ELEMENTS D'ANALYSE DU CURRICULUM OFFICIEL A PROPOS DE LA PENSEE ALGEBRIQUE

BRONNER[*] Alain – LARGUIER[**] Mirène

Résumé – En utilisant les outils de la TAD (théorie anthropologique du didactique), nous proposons une méthodologie pour mettre au jour les choix de chaque pays au niveau du savoir à enseigner à propos de l'entrée dans l'algèbre et du développement de la pensée algébrique. Nous mettons à l'épreuve notre méthodologie sur les programmes français en nous centrant sur *le potentiel d'éléments pertinents pour développer la pensée algébrique* à l'école primaire et au début de l'enseignement secondaire en France.

Mots-clefs : pensée algébrique, curriculum officiel, école primaire, début du secondaire

Abstract – Using the tools of the ATD (Anthropological Theory of the Didactic), we propose a methodology to reveal the knowledge to be taught chose by each country about the entry into algebra and the development of the algebraic thinking. We test our methodology on French programs focusing on *the potential of relevant elements to develop algebraic thinking* in primary school and beginning of secondary education in France.

Keywords: algebraic thinking, official curriculum, primary school, early secondary school

I. INTRODUCTION

Cet article se situe dans le cadre du développement du réseau OIPA (Observatoire International de la Pensée Algébrique), initié par Alain Bronner en France et Hassane Squalli au Québec. Il s'appuie sur de nombreux résultats de la recherche relatifs à un *problème de la profession*, au sens de Chevallard (2006), celui de l'entrée dans l'algèbre avant même l'enseignement des outils conceptuels et sémiotiques de l'algèbre formel. En France, plusieurs travaux de recherche ont souligné les difficultés de l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre comme le rapport de la commission présidée par Kahane (2002) ou encore le numéro spécial de la revue Recherches en Didactique des Mathématiques, dirigé par Coulange et Drouhard (2012). Au Québec, les recherches menées dans cette perspective, notamment par Squalli, Mary et Marchand (2011), mettent l'accent sur ce qu'ils appellent le développement de *la pensée algébrique* dès le primaire sans usage du langage littéral de l'algèbre. Un courant plus général, *Early algebra*, centré sur les questions de développement de la pensée algébrique, est apparu depuis plusieurs années dans les recherches anglo-saxonnes et a diffusé jusqu'aux curricula de certains états du canada (comme le Nouveau Brunswick) ou de certains pays comme le Brésil. Notre projet dans le cadre du réseau OIPA est de construire une méthodologie d'analyse et de comparaison des curricula officiels des différents pays relativement au développement de la pensée algébrique. Dans le cadre du colloque EMF 2018, nous nous limiterons à présenter les étapes de notre méthodologie d'analyse, à la mettre à l'épreuve sur le curriculum officiel en France et à dégager *le potentiel d'éléments pertinents pour développer la pensée algébrique* en fin de l'école primaire et début de l'enseignement secondaire (cycle 3).

II. LES QUESTIONS DE L'ETUDE DU CURRICULUM OFFICIEL ET LES DONNEES POUR REALISER L'ETUDE

Il s'agit d'analyser le curriculum officiel relatif à tous les éléments de ce qui doit être enseigné et qui contribue ou peut contribuer au développement de la pensée algébrique (PA

[*] Université de Montpellier – France – alain.bronner@umontpellier.fr
[**] Université de Montpellier – France – miren.larguier@gmail.com

par la suite). Nous nous appuierons sur les différents textes émanant du ministère de l'éducation nationale en France qui définissent, décrivent, complètent ou commentent le curriculum officiel : textes intitulés respectivement socle, programme et ressources :

> La direction générale de l'enseignement scolaire a publié, en partenariat avec l'inspection générale de l'éducation nationale, un ensemble de ressources pédagogiques pour accompagner la mise en œuvre de ces nouveaux programmes du cycle 2 au cycle 4. (MEN, 2015)

L'objectif de l'étude rapportée dans cet article est de préciser notre méthodologie d'analyse et d'identifier dans les textes *le potentiel d'éléments pertinents pour développer la PA* dans le cadre du curriculum officiel français en lien avec les questions : où se trouvent dans le curriculum les types de tâches et les situations qui favorisent le développement de la PA ? Ces éléments potentiellement intéressants pour développer la PA sont-ils explicitement voulus par les auteurs ou sont-ils implicites et reconnus pertinents par le chercheur ?

