ENSEIGNEMENT ET APPRENTISSAGE DE L'INFINI ASPECTS PHILOSOPHIQUES, ÉPISTEMOLOGIQUES ET DIDACTIQUES

BOULAIS Pascale*, BROUZET Robert** DURAND-GUERRIER Viviane*** – MAJAJ Maha**** MARINO David*****, MONNOYEUR Françoise******, VERGNAC Martine*******

Résumé – Nous nous intéressons à l'enseignement et l'apprentissage de l'infini en classe de mathématiques en considérant les différences et les relations entre *infini potentiel* et *infini actuel*. Nous présentons les principaux éléments de notre étude philosophique, épistémologique et didactique, ainsi que trois situations visant à conduire un travail explicite avec les élèves sur ces questions en début de lycée.

Mots-clefs : Didactique, philosophie, épistémologie, infini potentiel, infini actuel

Abstract – We are interested in the teaching and learning of infinite in mathematics class, taking into account the relations between potential infinite and actual infinite. We report the main elements of our current philosophical, epistemological and didactical study; we also present three mathematical situations that we consider relevant for this purpose and to be explored with 10 and 11 grade students.

Keywords: Didactic, philosophy, epistemology, potential infinite, actual infinite

I. INTRODUCTION

La question de l'infini se pose dans de nombreux domaines de la connaissance humaine et a été depuis l'antiquité un objet d'étude des philosophes et des mathématiciens, suscitant de nombreux débats sur la nature de ce concept et sur la possibilité ou non de le définir. Elle est au cœur de nombreux aspects des mathématiques, et ceci depuis les mathématiques élémentaires jusqu'aux mathématiques les plus avancées, ainsi que dans de nombreux aspects de l'informatique, et de ce fait intervient dans un certain nombre de pensées identifiées dans l'appel à communication de ce groupe de travail. Dans cette communication, nous présenterons les premières étapes d'un projet de recherche en cours financé par l'ESPE (Ecole Supérieure du Professorat et de l'Education) Languedoc-Roussillon intitulé « Enseignement et apprentissage de l'infini en mathématiques et informatique » porté par V. Durand-Guerrier (Didactique des Mathématiques) et F. Monnoyeur (Philosophie) et associant chercheurs et enseignants du secondaire et du supérieur. Dans une première partie nous présentons brièvement les analyses philosophiques, épistémologiques et didactiques qui fondent notre projet de recherche. Nous présentons ensuite trois situations que nous avons mises en œuvre en 2018 dans nos enseignements, en lien avec un travail conduit dans le groupe IREM de Perpignan. Certains des premiers résultats expérimentaux sont présentés dans la partie II.

II. CONCEPTUALISATION DE L'INFINI

Dans cette partie nous présentons les principaux éléments d'une étude philosophique qui nous conduit à prendre en considération la distinction entre *infini potentiel* et *infini actuel* et à identifier précisément l'obstacle épistémologique que constitue l'introduction de l'infini actuel. Nous donnerons ensuite, en prenant appui sur une étude écologique en cours, les principaux arguments qui nous conduisent à soutenir que 1/ il est nécessaire de sensibiliser les

* Lycée Arago, Perpignan – France - pascale.boulais@free.fr
** LAMPS, Université Perpignan Via Domitia – France- robert.brouzet@univ-perp.fr
*** IMAG, Univ Montpellier, CNRS, Montpellier, France – viviane.durand-guerrier@umontpellier.fr
**** Université Perpignan Via Domitia – France – mahamajaj@hotmail.com
***** Lycée Jules Fil, Carcassonne – France – marino.david81@gmail.com
****** Centre Jean Pépin, CNRS – France – monnoyf@gmail.com
******* Lycée Jean Lurçat, Perpignan – France – martine.vergnac@orange.fr

enseignants du primaire et du secondaire aux différentes formes et difficultés de l'infini mathématique 2/ l'infini potentiel peut être identifié comme tel dès l'école primaire, puis tout au long du curriculum, et en particulier dans le cadre de la construction du nombre; 3/ l'infini actuel est introduit dans l'enseignement dès la fin du collège ou le début du lycée sans être généralement explicitement identifié dans les activités de classe.

