ANALYSE DES CONTRÔLES LORS DE LA RÉSOLUTION ALGORITHMIQUE OU MATHÉMATIQUE D'UN PROBLÈME

BEAUVOIR* Sylvain

Résumé – Étude du raisonnement algorithmique et de son articulation avec le raisonnement mathématique par l'analyse des structures de contrôle mobilisées lors de la résolution des problèmes issus du projet Euler.

Mots-clefs : algorithme, résolution de problèmes, raisonnement, pensée algorithmique

Abstract – A study of the algorithmic reasoning and its connection with mathematical reasoning through an analysis of the control tools used in solving problems selected from the Euler project.

Keywords: algorithm, problem solving, reasoning, algorithmic thinking

I. INTRODUCTION

Fin 2014, le ministère de l'éducation nationale français a présenté « la stratégie mathématique », un ensemble de mesures visant à améliorer le niveau des élèves. On peut noter la mobilisation de l'algorithmique comme nouvel objet d'enseignement.

> L'algorithmique servira, aux côtés de la géométrie, de support à la pratique du raisonnement déductif, à l'image de ce qui se fait dans bien d'autres pays. (Ministère de l'éducation nationale, 2014)

Le raisonnement algorithmique y est alors affiché comme une déclinaison d'un raisonnement classique des mathématiques. Pourtant, ce lien étroit entre raisonnement mathématique et raisonnement algorithmique, nous semble à étudier et fait l'objet de notre recherche. Plus précisément, nous avons questionné la possibilité de construire un outil méthodologique qui permette d'identifier puis d'analyser le raisonnement en mathématique et en algorithmique lors de la résolution de problèmes.

II. RAISONNEMENT ET RESOLUTION DE PROBLEME

Raisonner est de par nature une entreprise complexe, souvent implicite ; analyser cette tâche nécessite donc de réfléchir à une grille de lecture, à des indicateurs observables pour objectiver ce processus. La recherche en didactique des mathématiques fournit des cadres théoriques qui permettent cela. Nous supposerons donc que ces cadres, ou du moins l'un d'entre eux, permettent aussi d'analyser le raisonnement algorithmique.

Tout d'abord, il nous faut clarifier la notion d'algorithme. Nous retiendrons la définition de Modeste (2012) qui relie clairement celle-ci à la résolution de problèmes.

> Un algorithme est une procédure de résolution de problème, s'appliquant à une famille d'instances du problème et produisant, en un nombre fini d'étapes constructives, effectives, non ambiguës et organisées, la réponse au problème pour toute instance de cette famille. (Modeste, 2012)

C'est donc le processus mental lors de ce type de tâches qu'il nous faut observer. Pour ce faire, nous avons choisi, comme l'a fait Giroud (2011), d'étudier les problèmes comme des concepts au sens de Vergnaud.

Nous considérons que le concept-problème sur un problème P est composée des éléments suivants :

- l'ensemble des problèmes $\mathcal{P}$ qui donnent du sens à P, nous parlerons d'espace problème ;
- l'ensemble des invariants opératoires $\mathcal{I}$ qui correspondent aux connaissances sur lesquelles repose l'action du sujet en situation de résolution d'un élément de $\mathcal{P}$;

* IMAG, Université de Montpellier, CNRS, France, Projet ANR DEMaIn [ANR-16-CE38-0006-01]

– l'ensemble des représentations $\mathcal{R}$ que l'on peut associer aux éléments de $\mathcal{P}$. (Giroud, 2011)

Notre intérêt portant sur le raisonnement lors de la résolution de problèmes, notre regard doit donc se concentrer sur l'ensemble des invariants opératoires qui guident l'action du sujet. Nous avons donc besoin d'un cadre méthodologique plus fin qui permette son analyse. Balacheff et Margolinas (2005) proposent une extension du modèle de concept, appelé modèle cK¢, en spécifiant les invariants liés au concept. L'ensemble $\mathcal{I}$ est ainsi remplacé par :

– un ensemble d'opérateurs qui permettent de transformer un problème en un autre ;
– $\sum$ une structure de contrôle qui assure la non contradiction de la conception et contient des outils de décision sur la légitimité de l'emploi d'un opérateur ou sur l'état (résolu ou non) d'un problème.