III. METHODOLOGIE POUR ANALYSER LE CURRICULUM OFFICIEL

Notre méthodologie d'analyse du curriculum officiel s'inscrit dans la *théorie anthropologique du didactique* (TAD), introduite par Chevallard (1999a), que nous considérons comme pertinente pour étudier et comparer le développement de la pensée algébrique dans divers contextes géographiques, sociaux et politiques. Il s'agit de pouvoir comparer les choix curriculaires de différents pays et de dégager identifier dans les textes *le potentiel d'éléments pertinents pour développer la PA*.

Un préalable à l'analyse de ce potentiel est l'élaboration d'un modèle épistémologique de référence (MER) au sens de Chevallard (2006) pour favoriser l'entrée dans l'algèbre et le développement de la pensée algébrique. Nous y reviendrons dans la section suivante en donnant les éléments essentiels du MER identifiés dans différents travaux de l'OIPA.

Les étapes de la méthodologie d'analyse du curriculum sont les suivantes :

Phase 0 : Développer un MER de l'objet étudié (ici le développement de la PA).

Phase 1 : Repérer les instances et textes officiels, délimiter le moment, la durée et l'étendue de l'entrée dans l'algèbre dans le cursus scolaire. Ces données permettent une étude écologique en lien avec l'échelle de codétermination didactique de Chevallard (1999b). On pourra notamment se référer aux notions d'*habitat* et de *niche*.

Phase 3 : Analyser les éléments relatifs à l'organisation mathématique et didactique en étudiant les questions suivantes :

- Quelles sont les praxéologies (au sens de la TAD) complètes ou non et quelles sont les situations potentiellement pertinentes pour développer la PA en précisant s'il s'agit d'éléments explicites ou non ?
- Quelles sont les raisons d'être (épistémologiques et/ou didactiques) des types de tâches ou des situations repérées précédemment ? Autrement dit qu'est-ce qui les motive ?
- Des éléments de l'organisation didactique apparaissent-elles et lesquels ?

IV. VERS UN MER DE LA PENSEE ALGEBRIQUE

L'émergence d'un modèle épistémologique de référence (MER) pour les études en didactique s'est imposé en TAD : « Étant donné un processus didactique sur un thème mathématique déterminé, la première étape de notre technique d'analyse suppose l'adoption de ce que nous appelons un modèle épistémologique de référence sur le contenu mathématique en jeu. Dans le cadre de la TAD, ce modèle se formule en termes d'organisations ou praxéologies mathématiques. » (Bolea, et al., 2005). Les raisons d'être d'un MER en TAD le font apparaître comme une référence relativement au thème étudié ou à faire construire aux élèves permettant d'analyser et de mettre en perspective autant l'organisation mathématiques (en abrégée OM) savante ou les OM à enseigner, enseignée ou apprise (Bosch et Gascón, 2005).

1. Les travaux en lien avec l'algèbre en vue de la construction du MER

Pour l'instant peu de recherches en France se placent dans le cadre du développement de la pensée algébrique, notamment au niveau de la fin de l'école primaire et du début du collège (cycle 2 et 3). La plupart présentent des modèles globaux d'algèbre quasi-finalisée. On peut notamment citer la recherche de Pilet (2012) qui propose un MER vue comme une OM globale du domaine algébrique, organisée en trois secteurs (niveau d'OM régionales) relatives aux thèmes suivants : les expressions algébriques, les équations et les formules. Ces OM se structurent autour d'OM plus locales où on peut retrouver les types de tâches formelles classiques : simplifier des expressions algébriques, développer des expressions algébriques, factoriser des expressions algébriques, résoudre des équations, étudier une fonction …. Ce sont ainsi les technologies formelles de l'algèbre qui structurent à un haut niveau le MER proposé qui est particulièrement utile au niveau du cycle 4 du collège et au lycée.