1. Aperçu du questionnement philosophique

La question de l'infini mathématique pose de nombreuses questions historiques et philosophiques (Belna 2009, Bolzano 1993, Dubinsky & al. 2005, Mancosu 2015, Monnoyeur 1992, 2013, Serfati 1989). Aristote a établi une distinction entre un infini potentiel et un infini actuel et montré comment selon lui, seul un infini potentiel fait sens en mathématiques; la distinction et position aristotélicienne va s'imposer jusqu'au XIXe siècle, moment où Bernard Bolzano introduit l'idée que l'infini actuel existe en mathématiques sous forme de paradoxe sans pour autant en donner une définition opératoire. Ceci représente néanmoins une étape majeure car l'infini actuel était considéré jusqu'alors seulement comme attribut de la divinité et avait été rejeté comme absurde par les mathématiciens (Couturat, 1903). Bolzano, en imaginant des correspondances bijectives entre des ensembles infinis telles que la bijection entre un ensemble et une partie de lui-même, inaugure un nouveau type d'infini mathématique, un infini actuel qui se comprend comme une totalité et non plus comme une succession. Cet ensemble infini actuel est paradoxal puisqu'il contredit l'axiome euclidien selon lequel « le tout est plus grand que la partie »[1]. Cantor (1845-1918) supprime le paradoxe en stipulant que l'axiome euclidien ne vaut que pour les ensembles finis et non pour les ensembles infinis; à la même époque, Dedekind (1831-1916) pose par définition qu'un ensemble est infini s'il est équipotent à l'une des ses parties propres (Dedekind, 2008, p.173) et fait ainsi de la négation de l'axiome euclidien : « Il est possible que certaines parties d'un ensemble soient aussi grandes que le tout », le fondement de sa définition des ensembles infinis. Avec les travaux de Cantor et de Dedekind, la mathématique de l'*infini actuel* prend corps en s'appliquant aux ensembles de nombres. La négation de l'axiome du tout et de la partie a, dans ce cas, des conséquences contre-intuitives comme le fait que l'on puisse mettre en bijection l'ensemble des entiers naturels avec l'ensemble des nombres rationnels ou avec l'ensemble des nombres décimaux, ou encore le fait que deux segments de longueurs différentes contiennent « le même nombre (infini) de points » (Fischbein 2001).

Nous avons conduit un travail épistémologique à la lumière des questions didactiques permettant de mettre en évidence la pertinence d'une clarification des différences et des relations entre les deux types d'infini en jeu dans de nombreux aspects des mathématiques enseignées du primaire à l'université. Par exemple, le changement conceptuel consistant à considérer qu'on peut se donner un ensemble contenant la totalité des nombres entiers naturels fait basculer de l'infini potentiel (on peut toujours considérer le successeur d'un nombre entier) à l'infini actuel qui est souvent passé sous silence en classe. Il est remarquable que pour définir la notion d'ensemble infini, Dedekind choisisse explicitement de violer un axiome euclidien qui pouvait sembler évident, mais qui est mis en défaut dès lors que l'on accepte de considérer un ensemble comme une totalité infinie ou un infini actuel. L'affirmation de cette position théorique permet de dépasser le paradoxe apparent et de travailler sereinement avec les ensembles infinis. De nombreux auteurs s'accordent sur le fait que de considérer l'infini comme objet ou totalité est essentiel à la compréhension des ensembles infinis et à la notion de limite (Sierpinska 1985, Tirosh 1999) tandis que d'autres auteurs mettent en évidence le fait que notre compréhension de l'infini relève naturellement de l'infini potentiel, et ceci même à un niveau avancé (Monaghan 2001, Monnoyeur 2011).

[1] Dans le livre I des Eléments d'Euclide, cet énoncé correspond à la 5$^{\text{ème}}$ notion commune.

Ceci montre qu'il est nécessaire de conduire un travail spécifique avec les élèves et les étudiants pour permettre une appropriation adéquate de la notion d'infini actuel qui est à l'œuvre par exemple dans la construction des nombres réels et dans la notion de limite, et au-delà dans la définition des séries. L'étude de l'émergence historique de l'infini actuel en mathématiques nous montre que ce concept s'est construit envers le rejet qu'il suscitait pour apparaître ensuite aux cotés de l'infini potentiel dans des situations spécifiques. Il n'est ainsi pas étonnant que ces différentes facettes de l'infini soient difficiles à identifier par les professeurs, élèves et étudiants ; le concept d'*infini actuel* implique une nouvelle manière d'envisager notre rapport à l'infini mathématique ; nous avons vu plus haut que les mathématiciens ont dû prendre des décisions pour résoudre les paradoxes et en faire un outil du travail mathématique. On voit, par là même, qu'en mathématique, il ne suffit pas simplement de se laisser porter par la logique de la non-contradiction mais qu'il est besoin parfois d'identifier les paradoxes et d'opérer des changements fondamentaux pour les surmonter. L'exemple des deux infinis permet de montrer qu'en mathématiques, on peut dépasser des obstacles conceptuels majeurs en procédant à des choix théoriques. Ce qui précède nous conduit à mettre à l'étude les trois questions de recherche ci-dessous :

1. Quels sont les obstacles épistémologiques et didactiques à une prise en compte explicite de la différence entre *infini potentiel* et *infini actuel* dans l'activité mathématique en classe ?
2. Peut-on envisager des situations didactiques en accord avec le curriculum du secondaire permettant de mieux identifier les obstacles rencontrés par les élèves et les étudiants et de conduire en classe un travail permettant de les surmonter ?
3. Quelles sont les niches et les habitats (au sens de Artaud, 1997) permettant d'envisager un travail sur l'infini tout au long du curriculum français actuel en mathématiques et informatique de la fin de l'école primaire à l'université ?

