ENTRE PROBABILITÉS ET STATISTIQUES : UN JEU ALGORITHMIQUE POUR SIMULER LA FLUCTUATION D'ÉCHANTILLONNAGE

TRUNKENWALD* Jannick

Résumé – Cette communication aborde l'enseignement de la fluctuation d'échantillonnage en classe de seconde. Il s'agit d'une analyse a priori de la simulation algorithmique d'un lancer de dés. Les dimensions instrumentale, sémiotique, et discursive sont mises en perspective avec trois domaines en interaction : les probabilités, les statistiques, et l'algorithmique. La réflexion doit être expérimentée dans le cadre de formations destinées aux lycées privés algériens présentant le baccalauréat français.

Mots-clefs : (mathématiques, algorithmique, simulation, échantillonnage, probabilités)

Abstract –This communication adresses the teaching of sampling fluctuation in fifth year of high school. It's about the analysis a priori of the simulation algorithmics of a roll of dices. The instrumental, semiotic, and discursive dimensions are put in perspective with three domains in interaction : the probability, the statistics, and the algorithmics. The reflection must be experimented within the framework of trainings intended for the Algerian private high schools presenting the french high school diploma

Keywords: mathematics, algorithmic, simulation, sampling, probability.

INTRODUCTION

En France, la notion d'intervalle de fluctuation est abordée en seconde. En l'absence de référentiel théorique, son approche expérimentale est « facilitée » par un emploi de l'informatique. Nous avions organisé en 2017 une formation courte visant l'introduction en classe de l'approche fréquentiste. Une nouvelle expérimentation de ce dispositif est en cours, auprès d'enseignants de mathématiques issus d'un réseau de lycées privés algériens. Nous n'exposons ici que la première situation à laquelle les stagiaires ont été confrontés. Et seules les considérations d'ordre didactique ayant guidé notre réflexion lors du choix de cet énoncé, ainsi que l'analyse a priori du travail mathématique en jeu, sont ici présentées.

I. UNE SITUATION POUR ABORDER L'APPROCHE FRÉQUENTISTE

1. Objectif

Notre réflexion est orientée par l'attendu institutionnel ci-dessous :

> « Les questions de fluctuation d'échantillonnage constituent un axe important de la formation du futur citoyen. (…) On peut, par expérimentation et simulation, faire observer aux élèves que les échantillons de taille n obtenus à partir d'un modèle de Bernoulli ont, pour environ 95% d'entre eux, des fréquences d'apparition du nombre 1 qui fluctuent dans un intervalle centré en p et d'amplitude $\frac{2}{\sqrt{n}}$. (…) Pour p donné, on peut faire calculer les bornes de cet intervalle pour quelques valeurs de n, et remarquer qu'il faut multiplier la taille de l'échantillon par k² pour diviser par k l'amplitude de l'intervalle. » (Ressources pour la classe de seconde, Probabilités et statistiques, Juin 2009, Eduscol).

Pour établir l'intervalle de fluctuation en 2nde, l'absence de justification formelle a été abordée par Parzysz (2009) :

> « l'accès à la notion de modèle qui est une finalité visée à terme par le cycle terminal, peut être préparé par l'étude et la simulation d'expériences aléatoires diverses correspondants au même modèle probabiliste. La comparaison des procédures, des tableaux et des hypothèses sous-jacentes doit permettre aux élèves de se convaincre de l'analogie que présentent ces expériences sous leurs apparences diverses, et de déboucher sur la notion de schéma d'expérience, constituant en quelque sorte une classe d'équivalence d'expériences aléatoires » (Parzysz, 2009, p. 102).

* LDAR – France- jannick.trunkenwald@yahoo.fr

Nechache (2016) aborde aussi ces questions en présentant le cycle de modélisation d’un modèle mathématique de type numérique :

