ÉTUDE DES RAISONNEMENTS MATHÉMATIQUES D'ÉLÈVES DE PREMIÈRE ANNÉE LORS DE LA RÉALISATION D'UNE ACTIVITÉ NÉCESSITANT L'UTILISATION DE MATÉRIEL DE MANIPULATION

JEANNOTTE* Doris –CORRIVEAU** Claudia

Résumé – Dans cette proposition, nous présentons différents moments potentiellement riches en termes de raisonnement mathématiques dans une classe de 1e année du primaire (6-7 ans). Les données ont été recueillies dans le cadre du projet MathéRéaliser, projet qui vise l'étude des pratiques d'utilisation du matériel de manipulation en lien avec les raisonnements mathématiques déployés par les élèves. À partir de l'analyse de d'activité mathématique de deux dyades, on observe les élèves identifier et justifier une régularité, deux processus de raisonnement mathématique. La manière dont le matériel de manipulation est utilisé par les élèves joue alors un rôle clé dans le déploiement de ces deux processus.

Mots-clefs : raisonnement mathématique, matériel de manipulation, primaire, régularité, commognition

Abstract – In this paper, we are presenting different potentially rich moments in term of mathematical reasoning in a grade 1 class (6-7 year's old). The data were collected in the project MathéRéaliser, which goal is to study the uses of manipulative in link with mathematical reasoning of pupils. The analysis of the pupils' mathematical activities helped us identify two processes of mathematical reasoning: identifying and justifying a regularity. The different ways pupils used the manipulatives played a key role in the development of those two processes.

Keywords: mathematical reasoning, manipulatives, elementary level, patterns, commognition

I. RAISONNEMENTS MATHÉMATIQUES ET MATÉRIEL DE MANIPULATION

Au primaire, un allant de soi est que l'utilisation du matériel de manipulation favorisent l'apprentissage en mathématiques (Poirier, 1999; Corriveau et Jeannotte, 2015). Or, quoique certaines recherches montrent un lien entre réussite en mathématique et manipulation (Gürbüz, 2010; Sherman et Bisanz, 2009; Ojose et Sexton, 2009), d'autres apportent un portrait plus nuancé de la situation (ex. Puchner, Taylor, O'Donnell, et Fick, 2008; Carbonneau, Marley et Selig, 2013). Un aspect qui semble très peu étudié est les liens entre le développement de processus de raisonnement mathématique et l'utilisation de matériel (Carbonneau, Marley et Selig, 2013). En effet, comment se caractérisent les raisonnements mathématiques lorsque les élèves utilisent du matériel de manipulation? Le but de cette proposition est d'illustrer comment la réalisation d'une tâche où le matériel est utilisé met en valeur un potentiel riche en termes de raisonnement mathématiques et ce, dès la première année du primaire. Dans ce qui suit, nous exposons d'abord les assises théoriques à propos du raisonnement mathématique. Nous présentons ensuite une activité nécessitant l'utilisation du matériel qui a été réalisée par des élèves de première année et l'analyse du travail des élèves en termes de raisonnement mathématique.

II. FONDEMENTS THÉORIQUES DU CONCEPT DE RAISONNEMENT MATHÉMATIQUE

Nous présentons d'abord la perspective théorique supportant le modèle de raisonnement décrit dans un deuxième temps.

* UQAM – Canada – doris.jeannotte@uqam.ca

** Université Laval – Canada – claudia.corriveau@fse.ulaval.ca

1. Perspective commognitive

Adoptant une perspective commognitive, cette étude s'appuie sur la définition de pensée mathématique suivante : la pensée mathématique est une activité de communication avec d'autres ou soi-même. Sfard (2008) définit la communication comme « a collectively performed patterned activity in which action A of an individual is followed by action B of another individual so that… » (p.87).

Sfard envisage les mathématiques comme activité discursive. Le discours mathématique possède son propre vocabulaire, ses propres médiateurs visuels, ses routines distinctes, ses énoncés généralement acceptés par la communauté mathématique. Le terme discours ne fait pas référence ici qu'aux textes écrits ou parlés, ni aux interactions langagières. Il s'agit de tout acte de communication incluant aussi le langage corporel, les indices contextuels et l'histoire des interlocuteurs. C'est donc dans un mouvement d'individualisation-(re)communication[1], que le discours évolue par des changements de vocabulaire, de routines, de médiateurs visuels et ainsi donc, d'énoncés acceptés.