Pour étudier ces questions, nous nous concentrons dans cette proposition de communication sur la construction des nombres tout au long du curriculum, en prenant en compte les relations entre nombres et grandeurs, et les possibilités ouvertes par l'introduction de l'algorithmique et de l'informatique dans les programmes français.

2. L'infini dans la construction du nombre, éléments d'une approche écologique

Les travaux de recherche en didactique des mathématiques sur la conceptualisation du nombre mettent en évidence un jeu entre l'*infini potentiel* et l'*infini actuel.* Nous faisons l'hypothèse que la confusion entre infini potentiel et infini actuel est un obstacle à l'appropriation du concept de nombre réel et à la distinction entre le discret, le dense et le continu. Les recherches que deux des auteures ont conduites à la transition lycée-université ont mis en évidence la fragilité des connaissances des élèves de lycée et des étudiants en début d'université sur les différents types de nombres (Vergnac et Durand-Guerrier 2014), venant confirmer les travaux de Bronner (1997). Pourtant les nombres sont travaillés tout au long du curriculum (nombres entiers, nombres entiers relatifs, nombres décimaux, nombres rationnels, nombres irrationnels, nombres réels, nombres complexes) et sont au cœur de l'activité mathématique et des applications des mathématiques dans de nombreux domaines.

Nous nous intéressons dans ce projet à l'identification des niches et habitats possibles pour un travail sur le concept d'infini dans la construction des nombres dans le curriculum actuel, en appui sur l'étude épistémologique et sur les travaux antérieurs en didactique. La notion intuitive d'*infini potentiel* apparaît très tôt lorsque l'enfant commence à comprendre que la liste des nombres entiers ne s'arrête pas. La mise en œuvre de la division décimale de nombres tels que 2/3 met à nouveau en évidence cette possibilité d'un processus qui ne s'arrête pas, dans la mesure où l'on trouve à chaque étape une décimale égale à 6 et un reste égal à 2. On écrira par exemple 2/3 = 0,666…, que l'on peut interpréter de deux manières différentes : 1/ cette écriture rend compte d'un processus itératif indéfini (infini potentiel) ; 2/ on peut considérer une écriture du nombre 2/3 sous la forme d'une expansion décimale illimitée (une totalité achevée, infini actuel), ce que l'on écrit aussi parfois 2/3 = 0,$\underline{6}$. Le saut conceptuel consistant ici à passer de la première interprétation, relativement intuitive qui met en jeu le processus à la deuxième interprétation qui consiste à considérer l'objet obtenu par achèvement du processus est le plus souvent passé sous silence par les enseignants lors de la première rencontre et n'est en général pas repris plus tard dans le secondaire. La construction des nombres décimaux met à nouveau en jeu les deux infinis : on commence par considérer l'ensemble formé de tous les nombres décimaux (infini actuel) ; dans ce nouvel ensemble, entre deux décimaux distincts, on peut toujours placer un décimal différent des deux premiers (propriété de densité de l'ensemble des décimaux en lui-même, infini potentiel). Ceci est en lien avec une difficulté persistante en début d'université à prendre en compte le fait que l'ensemble des nombres décimaux et l'ensemble des nombres rationnels ne sont ni discrets, comme l'est l'ensemble des entiers naturels (où tout entier a un successeur), ni continus comme l'est l'ensemble des nombres réels; cette difficulté est renforcée par le fait que nous ne disposons pas d'une représentation graphique adéquate de la droite numérique décimale (Durand-Guerrier 2016). Bronner (1997) a introduit le terme d'idécimalité pour caractériser les nombres n'ayant pas un développement décimal fini et a mis en évidence un vide didactique concernant cette notion. Vingt ans plus tard, le phénomène est toujours présent, et on observe en outre un vide didactique pour la notion d'irrationalité (Vergnac et Durand-Guerrier 2014) qui met également en jeu les interactions entre *infini potentiel* et *infini actuel*. Depuis l'antiquité Grecque, la question de l'irrationalité est étroitement liée à la question de l'incommensurabilité de certains couples de grandeurs qui mettent en jeu des questions liées à l'infini potentiel (par exemple l'algorithme d'Euclide qui ne s'arrête pas) et suscitent la méfiance des anciens grecs. Ces deux notions et leurs liens constituent donc *a priori* une niche pour travailler ces questions au collège ou au début du lycée. L'interaction entre *infini potentiel* et *infini actuel* est également présente au cœur de la notion de limite de suite, qui met en jeu l'*infini potentiel* puisque l'on travaille au voisinage de l'infini et l'*infini actuel* lorsque la suite considérée admet une limite finie. Cette interaction se retrouve également lorsque l'on s'intéresse aux limites de fonctions, en particulier lorsqu'on approche les limites par des suites, ou lorsque l'on recherche des points fixes pour des fonctions données. Les méthodes classiques mettent en jeu des algorithmes pour lesquels la question de l'infini se pose encore de manière différente.