Une autre proposition correspond à un processus d'algébrisation successives : « L'algèbre élémentaire y est interprétée comme un *processus d'algébrisation* de praxéologies mathématiques déjà disponibles ou de praxéologies non-mathématiques facilement mathématisables en termes d'opérations sur des grandeurs numériques ou géométriques. » (Ruiz-Munzon et al, 2012)

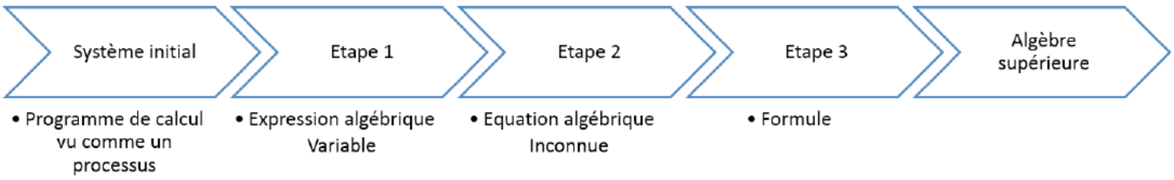

***Figure 1** : processus d'algébrisation de Ruiz-Munzon et al (2012)*

Il s'agit d'un processus dynamique basé sur un système initial relatif à un questionnement sur les programmes de calcul en deux (ibid, 2012) :

Etape 1 : Deux programmes de calcul sont-ils équivalents ?

Etape 2 : Deux programmes de calcul étant donnés, quelle(s) valeur(s) entrer dans chaque programme pour qu'ils renvoient le même résultat ?

2. Un MER pour la pensée algébrique organisé par l'entrée par les types de tâches

Un questionnement méthodologique pour définir un MPR de l'entrée dans l'algèbre s'est posé à nous en s'appuyant à la fois sur les travaux québécois et anglo-saxons sur la pensée algébrique et sur le modèle des praxéologies. De quel niveau praxéologique faut-il partir : définir les types ou genres de tâches ou définir la technologie, voire la théorie ? Nos travaux se situent ainsi dans l'articulation avec le MER proposé par Pilet et Ruiz-Monzon à partir de la question principale : Quels types de tâches pour l'entrée dans l'algèbre et, plus généralement, pour le développement de la pensée algébrique ?

Nous avons identifié de nombreuses situations ou types de tâches favorisant l'entrée dans l'algèbre en nous appuyant sur de nombreux travaux de recherche, comme le travail sur les programmes de calcul sur lequel s'appuie le travail de Ruiz-Monzon *et al* (2012), et que l'on retrouve aussi dans les travaux de Chevallard et Bosch (2012).

D’autres recherches (Vlassis et Demonty, 2002 ; Krysinska, Mercier et Schneider, 2009 ; Radford, 2006) mettent en lumière l’intérêt de problèmes de généralisation pour développer la pensée algébrique. Nous avions présenté au colloque EMF 2015 à Alger une analyse d’une séquence basée sur ce type de problèmes et montré la grande potentialité pour développer la pensée algébrique dès la fin de l’école primaire ou début du collège (Bronner, 2015). Dans cette séquence, le professeur commence par une première situation basée sur des chaînes carrées (figure 2) en demandant d’examiner tout d’abord les premiers cas pour un, deux, trois, cinq, ... La situation initiale concerne ainsi le type de tâches : « Calculer le nombre de constituants élémentaires (tiges) d’une chaîne à mailles carrées connaissant le nombre de mailles ».

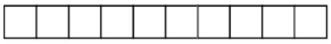

***Figure 2**. Première situation « la maille carrée ».*

Enfin le professeur demande aux élèves de généraliser le travail à n’importe quel nombre de mailles, puis dans à quelle forme de mailles. Nous avons repéré dans le travail des élèves notamment deux types de procédures allant vers une pensée algébrique :

- *Les techniques basées sur des technologies de généralisation explicite :*

Après avoir examiné le cas d’un petit nombre de mailles, la généralisation porte sur une procédure de dénombrement mettant en relation la quantité cherchée avec la variable du problème, autrement-dit le nombre de mailles, en se basant sur une réorganisation spatiale. Cela conduit à des expressions fonctionnelles conformes à $M1 = 2n+(n+1)$ ou $3n + 1$ ou d’autres expressions équivalentes. Mais, un élève de fin de l’école primaire ne produit pas en général une telle expression dans le registre du langage algébrique (Duval, 1993), mais donnent des réponses dans un langage mixte qui associe langage mathématique et langage naturel. Une autre forme de présentation peut être attendue en exposant cette méthode générale sur un exemple générique au sens de Balacheff (1982). Par exemple, pour 144 mailles, il faut 3 fois 144 tiges et une tige de plus ce qui fait en tout : 433 tiges.)