Les concepts commognitifs de routines et de médiateurs visuels développés par Sfard s'avèrent particulièrement porteur pour notre analyse. Elle définit "routine" (2008, 2012) comme un ensemble de règles métadiscursive qui décrit un pattern d'actions discursives. Ces règles peuvent référer à la manière dont se circonscrit le pattern (**comment** il se circonscrit), et aussi au moment de le mettre en place (**quand** il se met en place). Par exemple, dénombrer des objets se fait via une routine qui peut être parfois décrite par le recours à la comptine en coordonnant le geste au mot-nombre (comment) pour déterminer le cardinal d'une collection et donc répondre à la question « combien y a-t-il de cubes ? » (quand). Selon Sfard, il y a trois types de routines : les actes, les rituels et les explorations. Les actes visent à changer les objets (mathématiques) sans rationnel mathématique. Pour faire un algorithme, un acte peut se révéler lorsque l'élève écrit les nombres dans une même colonne, un en dessous de l'autre. Le rituel est une routine davantage liée à la subjectivité de l'acteur en ce sens qu'elle vise à obtenir l'approbation social. Par exemple, un élève pourrait utiliser un algorithme appris en classe au lieu de celui qu'il préfère car il sait que son enseignant sera content. Enfin, les routines exploratoires (constructives, justificatives ou de rappel) ont pour but de créer de nouveaux énoncés (mathématiques) et se persuader. Lorsque l'élève développe son propre algorithme, il est dans un processus de création d'un nouvel énoncé mathématique qui pourra s'intégrer au discours de la classe.

2. Un modèle de raisonnement mathématique (RM)

Jeannotte (2015), adoptant les fondements commognitifs, définit le RM comme une activité commognitive qui permet d'inférer des énoncés mathématiques à partir d'autres énoncés mathématiques. Ainsi, le RM est un type de routine exploratoire. Organisé en une certaine structure, il est contingenté par des règles discursives et porteur d'une valeur épistémique. Il peut être caractérisé selon deux aspects, l'aspect structurel et l'aspect processuel.

L'aspect structurel réfère à l'agencement d'éléments discursifs en un système ordonné qui décrit à la fois les éléments et les relations qui les unies. Les pas élémentaires (déductif, inductif et abductif) infèrent chacun une conclusion de nature différente.

[1] Selon la théorie commognitive, l'apprentissage débute avec l'individualisation de formes de discours qui proviennent d'une communauté à laquelle on s'identifie (ou qu'on cotoie) puis qui sont (re)communiquées à cette dernière.

L'aspect processuel fait davantage référence à la temporalité du RM, c'est-à-dire au déroulement des actions dans le temps. Jeannotte (2015) définit cinq processus de recherche de similitudes et de différences (généraliser, conjecturer, identifier une régularité, comparer, classer) et trois processus de recherche de validation (justifier, prouver, démontrer). Enfin, un dernier processus vient supporter l'un ou l'autres de ces processus de RM, exemplifier. L'encadré 1 présente deux des définitions qui seront utiles lors de l'analyse.

Identifier **une régularité** : identifier une régularité, en tant que processus de RM, infère un énoncé à propos d'une relation récursive entre différents objets ou relations mathématiques, par la recherche de similitudes et de différences entre ces objets ou relations mathématiques.

Justifier : justifier est un processus de RM qui, par la recherche de données, de permis d'inférer et de fondement mathématique permet de modifier la valeur épistémique d'un énoncé. (Jeannotte, 2015, p. 280-281)

Figure 1 *: deux processus de RM selon Jeannotte (2015)*

III. QUELQUES REPÈRES MÉTHODOLOGIQUES

Cette proposition s'appuie sur les données collectées dans le cadre d'une recherche d'inspiration collaborative (Bednarz, 2013; Desgagné, 2001) avec des enseignants du primaire. Afin de réfléchir aux pratiques d'utilisation de matériel en classe de mathématiques, des *rencontres réflexives* ont été organisées avec des enseignants de chacun des cycles du primaire. Dans ces rencontres, des tâches impliquant du matériel de manipulation ont été proposés aux enseignants afin de discuter de leur mise en œuvre en classe, des modifications nécessaires pour l'adapter au niveau de la classe, du rôle du matériel et d'interventions possibles. Ces activités ont ensuite été expérimenté en classe.