En considérant l'importance des algorithmes dans la construction des nombres, nous faisons l'hypothèse que l'introduction de l'algorithmique dans les programmes et l'utilisation d'outils informatiques (ne pouvant traiter que des représentations finies des objets mathématiques) ouvrent sur de nouvelles questions de représentations des nombres à l'interface entre mathématiques et informatique et fournit ainsi *a priori* des nouvelles niches pour penser des situations d'apprentissage adéquates. Ceci motive une reprise de l'étude des enjeux épistémologiques et didactiques de l'appropriation du concept mathématique d'infini pour l'apprentissage du nombre et des principaux concepts de l'analyse et de notions à l'interface des mathématiques et de l'informatique (en mathématiques discrètes notamment). Dans ce qui suit, nous présentons trois situations visant à conduire un travail explicite sur l'infini mathématique en début de lycée.

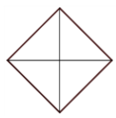
III. DES SITUATIONS POUR TRAITER LA QUESTION DE L'INFINI EN CLASSE

Dans cette partie, nous présentons trois exemples de situations ayant un potentiel pour travailler la question de l'infini avec des élèves de seconde en France (élèves 15-16 ans) qui ont été expérimentées au second semestre de l'année scolaire 2017-2018 en mettant l'accent sur les questions liées à l'infini. Nous donnons également des éléments des analyses *a priori et a posteriori* de la situation *La maison de Ramanujan* que nous avons présentés pendant le colloque. Les situations proposées visent à permettre un travail explicite sur l'infini en cohérence avec les éléments présentés dans la partie précédente. Nous faisons l'hypothèse que la question qui se pose dans l'enseignement n'est pas seulement celle du dépassement de l'obstacle de l'infini actuel mais également celle de l'articulation entre *infini potentiel* et *infini actuel* dans un certain nombre d'activités en mathématiques et en informatique

1. *La duplication du carré – approche de l'idécimalité*

Cette situation est classiquement utilisée en classe pour introduire la nécessité de considérer des irrationnels et pour l'introduction de la racine carrée. Cette situation est également pertinente pour établir l'idécimalité (au sens de Bronner) de la racine carrée de 2 (Tardy & Durand-Guerrier 2010). Nous nous intéressons à la question de l'idécimalité qui met en jeu explicitement la question de l'infini potentiel. Il s'agit dans un premier temps de faire construire par les élèves un carré. On donne aux élèves deux feuilles carrées dont la mesure des côtés en cm est un nombre entier et on leur demande de créer un grand carré en utilisant entièrement ces deux carrés et en réalisant un minimum de coups de ciseaux. Une fois le grand carré obtenu matériellement, on leur demande de prouver que la figure créée est bien un carré, puis de déterminer la mesure du côté en cm de ce nouveau carré. Le travail se déroule en groupe avec production d'une narration de recherche. En classe de seconde en France, les élèves ont déjà rencontré la racine carrée en troisième, en particulier lors de l'étude du théorème de Pythagore. Nous donnons ci-dessous des éléments d'analyse *a posteriori* des expérimentations réalisées précédemment par deux des auteures de ce texte. En seconde, les constructions classiques apparaissent rapidement :

4 triangles isocèles rectangles à l'extérieur d'un des deux carrés initiaux.