- *Les techniques basées sur des technologies de généralisation implicite :*

Dans ces techniques, l’élève repère une méthode générale pour passer d’une quantité de mailles à la suivante selon un principe de récurrence. Par exemple pour la maille carrée, la généralisation est traduite par un opérateur : quand on ajoute une maille, on ajoute une tige en largeur et 2 tiges en longueur, on ajoute donc 3 tiges. Ici aussi un langage mixte est en général utilisé dans ce type de procédure. L’invariant se focalise sur le passage de la quantité de mailles à celle augmentée d’une unité (de mailles) : Pour trouver le nombre de tiges pour $n + 1$ mailles, on ajoute 3 au nombre de tiges pour n mailles. Cette généralisation demande de calculer la quantité de tiges au fur et à mesure.

Un autre type de problèmes favorisant l’entrée dans l’algèbre, que nous souhaitons prendre en compte dans le MER et développé dans les recherches, concerne les problèmes de partage inéquitable (ou de comparaison) dans le cas de problèmes dit déconnectés, c'est-à-dire, contrairement aux problèmes se résolvant par des procédures arithmétiques, *aucun pont ne peut être établi directement entre les données connues* (Bednarz et Janvier, 1996). Ces travaux (Bednarz et Dufour-Janvier,1992) ont montré une grande potentialité dans le développement de la pensée algébrique avec l’hypothèse qu’ils conduisent l’élève à sortir d’une démarche arithmétique simple de résolution, les poussent à imaginer des raisonnements sophistiqués les faisant entrer dans les raisonnements analytiques (Radford, 2014 et 2015). D’autres études ont confirmé ces potentialités, notamment les enquêtes et analyses élaborées par Marchand et Bednarz (1999 et 2000), Oliveira et Rhéaume (2014), Adihou et al (2015), et montrent que de nombreux élèves sont en mesure de résoudre différents types de problèmes de structure algébrique avant tout enseignement formel de l'algèbre, bien que d'autres ont des difficultés à sortir d'une procédure arithmétique.

Dans le cadre d'une étude ICMI 13 à Hambourg en 2016, Kieran et al (2016) proposent une synthèse du développement de la pensée algébrique dans les premières années de l'école. Ils mettent l'accent sur le changement significatif d'un enseignement traditionnel centré sur le contenu de l'algèbre vers les processus de raisonnement et les représentations mathématiques appropriés pour les jeunes élèves (ibid, p. 4). Ils précisent la nature des premières activités d'algèbre qui favorisent le développement de ces processus et représentations :

> In particular, the main focal themes during the years leading up to the early 2000s included: (i) generalizing related to patterning activity, (ii) generalizing related to properties of operations and numerical structure, (iii) representing relationships among quantities, and (iv) introducing alphanumeric notation. (ibid p. 5)

Nous retrouvons ici mises en avant les situations de généralisation liées aux activités de patterns numériques et géométriques : *By far, generalizing from numerical and geometric patterns witnessed the largest amount of development and research interest* (ibid, p. 6). La deuxième classe d'activités rejoint des travaux que nous avons développés dans le cadre de l'articulation du numérique et de l'algébrique (Chevallard, 1985 ; Bronner, 1997). L'étude des propriétés des opérations ou la justification d'égalités numériques poussent les élèves à entrer dans une pensée algébrique et non à une validation numérique. Ils citent notamment Fujii[1] qui avance que ces justifications d'égalités permettent aux enseignants de construire un pont entre les problèmes arithmétiques et des raisonnements algébriques sans avoir à se fier à la connaissance préalable des expressions littérales. Les deux dernières classes d'activités mettent en avant les représentations des nombres, des mesures et des grandeurs en lien avec la comparaison de quantité ou la résolution de problèmes. Nous ne les retiendrons pas comme des types de tâches, nous considérons que ces connaissances sur les représentations sont essentielles mais qu'elles apparaitront comme éléments de techniques et technologiques au sens de Chevallard (1999a) dans notre modèle praxéologique.