Analyser le raisonnement lors d'une résolution de problème correspond donc, pour nous, à mettre en évidence cette structure de contrôle, ainsi décrite, qui guide l'action et qui permet de s'assurer de la résolution complète du problème.

Ainsi nous formulons l'hypothèse suivante : les cadres théoriques du concept-problème étendus au modèle cK¢, permettent l'analyse du raisonnement lors de la résolution d'un problème, qu'elle soit mathématique ou algorithmique.

III. ANALYSE DES PROBLEMES DU PROJET EULER

Pour mettre à l'épreuve notre hypothèse de recherche, nous avons fait le choix de nous intéresser à des problèmes suffisamment riches, c'est-à-dire permettant plusieurs types de résolutions dont une résolution algorithmique. Nous avons alors puisé dans les problèmes issus du « Projet Euler » [1], par exemple :

> Problem 1 – If we list all the natural numbers below 10 that are multiples of 3 or 5, we get 3, 5, 6 and 9. The sum of these multiples is 23. Find the sum of all the multiples of 3 or 5 below 1000.

Nous travail a consisté à faire l'analyse à priori de ces problèmes. Tout d'abord, nous avons recueillis plusieurs solutions possibles à ce problème :

– une solution mathématique se basant sur la formule de la somme des éléments d'une suite arithmétique ;
– une solution algorithmique qui consiste à énumérer tous les nombres inférieurs à 1000, de tester leur divisibilité par 3 ou 5 et d'accumuler, le cas échéant leur valeur ;
– une autre solution algorithmique qui permet de générer tous les multiples de 3 ou de 5 inférieurs à 1000, puis d'en faire leur somme.

Ensuite, nous avons, en nous appuyant sur les cadres théoriques déjà évoqués, tenté de mettre en évidence les opérateurs et les contrôles qui semblent avoir guidé les résolutions du problème.

Par exemple, la seconde résolution algorithmique de notre problème pourrait être sa décomposition en 3 sous-problèmes : comment générer la liste des nombres inférieurs à 1000 ; comment tester si un nombre est un multiple de 3 ou 5 et enfin comment calculer la somme d'une liste de nombres. Ensuite, la résolution de chacun d'eux va mobiliser des outils algorithmiques (boucles, instructions conditionnelles) en fonction de la tâche à accomplir.

Nous nous sommes enfin inspirés de nouveau de Giroud (2012) pour représenter sous forme de schémas les liens qui existent entre contrôles et opérateurs. Nous présentons ces

---

[1] https://projecteuler.net - Série de défis pouvant être résolus grâce aux mathématiques ou à l'algorithmique.

résultats en annexe de ce document. Ils nous ont permis déjà d'établir des similitudes suivant les différentes résolutions.

IV. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Ainsi, nous pouvons dire que les modèles du concept-problème et cK¢ nous semblent pertinents pour éclairer et décrire le raisonnement, qu'il soit algorithmique ou mathématique. La représentation sous forme de schéma, couplé à notre modèle, permet de mettre en lumière la structure de la résolution d'un problème et peut être un outil éclairant d'analyse à priori.

Il est évident que ce travail, n'en est qu'à ses prémices, et que de nombreuses perspectives s'offrent à nous pour le prolonger. Dans un premier temps, nous souhaiterions lui donner une dimension plus expérimentale en utilisant notre outil pour analyser et mettre en évidence les raisonnements d'élèves lors de mise situation.

Ensuite notre travail pourrait de plusieurs manières aider l'enseignement et l'apprentissage de l'algorithmique. Une classification entre les opérateurs algorithmiques (boucle « POUR », boucle « TANT QUE », …) et les contrôles liés semble possible et porteuse de sens, tout comme identifier, grâce à cette schématisation, les problèmes relevant de résolutions similaires.