4 demi-carrés de sommet commun

Nous nous intéressons ici aux résultats obtenus en ce qui concerne la question de la mesure du côté du carré réalisé. Une méthode régulièrement mises en œuvre par les élèves consiste à calculer la longueur de diagonale du carré initial (qui est isométrique au côté du grand carré) en utilisant le théorème de Pythagore. Dans le cas où la mesure du côté du carré initial est 7, les élèves proposent dans ce cas comme mesure du côté du grand carré $\sqrt{98}$ ou $7\sqrt{2}$. D'autres élèves mesurent le côté du carré obtenu et donnent comme réponse 10 cm ou 9,9 cm. D'autre enfin utilisent leur calculatrice et produisent comme mesure le nombre décimal affiché par la calculatrice, comme par exemple 9,89949437. La considération de l'aire totale du grand carré permet d'exclure les trois réponses décimales et d'établir que les deux autres réponses sont valides. Le débat est relancé par le professeur avec la question suivante : « pourrait-on écrire cette réponse avec une écriture décimale ? », elle correspond à la préoccupation forte des élèves qui refusent que les deux réponses validées soient les réponses définitives. La réponse qui émerge alors s'exprime ainsi « oui, mais la calculatrice n'a pas mis toutes les décimales » « oui, mais ce serait trop long » « non, ça ne tombe pas juste ». Les élèves sont invités à réfléchir à la possibilité d'écrire le nombre avec 20 décimales dont la vingtième n'est pas nulle, ce qui les conduit à exprimer le fait que le nombre obtenu aurait alors 40 décimales, dont la $40^{\text{ième}}$ ne serait pas nulle. On peut alors envisager le passage à un nombre n quelconque de décimales et à l'institutionnalisation de ce que $\sqrt{98}$ et $\sqrt{2}$ ne peuvent pas s'écrire avec un nombre fini de décimales non nulles. On montre ensuite que ceci vaut pour tout entier et permet d'établir le résultat suivant : étant donné un entier naturel n, soit c'est un carré parfait et sa racine carrée est un entier, soit ce n'est pas un carré parfait et sa racine carrée n'est pas un nombre décimal (c'est un nombre idécimal au sens de Bronner). Au cours de ce travail, commence à émerger l'idée que l'on peut s'approcher de $\sqrt{98}$ en augmentant le nombre de décimales. A un niveau plus avancé, on peut prolonger ce travail pour aller vers l'idée que l'on peut construire une suite illimitée de nombres décimaux permettant d'approcher pour n'importe quelle valeur de n le nombre $\sqrt{98}$ à 10^{-n} près par défaut. On demande aux élèves de proposer des encadrements successifs de $\sqrt{2}$ entre deux décimaux ayant exactement 1, 2, 3, 4 ou 5 décimales avec des amplitudes respectives égales à 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 10^{-5} ; on leur propose ensuite une valeur approchée à 10^{-20} près par défaut et on leur demande d'en déduire une valeur approchée à 10^{-21} par défaut. Ceci permet d'introduire l'idée d'un processus permettant de produire pour une valeur approchée à 10^{-n} près par défaut une valeur approchée à 10^{-n-1} près par défaut, et donc un processus itératif potentiellement infini.

2. *Le dialogue de Galilée sur la possibilité des comparer des infinis*

Cette deuxième situation vise à travailler explicitement l'obstacle de l'infini actuel que nous avons identifié dans la deuxième partie de ce texte. L'objectif principal est de faire formuler l'argument qui fait obstacle à la notion d'infini actuel : « dans un ensemble donné le tout est plus grand que la partie », et de montrer que la construction de $\mathbb{N}$ nécessite de réfuter cet argument. Selon le déroulement de l'activité, on peut envisager une première approche de la définition axiomatique des ensembles infinis proposée par Dedekind et Cantor comme ceux qui peuvent être mis en correspondance biunivoque avec une partie propre. Le travail s'articulera autour d'un extrait du *Dialogue sur deux sciences nouvelles* de Galilée qui met en scène Simplicio et Salviati (Galilée 1966, pp.255-256). La question de Simplicio et l'argumentaire de Salviati portent sur la possibilité de comparer les infinis. Cette situation a été expérimentée en classe de seconde. Le scénario retenu est le suivant : une première phase de situation du texte dans l'œuvre de Galilée, suivie de la lecture silencieuse et individuelle de l'extrait. Une deuxième phase de travail en groupe pour répondre à trois questions. La première porte sur la compréhension du problème soulevé par Simplicio ; la seconde sur l'analyse de l'argumentation de Salviati. Dans la troisième question, on demande aux élèves de se positionner sur la question travaillée dans le texte en argumentant cette position. Le travail se déroule en groupes de 3 ou 4 élèves ; les élèves doivent produire une synthèse collective écrite de leurs réponses aux questions ci-dessus. Chaque groupe fait ensuite une présentation orale avec relevé de ses réponses écrites au tableau pour alimenter le débat sur la dernière question. L'objectif est d'aboutir à l'issue du débat à l'institutionnalisation du résultat suivant : « En considérant un ensemble qui contient tous les nombres entiers possibles, appelé ensemble des nombres entiers naturels, on peut mettre en relation cet ensemble infini et le sous ensemble formé des carrés parfaits des éléments de cet ensemble de telle façon qu'à chaque nombre entier naturel on peut associer de manière unique son carré et qu'à chaque carré parfait on peut associer de manière unique un nombre entier naturel ». Pour prolonger l'activité, les élèves peuvent être invités à explorer la question complémentaire : « Peut-on trouver d'autres parties de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels qui peuvent être mises en correspondance avec lui-même ? Si oui, lesquelles ? Argumentez vos réponses. ».