3. Le contour du MER de la pensée algébrique

Ces différentes recherches et nos travaux dans le cadre du réseau OIPA nous amènent à proposer un MER de l'entrée dans l'algèbre organisé autour d'une classification des activités de résolution de problèmes en lien avec l'articulation entre le numérique et l'algébrique, structurée en trois grandes catégories, chacune d'entre elles se décomposant en des genres ou types de tâches spécifiques (la liste n'étant pas exhaustive) :

A. Etude des structures numériques :
    - Réaliser un calcul numérique réfléchi (mental ou en ligne) ou demandant la mise en œuvre d'une règle de calcul (fractions, radicaux, ...) ;
    - Montrer l'égalité de nombres ou d'expressions numériques ;
    - Etudier la structure de certains types de nombres ;
    - Étudier des propriétés arithmétiques (exemple de la somme de 3 entiers consécutifs).

B. Modélisation de situations intra ou extra-mathématiques par des équations
    - Problèmes de composition de mesures (réunion, complémentation, produit cartésien, …) ;
    - Problème de transformation, Problèmes de comparaison ;
    - Problèmes complexes avec comparaison et réunion ;

[1] Fujii, T. (2003). Probing students' understanding of variables through cognitive conflict problems: Is the concept of variable so difficult for students to understand? In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 49–65). Honolulu, HI: PME.

- Problèmes déconnectés de partages inéquitables ;

C. Modélisation de situations intra ou extra-mathématiques par des fonctions (et non par des équations)

- Problèmes de généralisation ;
- Etudes des programmes de calculs.

Nous n'avons pas la place pour développer ici l'élaboration du MER sur le plan des techniques relatives aux différents genres ou types de tâches du point de vue de la pensée algébrique. Les techniques relatives à ces types de tâches doivent être compatibles, voire produites, par une (des) technologie(s) idoine(s) à la pensée algébrique. Ces dernières s'amalgament dans une théorie (au sens de Chevallard, 1999a) de la pensée algébrique. Hassane Squalli, (2015) précise que sur le plan opératoire, la pensée algébrique se déploie au moyen de trois types de composantes : un ensemble de raisonnements particuliers, des manières d'approcher des concepts en jeu dans les activités algébriques, un langage pour communiquer, représenter et opérer sur les représentations … dans le cadre d'activités algébriques spécifiques. Enfin, les éléments techniques et technologiques doivent aussi être conformes à la caractérisation de la pensée algébrique élémentaire selon Radford (2014, 2015)

(1) présence d'indéterminés : la situation mathématique considérée contient de nombres non-connus (inconnues, variables, paramètres, etc.)

(2) dénotation au sens suivant : les nombres indéterminés impliqués dans la situation doivent être nommés ou signifiés d'une certaine manière.

(3) analyticité : les nombres indéterminés sont traités comme s'ils étaient des nombres connus. C'est-à-dire, bien qu'ils ne soient pas connus, les nombres indéterminés sont traités de la même manière que les nombres connus : on les additionne, les soustrait, les multiplie, les divise, etc.

Ce travail est à poursuivre et fait l'objet de débats riches et constructifs entre les diverses communautés de chercheurs dans le réseau OIPA comme on l'a vu au colloque EMF 2015 et au colloque OIPA en mai 2018 à Montréal.

V. QUELQUES RESULTATS DE L'ETUDE DU CURRICULUM

Nous présenterons ici quelques résultats sous forme de tableaux pour le cycle 2 et 3 de l'école élémentaire et du début du collège (classe de 6^{e}) en France. Tout d'abord au niveau de la discipline et des niveaux inférieurs selon l'échelle de codétermination didactique de Yves Chevallard (1999b) nous relevons les habitats au cycle 2 (figure 2) au primaire en France :

D	Secteur	Thème	Sujets
Domaine : nombres et calcul	S1 : Comprendre et utiliser des nombres entiers pour dénombrer, ordonner, repérer, comparer	Comparer, ranger, encadrer, intercaler des nombres entiers, en utilisant les symboles =, ≠,>,<.	Egalité traduisant l'équivalence de deux désignations du même nombre. Sens des symboles =, ≠, <, >.
	S2 : Résoudre des problèmes en utilisant	Résoudre des problèmes […] conduisant à utiliser les quatre opérations	Sens des opérations ; Problèmes relevant des structures additives (addition/soustraction) ; Problèmes relevant des structures multiplicatives, de partages ou de groupements (multiplication/division).