Dans le cas particulier qui nous intéresse, une rencontre de planification avec des enseignants du premier cycle du primaire[2] a permis de réfléchir à la mise en œuvre de trois activités dont celle de la fabrique de colliers.

1. *La fabrique de collier*

La fabrique de colliers est une tâche inspirée de Fosnot et Dolk (2010). Dans cette tâche, les enfants sont amenés à produire un modèle de colliers afin de commander les perles nécessaires à la fabrication d'un collier en respectant certaines contraintes : les colliers doivent être composés de deux couleurs de perles, les perles doivent disposer en alternant des groupes de 5, de la même couleur. L'activité se partitionne en trois phases : 1) la réalisation du modèle à l'aide de centicubes (voir figure 2 p. 5); 2) la complétion d'un bon de commande de façon à demander le nombre exact de perles nécessaire à la fabrication du modèle proposé; 3) un retour en grand groupe sur la réalisation des bons de commandes et leur validité.

Le choix de faire faire le collier à l'aide de centicubes n'est pas anodin. Premièrement, les centicubes sont souvent utilisés au premier cycle du primaire pour dénombrer ou encore pour aborder des mesures de longueurs. Lorsqu'emboités, on peut les assembler soit de façon linéaire soit en une forme rectangulaire qui ne peut être fermée. Impossible donc, de réaliser un « vrai » collier. Il y a donc ici un enjeu important, soit la représentation du collier à l'aide d'un modèle linéaire ou rectangulaire.

[2] Au Québec, le premier cycle fait référence aux deux premières années du primaire (6-8 ans).

Un deuxième choix concerne l'alternance des couleurs. Si l'enfant opte pour le modèle linéaire, il devra dégager que le modèle ne peut commencer et se terminer par une série de cinq perles de la même couleur.

Finalement, le choix de faire faire un modèle plutôt que le collier directement est important dans cette activité. En effet, les élèves devront développer des façons de s'organiser pour dénombrer les centicubes et remplir le bon de commande. L'élève pourrait faire appel à la comptine par bond de cinq, au tableau de nombres, à la droite numérique ou à la coordination du geste au nombre pour mener à bien la tâche. Ici, l'enfant qui a opté pour un modèle rectangulaire devra trouver une façon de garder son point de départ pour dénombrer. La validation du bon de commande fait appel à deux autres régularités à savoir que le nombre de perles de chaque couleur doit être un multiple de cinq (donc se terminer par 0 ou 5) et qu'il doit nécessairement y avoir le même nombre de perles de chacune des couleurs.

Spécifions qu'il est aussi nécessaire de tenir compte des autres contextes où les élèves fabriquent des colliers et des routines types associés à cette fabrication. Par exemple, la symétrie est souvent associée à la beauté d'un collier. Or, dans le contexte mathématique de cette tâche, l'élève ne peut directement utiliser les routines développées dans d'autres contextes. Une prise en compte de ces routines dans les interventions des enseignants peut aider les élèves à les dépasser.

2. *La réalisation de l'activité en classe*

Une classe de dix-huit élèves de première année du primaire (6 et 7 ans) a réalisé l'activité. Les trois phases de l'activité ont été faites à l'intérieur d'une période d'à peu près une heure. L'activité a été présenté aux élèves (environ 15 minutes en incluant l'accueil des élèves). Ensuite, en équipe de 2, les élèves ont fabriqué un modèle de colliers et compléter le bon de commande associé (environ 25 minutes). Pour ce faire, les élèves avaient accès à des centicubes de deux couleurs, à un bon de commandes et à toutes les ressources affichées dans la classe (par exemple, tableau de nombres, droite numérique). Durant cette phase, il a été convenu que l'enseignant et la chercheure circulent pour questionner les élèves quant aux différentes contraintes du problèmes. Il y a ensuite eu un retour en grand groupe (environ 15 minutes) dans lequel l'enseignant a mené une discussion à partir d'un bon de commande non valide. L'idée était d'amener les élèves à identifier des régularités et à valider à l'aide d'arguments mathématiques les bons de commandes produits par les enfants de la classe. Durant cette phase, les élèves n'avaient plus accès au matériel. Il a été remplacé par un matériel virtuel accessible via le tableau blanc interactif.

