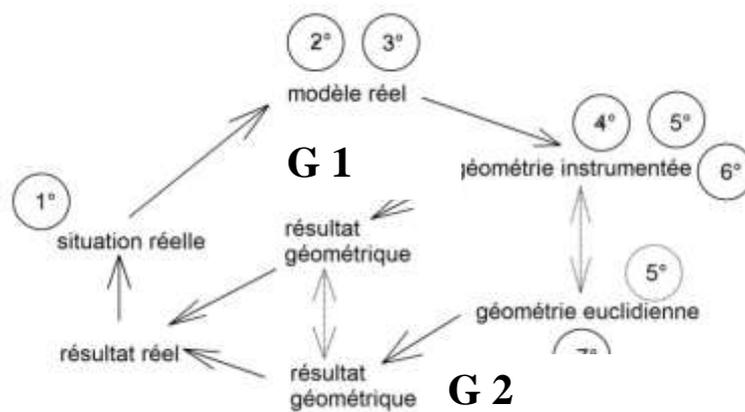


Figure 9 – Adaptation du cycle initial

Le 4° et le 5° amènent les élèves dans le modèle de la géométrie instrumentée (règle et compas, sous forme matérielle ou logicielle), tandis que le dialogue avec le logiciel permet de tester des conjectures perceptives, et le cas échéant de passer dans la géométrie euclidienne (G2), objectif important de l'enseignement de la géométrie au collège.

Quant au 6°, il les confronte aux contrôles instrumentés dans le méso-espace (Berthelot & Salin, 1992), qui permettent d'appliquer en acte des théorèmes de géométrie euclidienne. Par exemple, le tracé au sol du cadre rectangulaire amène à mettre en œuvre, selon la définition qui aura été choisie, la perpendicularité et/ou le parallélisme, dont la réalisation est peu précise mais qu'un contrôle par les diagonales permettra éventuellement de corriger.

Enfin, le 7° pourra être l'occasion de (re)passer dans la géométrie euclidienne pour s'attaquer à des questions auxquelles la seule perception ne permet pas de répondre à coup sûr, et/ou résoudre des contradictions entre le modèle et ses réalisations, et permettra de déboucher sur une institutionnalisation « vécue ».

Une telle démarche s'inscrit tout à fait dans le cadre des enseignements pratiques interdisciplinaires (EPI) institués par les nouveaux programmes français pour le collège¹⁴ (élèves de 11 à 15 ans) :

Mobilisant au moins deux disciplines, ils permettent de construire et d'approfondir des connaissances et des compétences inscrites dans les programmes d'enseignement. Ils s'appuient sur une démarche de projet et conduisent à une réalisation concrète, individuelle ou collective.

14

<http://eduscol.education.fr/cid108061/epi-mise-en-oeuvre.html>

Dans le cadre d'un tel travail on peut faire intervenir conjointement au moins trois disciplines : les mathématiques (géométrie), l'histoire (Antiquité) et les arts plastiques (décor) ; le projet étant ici de réaliser en vraie grandeur le dessin d'une mosaïque, certaines d'entre elles, de très grande taille, sont constituées de panneaux à motifs différents (cf. par exemple [Parzysz, 2013]), permettant ainsi un travail réparti sur plusieurs groupes.

IV. CONCLUSION

On peut noter que la modélisation qu'implique une telle démarche est en fait une re-modélisation, puisqu'elle consiste en la recherche du modèle conçu par le *pictor*, modèle qu'il a ensuite matérialisé sous la forme de lignes directrices et qui a enfin été « pixellisé » en une surface couverte de petits fragments minéraux colorés, constituant la seule trace matérielle du modèle qui nous soit parvenue.