	des nombres entiers et le calcul	Modéliser ces problèmes à l'aide d'écritures mathématiques	Sens des symboles +, −, ×, :
	S3 : Calculer avec des nombres entiers	Elaborer ou choisir des stratégies de calcul à l'oral et à l'écrit.	Propriétés implicites des opérations : 2+9, c'est pareil que 9+2 3 x 5, c'est pareil que 5 x 3 3×5×2, c'est pareil que 3×10.
		Calcul en ligne	Calculer en utilisant des écritures en ligne additives, soustractives, multiplicatives, mixtes.
		Mémoriser des faits numériques et des procédures.	Décompositions additives et multiplicatives

Figure 2 *: les habitats au cycle 2*

Au cycle 3, les habitats de la pensée algébrique apparaissent dans deux domaines « nombres et calcul » et « grandeurs et mesures » :

D	Secteur	Thème	Sujets
Domaine 1 : nombres et calcul	S1 : Utiliser et représenter les grands nombres entiers, des fractions simples, les nombres décimaux	Connaître et utiliser quelques fractions simples	Connaître des égalités entre des fractions simples
	S2 : Calculer avec des nombres entiers et des nombres décimaux	Connaître des propriétés de l'addition, de la soustraction et de la multiplication	Propriétés des opérations : *- 27,9 + 1,2+ 0,8 = 27,9 + 2* *- 3,2 × 25 × 4 = 3,2 × 100* *- 45 × 21 = 45 × 20 + 45* *- 23 × 7 + 23 × 3 = 23 × 10.*
	S3 : Résoudre des problèmes en utilisant des fractions simples, les nombres décimaux et le calcul	Résoudre des problèmes mettant en jeu les quatre opérations	Sens des opérations. Problèmes à une ou plusieurs étapes relevant des structures additive et/ou multiplicative.

Figure 3 *: les habitats au cycle 3 dans le domaine « nombres et calcul »*

D	Secteur	Thème	Sujets
Domaine 2 : Grandeurs et mesures	S1 : Comparer, estimer, mesurer des grandeurs géométriques avec des nombres entiers et des nombres décimaux : longueur (périmètre), aire, volume, angle Utiliser le lexique, les unités, les instruments de mesures spécifiques de ces grandeurs	Calculer le périmètre d'un carré et d'un rectangle, la longueur d'un cercle, en utilisant une formule	Formule du périmètre d'un carré, d'un rectangle. Formule de la longueur d'un cercle.
		Déterminer la mesure de l'aire d'une surface à partir d'un pavage simple ou en utilisant une formule	Formules de l'aire d'un carré, d'un rectangle, d'un triangle, d'un disque.
		Déterminer le volume d'un pavé droit en se rapportant à un dénombrement d'unités (cubes de taille adaptée) ou en utilisant une formule	Formules du volume d'un cube, d'un pavé droit.
	S2 : Résoudre des problèmes impliquant des grandeurs (géométriques, physiques, économiques) en utilisant des nombres	Calculer des périmètres, des aires ou des volumes, en mobilisant ou non, selon les cas, des formules.	Formules donnant : - le périmètre d'un carré, d'un rectangle, la longueur d'un cercle ; - l'aire d'un carré, d'un rectangle,

	entiers et des nombres décimaux		d'un triangle, d'un disque ; - le volume d'un cube, d'un pavé droit.

Figure 4 : les habitats au cycle 3 dans le domaine « grandeurs et mesures »

Nous retrouvons ainsi des potentialités déjà repérés dans les travaux de l'Early algebra (Kieran et al, 2016) et conformes aux types de tâches de notre MER. Par exemple, nous relevons dans le secteur « résoudre des problèmes en utilisant des nombres entiers et le calcul » qu'une grande place est donnée à « l'étude des différentes désignations orales et/ou écrites »,
en particulier aux « écritures en ligne additives/soustractives, multiplicatives, mixtes, en unités de numération, etc. » (MEN, 2015, p. 74). On relève aussi l'explicitation d'exemples de stratégies de calcul en ligne (tableau du cycle 2). Il s'agit d'activités potentiellement intéressantes pour développer le concept d'égalité en tant qu'équivalence, ce qui est explicitement préconisé dans le nouveau programme de 2015, la dénotation des écritures arithmétiques, et le « sens des symboles =, ≠ » (MEN, 2015, p. 75). Ainsi, le types de tâches « calculer en ligne » est mis en avant avec un document ressource (MEN, 2016) :