IV. ANALYSE ET RÉSULTATS : LE TRAVAIL EN ÉQUIPE AVEC LE MATÉRIEL

L'analyse présentée ici provient de l'observation de deux équipes. La première (équipe 1) est composée d'Évelyne et Martine alors que la deuxième (équipe 2) est composée de Renaud et Isabelle. Mentionnons d'emblée que les deux équipes ont opté pour un modèle linéaire et que l'alternance des couleurs et la formation de groupes de cinq perles ont été réalisés à l'aide d'actes routiniers dans les deux équipes. De même, le dénombrement des groupes de cinq s'est réalisé en coordonnant le geste au mot-nombre sans aucune difficulté lors de la formation de ces groupes. On pouvait s'y attendre étant donné qu'on était en 1^{e} année au mois de février.

Ensuite, si on regarde le travail en équipe, les deux équipes ont organisé leur travail différemment. Dans l'équipe 1, Evelyne et Martine ont chacune confectionné une partie du collier pour ensuite les raccorder. Dans l'équipe 2, Isabelle et Renaud étaient plutôt chacun responsable d'une couleur. Ils construisaient donc le collier ensemble. Ces deux routines, que les enfants mettent en œuvre, offrent des potentiels différents en termes de RM. En effet, dans l'équipe 1, le fait que chacune travaille sur une partie de collier donne l'occasion d'identifier la couleur nécessaire pour chacun des extrémités du collier puisqu'elles doivent « connecter » leurs deux parties. En se consacrant à une seule couleur, la seconde équipe doit gérer cette contrainte autrement. En effet, en étant responsable chacun de leur couleur, ils doivent s'assurer que leur partenaire a posé leurs cinq centicubes avant de poser les leurs. Or, ceci ne dit rien sur les extrémités, mais peut mener à réfléchir sur la quantité de blocs nécessaires de chacune des couleurs lorsque l'alternance est respectée.

Dans ce qui suit, nous revenons sur trois moments clés qui ont émergé lors du travail en dyade : lien entre l'alternance des couleurs et les extrémités du modèle de collier, le dénombrement des perles à commander et la validation du bon de commande.

1. *Moment 1 : lien entre l'alternance des couleurs et les extrémités du modèle de collier*

Dans l'équipe 1, Martine et Evelyne n'ont pas la même façon de gérer les extrémités du modèle de collier qu'elles construisent chacune de leur côté. De son côté, Martine tente de voir apparaitre des couleurs différentes pour les extrémités de son collier, alors que Evelyne cherche plutôt à faire en sorte que le collier débute et termine par la même couleur. Lorsque Martine cherche à connecter son collier à celui d'Evelyne, la contrainte d'alternance des couleurs est respectée : le collier commence avec cinq cubes roses (du côté de Martine) et se termine par cinq cube blancs (du côté d'Evelyne). Or, lors de cet événement, Evelyne s'exclame: « *Attends, Il manque un petit [bout] rose* » et ajoute donc cinq roses à son extrémité. Martine réagit à l'action d'Evelyne en ajoutant, simultanément, cinq blancs de son côté : « *Ha!! Je vais faire les blancs de l'autre côté* ». Toutefois, Evelyne réagit en remettant cinq nouveaux cubes blancs à son extrémité. En terme commognitif, l'action de Martine (ajouter 5 roses) s'appuie sur ce qu'elle a fait avant en cherchant à garder les deux extrémités de couleur différente. Or la réaction d'Evelyne est guidée par l'opposé, garder les extrémités pareilles.