La recherche présentée ici permet, en premier lieu, d'apporter une aide à l'archéologue qui se trouve souvent démunie, au moment de la publication, pour décrire les décors des mosaïques qu'il/elle a mises au jour, la terminologie « officielle » n'étant pas suffisamment précise¹⁵. L'identification du modèle géométrique mis en œuvre par l'artisan antique permet non seulement une description adéquate de l'œuvre, mais ouvre aussi la voie à la recherche d'une procédure de mise en place qui fournira à l'historien des sciences et des techniques, en l'absence de tout document écrit, des informations sur les connaissances géométriques et les savoir-faire techniques de cet artisan. Enfin, dans le cas – fréquent – où la mosaïque ne nous est pas parvenue dans son intégralité, elle pourra également être utile pour en restituer les lacunes. Elle peut aussi, bien sûr, être – et elle l'a été – étendue à d'autres types de décors, ainsi qu'à d'autres époques.

On peut en outre décliner cette recherche dans l'enseignement, notamment au niveau du collège, en proposant des projets dans le cadre des EPI. L'intérêt pour les mathématiques est alors de faire parcourir aux élèves la totalité du cycle de modélisation géométrique à partir d'objets matériels, et en particulier de faire jouer à la géométrie euclidienne un rôle de « juge de paix » lorsque les contrôles perceptifs et instrumentés se révèlent insuffisants.

Enfin, ce texte est un appel aux chercheurs en histoire des sciences, qui peuvent trouver ici un champ encore peu exploité et original qui, bien que ne concernant pas la géométrie « savante » et ne reposant sur aucun document écrit, est susceptible d'enrichir notre connaissance de la science antique et médiévale.

RÉFÉRENCES

- Alberti M. (2013). *La créativité en mathématiques. Fonctionnement d'un esprit d'exception*. Coll. Le monde est mathématique. Paris : RBA France.
- Balmelle C. et al. (1985) *Le décor géométrique de la mosaïque romaine* (2 vol.) Picard, Paris.
- Berthelot R. & Salin M.-H. (1992) *L'enseignement de l'espace et de la géométrie dans l'enseignement obligatoire*. Thèse. Bordeaux : Université Bordeaux I.
- Blanchard-Lemée M. (1979) *Maisons à mosaïques du quartier central de Djemila (Cuicul)*. Paris : Ophrys.
- Blum W. & Leiß, D (2006) An introduction to mathematical modelling: an experiment with students in economics. *Proceedings of the 4th Congress of European Research on Mathematics Education*, 1623-1633. Barcelona: Universitat Ramon Llull.

¹⁵ Par exemple, dire qu'un hexagone est « irrégulier » ou « oblong » ne renseigne guère sur sa forme exacte.

- Chantriaux E., Hayes M., Laporte C., Phoungas A., Simon M. (2017). Dispositifs techniques et gestation de l'œuvre. *Le quartier antique du Palatium et ses domus. Archéologie au collège Lumière à Besançon (Doubs)* (C. Munier, éd.), 1344-1349. Besançon : Presses Universitaires de Franche-Comté.
- Duval R. (1994) Les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique. *Repères-IREM* 17, 121-138.
- Duval R. (2005) Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives* 10, 5-53.
- Germain S. (1973) *Les mosaïques de Timgad. Étude descriptive et analytique*. Paris : CNRS.
- Houdement C. & Kuzniak A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives* 11, 175-193.
- Parzys B. (2009) Key diagrams to design and construct Roman geometric mosaics? *Nexus Network Journal* 11/2, 273-288. Basel : Birkhäuser.
- Parzys B. (2012) Une grande famille de décors géométriques. *Proceedings of the 11th International Colloquium on Ancient Mosaics* (M. Şahin, ed.), 735-748. Istanbul: Zerobooks.
- Parzys B. (2013) La géométrie de la mosaïque de Grand. *Petit Vert* 115, 29-43 & *Petit Vert* 116, 27-33.
- Parzys B. (à paraître) Des rosaces sur un mur : que peuvent-elles nous apprendre sur leurs auteurs ? Une étude de cas. *Actes du 3^e colloque Ductus*. Paris.
- Stern H. & Blanchard-Lemée M. (1975) *Recueil général des mosaïques de la Gaule Lyonnaise* 2. Paris : CNRS.