> « Comme le calcul mental, le calcul en ligne permet à l'élève d'utiliser la richesse de ses connaissances sur le nombre et sur les propriétés des opérations. L'élève est ainsi amené à « faire parler » les nombres, c'est à dire à en envisager diverses écritures, des décompositions additives, multiplicatives ou utilisant les unités de numération. » (Ibid, p. 1)

> « Il [le calcul en ligne] participe […] à la compréhension progressive de la signification du signe « = », à concevoir comme équivalence entre le membre écrit à gauche et le membre écrit à droite, et pas seulement pour donner le résultat d'un calcul. » (Ibid, p. 3)

Par contre, nous pouvons constater que les problèmes de généralisation ne sont pas particulièrement présents, bien qu'une ancienne ressource du collège développe cet aspect, il s'agit pour nous d'un vide didactique (Bronner, 2007).

VI. CONCLUSION

L'analyse du *savoir à enseigner* relative à certains objets d'enseignement ne peut avoir d'intérêt pour un chercheur que si elle peut être mise en parallèle avec un MER, *modèle épistémologique de référence*, qui donne à voir du point de vue du chercheur les éléments essentiels de l'enseignement d'un domaine donné au regard des résultats des recherches. C'est donc la première tâche de l'analyse du curriculum officiel. Mais l'élaboration de ce MER est une tâche complexe sur laquelle plusieurs équipes travaillent. Par ailleurs nos recherches sur les curricula auront des conséquences sur l'élaboration du MER, les deux types de recherches se réaliseront en parallèle. L'analyse curriculaire fait ainsi apparaître les fondements et les raisons d'être des choix d'enseignement, qu'ils soient explicites, ou bien qu'ils soient implicitement convoqués. Enfin l'ambition de ce travail d'élaboration d'une méthodologie est de permettre la comparaison des choix curriculaires de différents pays concernant le développement de la pensée algébrique. Cette méthodologie et le MER issus de la TAD permettront ainsi d'analyser et de mettre en perspective les organisations mathématiques à favoriser pour ce développement, de faire émerger de nouvelles questions ou des types de tâches potentiellement intéressants, et de repérer des vides didactiques (Bronner, 2007) et des besoins d'apprentissages ignorés, mais aussi des potentialités.

REFERENCES

Adihou A., Squalli H., Saboya M., Tremblay M., Lapointe A. (2015) Analyse des raisonnements d'élèves à travers des résolutions de problèmes de comparaison. In Theis L. (Ed.) Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 206-219.

Balacheff, N. (1982). Preuve et démonstration en mathématiques au collège. *Recherches en didactique des mathématiques*, 3(3), 261-304.

Bednarz, N., et Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. Dans N. Bednarz, C. Kieran, et L. Lee (Éd.), *Approaches to algebra: perspectives for research and teaching* (pp. 115-136). Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Bednarz N. et Dufour-Janvier B. (1992) L'enseignement de l'algèbre au secondaire : une caractérisation du scénario actuel et des problèmes qu'il pose aux élèves. Actes du colloque international du 20 au 22 mai 1992 : didactique des mathématiques, formation normale des enseignants. École normale supérieur Marrakech. p. 21-40.

Bolea P., Bosch M., García F. J., Gascón J., Ruiz-Higueras L., Sierra T. A. (2005) Analyse de « La mesure en CM1 » d'après la Théorie Anthropologique du Didactique, dans M.H. Salin, P. Clanché et B. Sarrazy (eds.), Sur la Théorie des Situations Didactiques (Hommage à Guy Brousssseau). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bosch, M. et Gascon, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. *In* Mercier A. & Margolinas C. (Eds) *Balises pour la didactique des mathématiques* (p. 197-122). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bronner, A. (2007). *La question du numérique : Le numérique en question*, Habilitation à Diriger les Recherches, Université Montpellier 2.

Bronner A., (2015). Développement de la pensée algébrique avant la lettre - Apport des problèmes de généralisation et d'une analyse praxéologique. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 247-264.

Chevallard, Y. (1985) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège - Première partie. L'évolution de la transposition didactique. *Petit x*, *5*, 51-94.

Chevallard, Y. (1999a). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherches en didactique des mathématiques, 19(2), 221-266.