La chercheuse intervient pour faire valider la construction du collier par cette équipe :

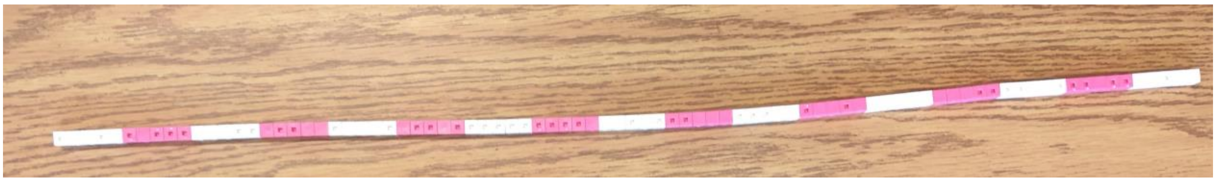

Figure 2 *: Modèle linéaire du collier de Martine et Evelyne*

26. Chercheuse :… Ok. J'ai une question pour vous. Mettons qu'on s'imaginait qu'on fermait le collier (fait le geste avec les mains). Est-ce qu'il y aurait encore juste cinq billes de la même couleur qui se suivent ? Si on le ferme ce collier-là (pointe les deux extrémités, Martine répond oui) ... Qu'est-ce qui va se passer avec les deux bouts (elle tape les doigts sur la table en continuant à pointer les extrémités).
27. Martine : Ben... AHH! Nooonnn.
28. Chercheuse : Donc, qu'est-ce qu'il faudrait faire au collier pour que ça fonctionne ?
29. Martine : Il faudrait enlever [inaudible] blocs (commence à enlever des cubes à une extrémité)
30. Chercheuse Ah, ok, on pourrait faire ça

31. Martine : Comme enlever ça (enlève les cinq cubes blancs à une extrémité)
32. Chercheuse : Est-ce que tu es d'accord (s'adresse à Evelyne qui hoche de la tête sans trop d'assurance, **en rattachant les cubes blancs enlevé par Martine**)
33. Martine : (se dirigeant vers l'autre extrémité) ou en ajouter là (ajoute cinq cubes roses de l'autre côté).
34. Martine : Pour que ça marche (fait des gestes avec les bras pour fermer le collier) ça se ferme comme ça, on amène ça.
35. Chercheuse : Et là est-ce ça va être encore toujours blanc; rose; (fait un tempo lent avec une main en disant la couleur); blanc, rose, blanc, rose. Donc, si ça commence par blanc, ça doit se terminer par quelle couleur?
36. Martine : Rose
37. Chercheuse : Rose. Ok, faites ça, puis ensuite je vais amener votre bon de commande. (Pendant ce temps, Evelyne ajoute cinq rose à son extrémité et le collier débute et se termine donc encore par la même couleur).

La chercheuse revient et intervient plus spécifiquement auprès d'Evelyne qui, comme on le voit dans le passage précédent, remet toujours les mêmes couleurs.

44. Chercheuse : Qu'est-ce qui va se passer Evelyne si je prends les deux bouts. On s'imagine que je prends le collier de perles et je fais une boucle au cou, avec les deux bouts (elle pointe les extrémités avec ses index) ? Si c'est rose et rose au bout, qu'est-ce qui va se passer ?
45. Evelyne : Ça ne sera plus blanc, rose, blanc, rose, blanc, rose, blanc, rose (elle pointe les groupes de cinq perles en suivant un tempo).

On peut penser ici que Martine a mis en place une *exploration* dès le début de l'intervention. Avec l'intervention de la chercheuse, elle est en mesure de dégager des données (deux couleurs et fermeture du collier) et un permis d'inférer (pour respecter l'alternance des couleurs, les extrémités ne peuvent être de la même couleur pour justifier que le collier ne débute pas par la même couleur qu'il se termine. Toutefois, elle n'entre pas en discussion avec Evelyne, qui elle met en place une routine associée à la fabrication d'un collier dans la vie de tous les jours en utilisant la symétrie qui pourrait être qualifié d'*acte* puisqu'une contrainte du problème n'est pas tenue en compte. On peut aussi se questionner à savoir si Evelyne est en *exploration* ou en *rituel* lorsqu'elle accepte que le collier débute par rose et se termine par blanc. En effet, elle justifie son accord en se référant à la contrainte d'alternance (permis d'inférer). Par ailleurs, Evelyne a pu chercher l'approbation à la suite des multiples interventions en lien avec les extrémités du collier et de l'accord entre la chercheure et Martine.