3. *La maison de Ramanujan - fractions continues*

La situation « *La maison de Ramanujan* » est inspirée et adaptée d'une vidéo en ligne[2]. L'énoncé classique est le suivant : Dans une rue, les maisons sont numérotées de 1 à n sur un seul côté de la rue. Le numéro de la maison de Ramanujan vérifie la propriété suivante : *la somme des numéros des maisons à gauche est égale à la somme des numéros des maisons à droite.* Les expérimentations en classe de 1ère scientifique (16-17 ans) ont été réalisées au

[2] https://www.youtube.com/watch?v=T89yGlF-9ro&t=430s

printemps 2018. Cette situation permet de mettre en place un travail d'approximation d'un nombre irrationnel par des suites de rationnels en utilisant les ressources de l'algorithmique. Le scénario envisagé comporte une première phase exploratoire consistant à déterminer à la main toutes les maisons de Ramanujan pour n entier naturel compris entre 1 et 15 ; il y a une seule solution pour $n = 8$ et $m = 6$. La deuxième étape consiste à modéliser le problème par des suites, ce qui conduit à la relation $\left(\frac{2n+1}{m}\right)^2 = 8 + \frac{1}{m^2}$. . (La preuve est donnée en annexe 1). Une fois cette relation établie, on demande aux élèves d'étudier les suites qui interviennent dans le problème, à savoir la suite w de terme général $w_m = 8 + \frac{1}{m^2}$; la suite v définie par récurrence par $v_1 = \frac{1}{6}$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$ $v_{n+1} = \frac{1}{6-v_n}$; la suite de terme général $(u_n)^2$ avec $u_n = 3 - v_n$.

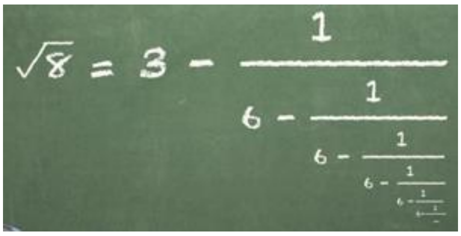


Figure 1 : extrait de la vidéo mis en débat

L'étape suivante consiste à discuter un tableau extrait de la vidéo[3] pour mettre en débat la distinction entre valeur approchée et valeur exacte, en lien avec un processus potentiellement infini (le développement en fractions continues de $\sqrt{8}$). Ici le signe égal relie valeur exacte et valeur approchée. On demande ensuite aux élèves d'écrire un algorithme de seuil. Les suites arithmétiques ont été étudiées préalablement et notamment la somme des n premiers entiers.

La situation permet une première rencontre avec une conjecture de limite de suite numérique, avec usage du tableur pour calculer les premiers termes. Le tableur fournit une représentation sémiotique de la notion de suite, en donnant une liste des valeurs de la suite et le processus de génération qui peut être recopié plus bas permet de percevoir que cette liste est infinie. Il y a dans ce cas, en acte, une perception de l'infini potentiel de la suite. Mais ce n'est pas la seule conjecture possible. On peut trouver par exemple, selon l'affichage obtenu sur le tableur : la suite u tend vers $\sqrt{8}$; la suite u^2 est stationnaire égale à 8 à partir du rang 6 ; la suite u tend vers 2,82842712. On note que le travail sur tableur conduit à travailler avec des approximations décimales, qui sont pertinentes pour établir les conjectures sur le comportement de ces suites. L'observation des valeurs de la suite $(u_n)^2$ semble indiquer que la suite est stationnaire à partir d'un certain rang. On prévoit de laisser les élèves traduire librement leurs observations : la suite est égale à 8 à partir de …, la suite stagne, la suite est constante. En jouant sur le nombre de décimales affichées on peut faire percevoir que, à un rang donné, la valeur 8 est probablement une valeur approchée. Nous faisons l'hypothèse que la tâche « écrire un algorithme simple de recherche un seuil » favorise la construction en acte de la définition de la convergence d'une suite numérique. Ceci motive la demande d'écriture d'un algorithme de seuil permettant de déterminer pour quelle valeur de n on obtient un écart entre u_n et $\sqrt{8}$ inférieur à 10^{-k} pour k entier naturel choisi par l'utilisateur.

Nous donnons ci-dessous quelques-uns des moments forts de la mise en œuvre de cette situation en classe de Première Scientifique française au printemps 2018. Lors du travail avec le tableur les conjectures attendues sont apparues. Le débat a permis de reconnaître que

[3] Il s'agit d'une capture d'écran issue de la vidéo mentionnée dans la note 1.

2,82842712 est une valeur décimale approchée de $\sqrt{8}$ avec deux arguments : 1/la référence à l'écriture décimale illimitée de ce nombre ; 2/le fait que le carré de ce nombre est un nombre décimal non entier dont le chiffre de droite est égal à 4. Le travail à partir du tableau issu de la vidéo sur lequel l'égalité entre $\sqrt{8}$ et la suite illimitée des fractions continues (travail individuel suivi d'un débat) nous a permis de faire des hypothèses sur la notion d'infini mobilisée par les élèves (cf. annexe). Certains élèves considèrent que l'usage du signe « = » est abusive ; leurs réponses permettent de faire l'hypothèse qu'ils font référence au processus itératif infini, mobilisant de ce fait l'infini potentiel. D'autres élèves semblent envisager l'infini actuel mais ne le reconnaissent pas dans l'écriture proposée. Quelques élèves néanmoins semblent mobiliser l'infini actuel. Suite au débat, le professeur a institutionnalisé le résultat suivant : « $\sqrt{8}$ est un nombre irrationnel. On peut l'approcher d'aussi près que l'on veut par une fraction rationnelle. L'écriture avec le signe $=$ est abusive. Si ce processus s'achevait (ce qui n'est pas possible puisqu'il est infini) on atteindrait $\sqrt{8}$. On traduit ceci en disant que la suite u_n tend vers $\sqrt{8}$, ce que l'on note $\lim_{n\to\infty} u_n = \sqrt{8}$.[4] La limite d'une suite de nombres rationnels peut être un nombre irrationnel.