Chevallard, Y. (1999b). Organiser l'étude. Cours 3. Écologie & régulation, Actes de la Xème École de didactique des mathématiques, Corps, La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2006). Former des professeurs, construire la profession. Journées scientifiques sur la formation des enseignants du secondaire. Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation 17 mai 2006 http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Former_des_professeurs_construire_la_profession.pdf

Chevallard, Y. et Bosch, M. (2012). L'algèbre entre effacement et réaffirmation. Aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. *In* L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier, A. Robert (coord.) *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives*. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (numéro spécial) (pp. 19-39). Grenoble : La Pensée sauvage.

Coulange L., Drouhard J-P. et al. (2012). Enseignement de l'algèbre élémentaire, bilan et perspectives. Recherches en didactique des mathématiques, numéro spécial hors-série. La pensée sauvage.

Duval, R. (1993), Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, *Annales de didactiques et de sciences cognitives*, Vol. 5, ULP, IREM de Strasbourg.

Kahane, J.P., (2002). L'enseignement des sciences mathématiques. Paris : Odile Jacob

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D., Ng, S. F. (2016). *Early Algebra. Research into its Nature, its Learning, its Teaching*. SpringerOpen.

Krysinska M., Mercier A., Schneider M. (2009). Problèmes de dénombrement et émergence de premiers modèles fonctionnels. Recherches en Didactique des Mathématiques, n° 29 (3), 247 – 304.

Marchand, P., et Bednarz, N. (1999). L'enseignement de l'algèbre au secondaire: une analyse des problèmes présentés aux élèves. *Bulletin AMQ, 39*(4), 30‑42.

Marchand, P., et Bednarz, N. (2000). Développement de l'algèbre dans un contexte de résolution de problèmes. *Bulletin AMQ*, *40*(4), 15‑25.

Ministère de l'Éducation Nationale (2015) Programmes d'enseignement du cycle des apprentissages fondamentaux (cycle 2), du cycle de consolidation (cycle 3) et du cycle des approfondissements (cycle 4). (BO spécial n°11 du 26 novembre 2015).

Ministère de l'Éducation Nationale (2016) Le calcul en ligne au cycle 3, Ressource Eduscol

http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Mathematiques/87/9/RA16_C2_MATHS_calcul_en_ligne_587879.pdf

Oliveira, I., et Rhéaume, S. (2014). Comment s'y prennent-ils? La résolution de problèmes de partage inéquitable par des élèves avant enseignement formel de l'algèbre. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *14*(4), 404‑423.

Pilet, J. (2012). Parcours d'enseignement différencié appuyés sur un diagnostic en algèbre élémentaire à la fin de la scolarité obligatoire : modélisation, implémentation dans une plateforme en ligne et évaluation. Thèse de doctorat, Université Paris-Diderot.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. Dans S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, A. Méndez (Eds.), Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter, Mérida: Universidad Pedagógica Nacional, November 9 – 12, Vol. 1, pp. 2-21.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26*(2), 257-277.

Radford, L. (2015). La pensée mathématique du point de vue de la théorie de l'objectivation. *Actes du congrès Espace Mathématique Francophone (EMF)*. Alger, octobre 2015.

Ruiz-Munzón, N., Matheron, Y., Bosch, M. et Gascón, J. (2012). Autour de l'algèbre : les entiers relatifs et la modélisation algébrico-fonctionnelle. *In* L. Coulange, J.-P. Drouhard, J.-L. Dorier, A. Robert (coord.) *Enseignement de l'algèbre élémentaire. Bilan et perspectives. Recherches en Didactique des Mathématiques* (numéro spécial) (pp. 81-101). Grenoble : la Pensée sauvage.

Squalli, H. (2015). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – GT3, pp. 346-356.

Squalli, H., Mary, C. & Marchand, P. (2011). Orientations curriculaires dans l'introduction de l'algèbre : cas du Québec et de l'Ontario. Dans Lebeaume, J., Hasni, A. et Isabelle Harlé, I. (eds). Recherches et curriculums : le cas de l'enseignement des mathématiques, sciences et technologie. Bruxelles : De Boeck. pp. 65-78

Vlassis J. & Demonty, I. (2002). L'algèbre par des situations-problèmes : au début du secondaire. Bruxelles : De Boeck.