Pour équipe 2, lorsque l'enseignant vient observer leur travail, le collier débute et se termine par des couleurs différentes. Or, on peut observer que c'est suite à une intervention auprès d'une autre équipe que Renaud et Isabelle se sont assurés que la contrainte était suivie. Après que l'enseignant leur ait demandé si ça fonctionne lorsqu'on ferme le collier, Isabelle répond « Parce qu'il est assez long ». Toutefois, lorsque l'enseignant lui repose la question, elle répond « Parce que ici il y a un vert (pointe une extrémités) et ici il y a un blanc (pointe l'autre) » *fait des gestes avec les bras comme pour fermer un collier*.

On note ici le passage à un processus *justifier* en lien avec le problème supporté par le matériel et les gestes après une intervention de l'enseignant. La reformulation de la question a mené à une routine exploratoire par rapport au problème et non uniquement à un rituel au sens où la longueur du collier est davantage une question de gout qu'une question mathématique (dans ce cas particulier). En effet, Isabelle est en mesure d'avancer une raison mathématiquement valable pour appuyer le fait que le collier n'a pas les extrémités de la même couleur.

2. Moment 2 : dénombrement des perles pour remplir le bon de commande

Les deux autres moments sont en lien avec la complétion du bon de commande. Pour être en mesure de remplir le bon de commande, il est nécessaire de dénombrer les centicubes de chaque couleur. Or, les colliers sont parfois très longs et vont au-delà de 60 centicubes. Pour l'équipe de Martine et Evelyne, le collier final est composé de 40 centicubes de chacune des couleurs. Ici, l'acte routinier prend le dessus sur le RM. Avant même de recevoir le bon de commande, Martine dénombre les cubes un à un sans égard à la couleur. Elle change rapidement de stratégie pour opter pour la comptine par bonds de cinq, toujours sans égard à la couleur. Toutefois, elle éprouve des difficultés avec la comptine au-delà de 65. Ceci la ramène à sa première stratégie. Cet acte routinier (tout compter sans égard à la couleur) ne sera pas utile pour remplir le bon de commande.

Pour l'équipe d'Isabelle et Renaud, le collier ne fait que 50 centicubes. Ils n'ont aucun problème à dénombrer les 25 cubes verts. La première stratégie est le dénombrement un à un. Contrairement à Martine, c'est l'intervention de l'enseignant qui les amènera à utiliser la comptine par bonds de cinq, comptine qui fait partie de la culture de la classe. Alors que la mise en place de cet acte routinier est justifiée par l'enseignant en termes d'efficacité, du point de vue des élèves, il s'agit peut-être d'un rituel qui vise à répondre à la demande de l'enseignant.

3. Moment 3 : validation du bon de commande

Enfin, un élément permettant de valider le bon de commande et qui prendra de l'importance dans la discussion de groupe est de réaliser qu'il doit nécessairement y avoir le même nombre de centicubes des deux couleurs. Dans le premier groupe, après avoir dénombrer chacune des deux couleurs, Martine le réalise : « C'est la même affaire! On a découvert que quand on met, cinq avec cinq, avec cinq avec cinq, ça fait quarante les deux. Quarante plus quarante... ». Il y a identification d'une régularité, mais l'équipe n'entre pas plus loin dans les routines d'exploration pour se rendre à justifier cette régularité.

Chez Isabelle et Renaud c'est différent. Après qu'Isabelle ait compté les verts sous le regard attentif de Renaud, Isabelle commence à dénombrer les blancs « Cinq, dix, v... » mais est rapidement arrêter par Renaud qui dit 25 verts. On ne sait pas à ce moment s'il a dénombré rapidement ou s'il a remarqué la régularité. Or, un peu plus tard, Renaud est en mesure de justifier cette régularité.

25. Chercheuse : Ok, et là, vous savez que vous en avez 25 blancs, comment vous savez que vous en avez 25 verts ?
26. Renaud : Parce que, ici (pointe une extrémité) ça termine avec cinq verts et ici ça termine avec cinq blancs alors ça fait égalité.