Enfin nous pourrions comparer dans les pratiques enseignantes, la prise en compte des contrôles et des opérateurs selon que l'on soit en mathématique ou en algorithmique.

REFERENCES

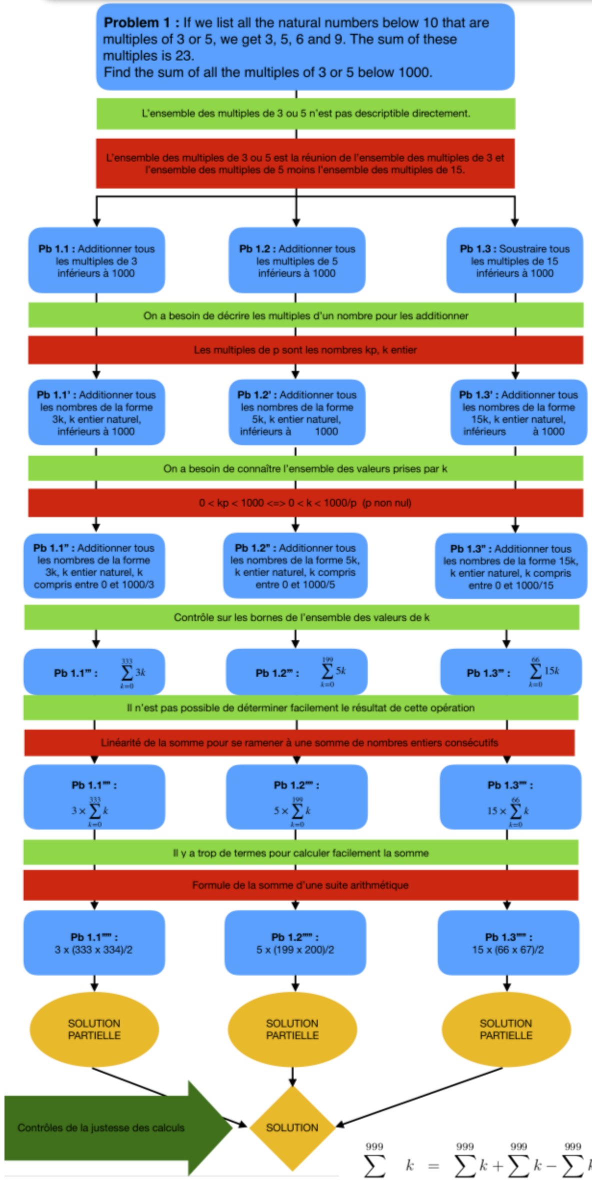
Balacheff, N., & Margolinas, C. (2005). cK¢ Modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. In A. Mercier & C. Margolinas (Eds.), *Balises pour la didactique des mathématiques* (p. 1-32). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Giroud, N. (2011) *Etude de la démarche expérimentale dans les situations de recherche pour la classe*. Thèse de doctorat. Université de Grenoble.