Cette situation a donc permis 1/ d'introduire l'approximation du nombre $\sqrt{8}$ par la suite des réduites de sa fraction continue, qui fournit un exemple de processus itératif produisant une suite illimitée de fractions rationnelles permettant d'approcher pour tout entier naturel k le nombre $\sqrt{8}$ à 10^{-k} près par défaut ; 2/ d'utiliser ce résultat mettant en jeu l'*infini potentiel* pour déterminer des solutions entières à un problème posé dans le domaine de la théorie élémentaire des nombres. A l'issue de cette étude, on voit émerger des questions et des réflexions de nature épistémologique qui permettent (cf. annexe 3) aux élèves de prendre conscience de certains aspects de la pensée scientifique : « l'intuition mathématique » se construit sur des connaissances familières, ici notamment sur la grande familiarité de Ramanujan avec les équations de Pell-Fermat ; les changements de cadres sont des pratiques ordinaires dans la résolution de problèmes mathématiques.

IV. CONCLUSION

Dans cette communication, nous avons présenté un argumentaire soutenant l'intérêt de travailler explicitement les notions d'*infini potentiel* et d'*infini actuel* en classe de mathématiques. Notre thèse est que l'infini actuel ne constitue pas un dépassement de l'infini potentiel, mais plutôt que les deux types d'infinis et leurs relations vivent dans la classe de mathématiques. Elle s'appuie sur l'étude philosophique, épistémologique et didactique présentée dans ce texte. Les trois situations proposées dans la deuxième partie sont des exemples de ce que l'on peut envisager dans le cadre des programmes actuels de lycée français. L'analyse *a posteriori* de la mise en œuvre de la situation « La maison de Ramanujan » montre la pertinence de ce type de situation pour conduire un travail explicite sur l'infini dans les études secondaires. Ce thème touche à plusieurs des thèmes de l'appel du groupe de travail sur les pensées mathématiques (intuitif *versus* conceptuel ou formel ; théorique *versus* empirique ; algorithmique *versus* analytique). Ce qui est présenté ici est une première étape d'un projet de recherche en cours qui concernera d'autres domaines mathématiques et d'autres niveaux de classe ainsi que les interactions mathématiques – informatique.

[4] Rappelons que cette égalité n'est pas une égalité entre deux nombres mais une abréviation de la phrase « La suite u_n converge vers le nombre $\sqrt{8}$. »

RÉFÉRENCES

Artaud M. (1997). La problématique écologique -un style d'approche du didactique, Actes de l'école d'été de didactique des mathématiques, Houlgate, 19-27 août 97, 101-139.

Belna, J.P. (2009). Histoire de la théorie des ensembles, Paris : Ellipse.

Bolzano B (1993). Les paradoxes de l'infini. Traduction et notes par H. Sinaceur. Paris : Seuil.

Bronner, A. (1997). *Étude didactique des nombres réels, idécimalité et racine carrée*. Thèse de l'Université Grenoble 1 (France).

Couturat, M. (1903). *Opuscules et fragments inédits de Leibniz*. Paris : F. Alcan Editeur.

Dedekind, R. (2008). *La création des nombres*, traduction et notes par H. Sinaceur. Paris : Vrin, coll. « Mathesis ».

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, A., Brown, A. (2005). Some Historical Issues and Paradoxes Regarding the Concept of Infinity: An APOS-based analysis: Part 2. *Educational Studies in Mathematics*, 58/3, 335-359.

Durand-Guerrier, V. (2016). Conceptualization of the continuumn an educational challenge for undergraduate students, *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2, 338–361.

Fischbein E. (2001). Tacit models and Infinity. *Educational Studies in Mathematics,* 48, 309-329.

Galilée, G. (1966). *Dialogues. Lettres choisies.* Traduction de P-H Michel. Paris : Hermann.

Mancosu, P. (2015). *Infini, logique, géométrie*. Paris : Vrin.

Monaghan, J. (2001). Young peoples' ideas of infinity. *Educational Studies in Mathematics,* 48, 239-257.

Monnoyeur, F. (1992, 1995, 2011, 2014). *Infini des mathématiciens, infini des philosophes.* Paris: Belin.

Monnoyeur, F. (2011) The indefinite within Descartes' mathematical Physics. Vol 19, *Eidos*.