V. CONCLUSION

On observe dans cette classe, que les élèves mettent en place certaines routines tels des actes ou des rituels qui ont été développées antérieurement comme la comptine par un ou par cinq. Le matériel permet aussi la mise en place de processus de raisonnement mathématique liés à des explorations, en particulier identifier des régularités et justifier. Lorsqu'on analyse ce qui s'est passé dans les deux équipes, il est possible de mettre en évidence deux différences majeures en termes de raisonnement mathématique et du rôle du matériel joué dans ce dernier. Premièrement, en ce qui a trait à la contrainte d'alternance, Martine (équipe 1) comme Isabelle (équipe 2) se servent du matériel pour justifier que l'alternance est bien respectée (elles pointent les extrémités, elles font le geste de ramener les extrémités ensembles, etc.). Deuxièmement, en ce qui concerne la régularité quant au nombre de cubes de chaque couleur, on observe une différence entre les processus de raisonnement mis en place par Martine (équipe 1) et ceux mis en place par Renaud (équipe 2). Martine identifie la régularité lorsqu'elle remplit le bon de commande. C'est donc à partir du nombre écrit en chiffre qu'elle réalise que les deux quantités sont égales. Du côté de Renaud, il comprend, avant même d'avoir dénombré, que les quantités seront égales. Contrairement à Martine qui ne justifie pas cette régularité, Renaud se sert du matériel, qui lui a permis d'observer la régularité, pour la justifier. En ce sens, le matériel a joué un rôle plus important dans les raisonnements de Renaud.

Par ailleurs, utiliser des perles directement n'aurait pas eu le même potentiel en termes de raisonnement mathématique pour ce qui est de la couleur des extrémités. Le matériel choisi nécessitait de la part de l'élève une objectivation de la contrainte (d'alternance) dans le contexte de ce problème, c'est-à-dire que les élèves devaient s'assurer que les extrémités du collier étaient de différentes couleurs (reformulation de la contrainte d'alternance). En ayant donné accès à un matériel dûment réfléchi, nous avons pu observer des RM riches mis en place à l'aide de celui-ci.

REFERENCES

Bednarz, N. (2013). Recherche collaborative et pratiques enseignantes, regarder ensemble autrement. Paris : L'Harmattan.

Carbonneau, K. J., Marley, S. C. et Selig, J. P. (2013). A meta-analysis of the efficacy of teaching mathematics with concrete manipulatives. *Journal of Educational Psychology, 105*(2), 380–400.

Corriveau, C. et Jeannotte D. (2015) Quelques apports du matériel de manipulation sur l'activité mathématique au primaire. Bulletin AMQ

Desgagné, S. (2001). La recherche collaborative : une nouvelle dynamique de recherche en éducation. Dans M. Anadón (Dir.), *Nouvelles dynamiques de recherche en éducation* (pp. 51-76). Québec : Les presses de l'université Laval.

Fosnot, C. T. et Dolk, M. (2001). *Young Mathematicians at Work: Constructing Number Sense, Addition, and Subtraction*. Heinemann, Westport, USA.

Gürbüz, R. (2010). The effect of activity-based instruction on conceptual development of seventh grade students in probability. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41(6), 743–767

Jeannotte, D. (2015). Raisonnement mathématique : proposition d'un modèle conceptuel pour l'enseignement et l'apprentissage au primaire et au secondaire. (Thèse non publiée). UQAM.

Ojose, B. et Sexton, L. (2009). The effect of manipulative materials on mathematics achievement of first grade students. The Mathematics Educator. 12(1), 3-14.

Poirier, L. (1999). Réflexion autour du matériel de manipulation. *Instantanés mathématiques*, 36(no. 1) septembre: 4–12

Puchner, Taylor, O'donnell et Fick (2008). Teacher learning and mathematics manipulatives : A collective study about teacher use of manipulatives in elementary and middle scool mathematics lessons. School Science and Mathematics. 108(7), 315-325.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York: Cambridge University Press.

Sfard, A. (2012). Introduction: Developing mathematical discourse - some insights from communicational research. *International Journal of Educational Research, 51-52,* 1–9.

Sherman, J. et Bisanz, J. (2009). Equivalence in symbolic and nonsym- bolic contexts: Benefits of solving problems with manipulatives. Journal of Educational Psychology, 101(1), 88–100