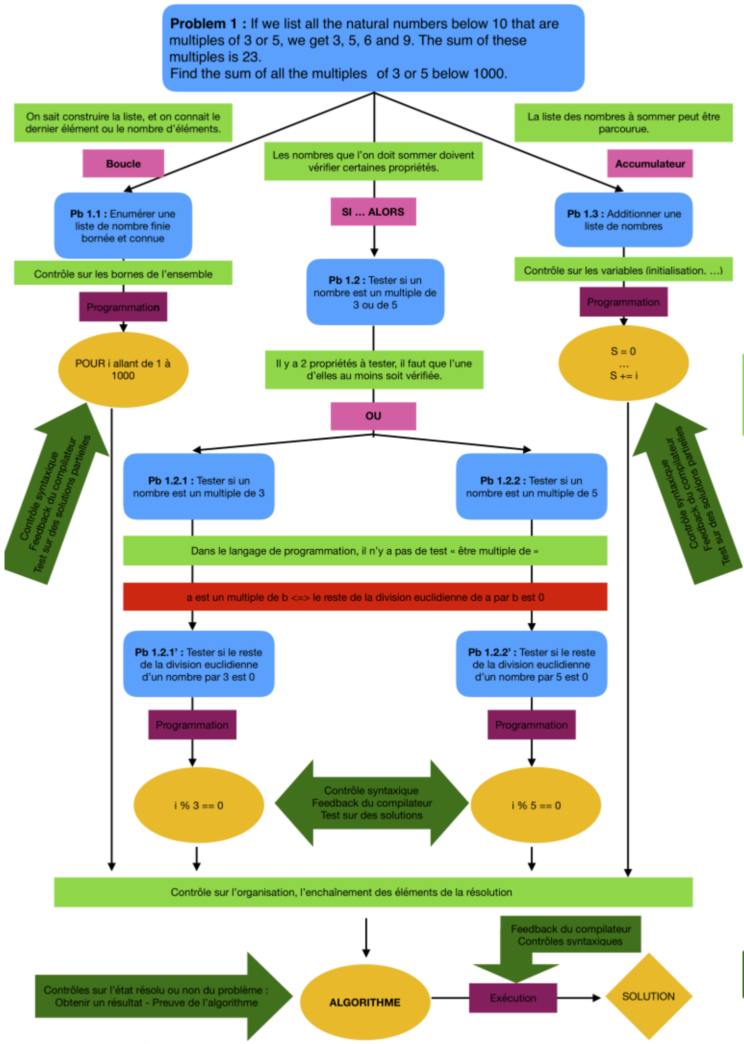
Ministère de l'éducation nationale. (2014) *Stratégie mathématique* (Dossier de presse). Consulté à l'adresse : http://cache.media.education.gouv.fr/file/12_Decembre/30/2/DP-l-ecole-change-avec-vous-strategie-mathematiques_373302.pdf

Modeste, S. (2012) *Enseigner l'algorithme pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ?* Thèse de doctorat. Université de Grenoble.

Mise en œuvre du cadre théorique pour l'analyse de problèmes : *Les problèmes du projet Euler (projecteuler.net)*



$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{k=1\\ 3|k \text{ ou } 5|k}}^{999} k &= \sum_{\substack{k=1\\3|k}}^{999} k + \sum_{\substack{k=1\\5|k}}^{999} k - \sum_{\substack{k=1\\15|k}}^{999} k \\
&= \sum_{i=1}^{333} 3k + \sum_{i=1}^{199} 5k - \sum_{i=1}^{66} 15k \\
&= 3\sum_{i=1}^{333} k + 5\sum_{i=1}^{199} k - 15\sum_{i=1}^{66} k \\
&= 3 \times \frac{333 \times 334}{2} + 5 \times \frac{199 \times 200}{2} - 15 \times \frac{66 \times 67}{2} \\
&= 233168
\end{aligned}
$$



$a = 0$
pour i allant de 1 à 1000 **faire**
  si $i\%3 == 0$ ou $i\%5 == 0$ **alors**
    $a = a + i$
  fin du si
fin du pour

$a = 0$
$i = 0$
tant que $i \leqslant 1000$ **faire**
  $a = a + i$
  $i = i + 3$
fin du tant que
$i = 0$
tant que $i \leqslant 1000$ **faire**
  $a = a + i$
  $i = i + 5$
fin du tant que
$i = 0$
tant que $i \leqslant 1000$ **faire**
  $a = a - i$
  $i = i + 15$
fin du tant que

LEGENDE :

- en bleu, le problème de départ et les sous-problèmes qui en découlent ;
- en vert, les contrôles qui guident l'action du sujet ;
- par une flèche verte foncée, les contrôles qui assurent de l'état (résolu ou non) d'un problème ;
- en rouge ou rose ; les opérateurs qui permettent de transformer un problème en un (ou des) autre(s) ;
- en jaune la solution au problème ou les solutions intermédiaires aux sous-problèmes.