Monnoyeur, F. (2013) Nicholas of Cusa's methodology of the Infinite. Conference paper : *History & Philosophy of Infinity*. At University of Cambridge, Cambridge, UK.

Serfati, M (1989). Autour de l'axiome du choix. In *La Démonstration mathématique dans l'Histoire, Actes du colloque Inter-IREM Epistemolologie et Histoire des mathématiques*, Besancon, pp. 377-386.

Sierpinka, A. (1985). 0bstacles épistemologiques relatif à la notion de limite. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, volume 6.1.

Tardy, C., Durand-Guerrier, V. (2010). Introduction of an historical and anthropological perspective in mathematics: an example in secondary school in France. Durand-Guerrier V. et al. (eds). *Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Jan 2009, LYON, France*. ENS Lyon, pp.2791-2800.

Tirosh, D. (1999). Finite and infinite sets: Definitions and intuitions. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology*. 30(3), 341-349.

Vergnac, M., & Durand-Guerrier, V. (2014). Le concept de nombre réel au lycée et en début d'université: un objet problématique. *Petit x*, 96, 7–28.

ANNEXES

ANNEXE 1 : La solution de Ramanujan

Pour une rue comportant n maisons, la somme des numéros des maisons situées à gauche de la maison dont le numéro est m est la somme des entiers de 1 à $m-1$, soit $\frac{m(m-1)}{2}$; la somme des numéros des maisons situées à droite de la maison dont le numéro est m est la somme des entiers de $m+1$ à n qui est égale à $\left[\frac{n(n+1)}{2} - \frac{m(m+1)}{2}\right]$, soit $\frac{(m+n+1)(n-m)}{2}$. L'égalité des deux sommes conduit à la relation $\left(\frac{2n+1}{m}\right)^2 = 8 + \frac{1}{m^2}$[5]. La piste imaginée par Ramanujan pour déterminer les couples d'entiers naturels (m, n) qui satisfont cette relation est de considérer une suite de valeur approchée de $\sqrt{8}$ par les nombres rationnels correspondant aux réduites de la fraction continue associée[6]. La première réduite est $(3 - \frac{1}{6})$ soit $\frac{17}{6}$. Ceci correspond au premier couple de solutions : 8 maisons dans la rue, la maison de Ramanujan est la maison numéro 6. De la même manière, chacune des réduites de la fraction continue fournit un couple *(2n+1, m)* ou n est le nombre de maison dans la rue, et m le numéro de la maison de Ramanujan. C'est cette méthode qui est décrite dans la vidéo mentionnée ci-dessus.

ANNEXE 2 : Quelques réponses d'élèves illustrant les diverses formes d'infini mobilisées

Commentant l'extrait de la vidéo de la figure 1, certains élèves considèrent que l'usage du signe « = » est abusive ; leurs réponses permettent de faire l'hypothèse qu'ils font référence au processus itératif infini, mobilisant de ce fait l'infini potentiel.

E1 : je pense que c'est étrange de l'utiliser car on dit que la limite tend vers $\sqrt{8}$. Donc l'équation qui s'étend à l'infini est approximative. Il vaudrait mieux $\approx$.

E2 : cet égal devrait être remplacé par $\approx$ car c'est une équation approximative qui est à l'infini. Puisqu'elle n'est pas marquée dans son ensemble (présence de …) on ne peut pas dire que c'est une écriture exacte.

D'autres élèves semblent envisager l'infini actuel mais ne le reconnaissent pas dans l'écriture proposée.

E3 : Il démontre le résultat de $\sqrt{8}$. Le signe $=$ permet de prouver que $\sqrt{8}$ équivaut à une infinité de fractions (nombres). Il ne devrait pas mettre de $=$ car $\sqrt{8}$ n'a pas de valeurs exactes. Il devrait utiliser le signe pour désigner une valeur approchée ($\approx$). Le calcul est à l'infini.

Quelques élèves néanmoins semblent mobiliser l'infini actuel, comme dans la réponse ci-dessous.

E4 : Le signe $=$ est utilisé ici car c'est une suite infinie qui se rapprochera de plus en plus de $\sqrt{8}$. A un nombre $+\infty$ la suite sera égale à $\sqrt{8}$. Cependant, si on s'arrête avant l'infini, on sera obligé de mettre $\approx$ car même s'il s'approche de $\sqrt{8}$ à une très grande décimale, elle ne sera jamais égale.

ANNEXE 3 - Deux exemples de questions d'élèves à l'issue de l'étude

Comment est-il possible que Ramanujan ait eu une telle intuition ?
C'est surprenant de passer par des suites infinies pour résoudre le problème des maisons.

---

[5] Cette relation montre que les couples $(2n+1, m)$ sont les solutions de l'équation diophantienne quadratique de Pell : $x^2 - 8y^2 = 1$

[6] Les réduites de cette fraction continue fournissent les meilleures approximations rationnelles de $\sqrt{8}$.