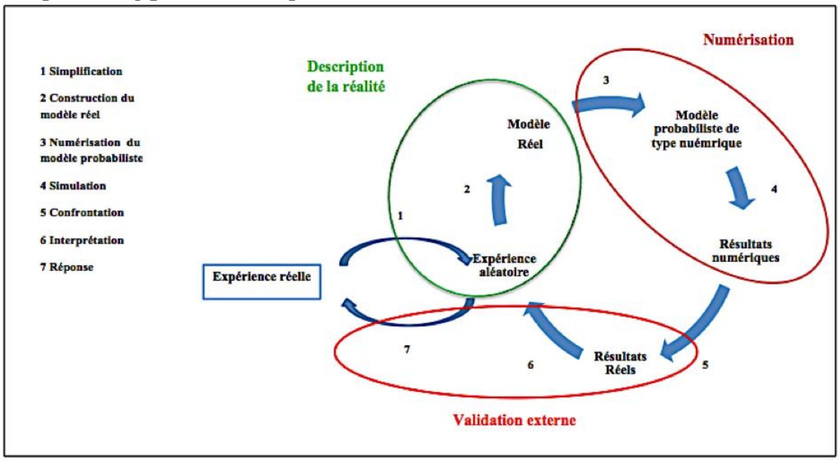

Figure 1 *– Cycle de modélisation avec un modèle probabiliste de type numérique (Nechache , 2016)*

L’expérience réelle est d’abord simplifiée sous forme d’une expérience aléatoire permettant d’envisager un premier modèle probabiliste réel. Celui-ci est alors traduit en modèle numérique pour la simulation. L’exécution de ce programme de simulation donne une réponse, qui est d’abord interprété par rapport au modèle réel, puis interprété en regard de l’expérience aléatoire. L’expérience aléatoire peut être adaptée suivant l’information apportée à l’expérience réelle. Un nouveau modèle réel peut aussi être envisagé pour affiner la compréhension de l’expérience réelle (ce qui correspond alors à un nouveau cycle).
Nechache souligne cependant une difficulté liée à ce type de modèle numérique :

> Dans l’enseignement secondaire, la construction du modèle probabiliste de type numérique est basée sur des connaissances qui ne sont pas disponibles dans l’espace de travail personnel des élèves. C’est pourquoi, la construction de ce modèle est habituellement prise en charge par le professeur qui laisse aux élèves l’exécution de la simulation. (Nechache, 2016)

Nous souhaitons aborder cette problématique spécifique d’une réalisation du programme de simulation qui serait conjointe à son exploitation d’un point de vue probabiliste. Nous formulons l’hypothèse que : « le modèle final simulant la fluctuation d’échantillonnage est élaboré dans de meilleures conditions si on lui fait subir plusieurs cycles de modélisations. » Et nous chercherons à déduire la nature de ces cycles de l’analyse qui va suivre.

2. *Énoncé choisi*

L’interaction de plusieurs domaines mathématiques, en temps limité, nous a incité à concevoir une situation initiale souple et classique, afin de faciliter la confirmation par les stagiaires, et la validation du résultat obtenu par simulation.

<u>Énoncé :</u>

- **Un jeu A consiste à lancer simultanément deux dés cubiques équilibrés numérotés chacun de 1 à 6. On gagne à ce jeu si la somme des résultats affichés sur les deux dés est supérieure ou égale à 9 ?**
- **Un jeu B consiste à prélever au hasard un jeton dans un sac qui contient 8 jetons blancs et 16 jetons rouges. On gagne à ce jeu si on obtient un jeton blanc.**

Pour quel jeu a-t-on le plus de chances de gagner ?

L’approche laplacienne du lancer des dés consiste à modifier l’univers initial constitué de sommes possibles non équiprobables, pour décrire un autre univers aux issues équiprobables (couples de valeurs de chaque dé). La probabilité quantifie un degré de certitude, en se distinguant de la notion d’évènement. On peut finalement s’attendre aux erreurs suivantes :

- Une fausse équiprobabilité portant sur les différentes sommes possibles allant de 2 à 12. Ce qui fournirait le résultat erroné de 4/11 pour la probabilité de gagner au jeu A.
- Une autre erreur consistant à considérer les valeurs allant de 1 à 12 pour la somme (alors que le plus petit résultat possible est 2). Ce qui fournirait le résultat erroné 4/12.

Dans le cas du biais d'équiprobabilité, le résultat erroné de 4/11 dépasse 8/24=1/3. Et il apparaîtrait alors plus aisé de gagner au jeu A qu'au jeu B. Alors que le jeu B est en réalité plus avantageux. En effet, voici l'univers formé par tous les couples possibles de résultats des dés : Ω={(1 ;1) ;(1 ;2) ;(1 ;3) ;(1 ;4) ;(1 ;5) ;(1 ;6) ;(2 ;1) ;(2 ;2) ;(2 ;3) ;(2 ;4) ;(2 ;5) ;(2 ;6) ; (3 ;1) ;(3 ;2) ;(3 ;3) ;(3 ;4) ;(3 ;5) ;(3 ;6) ;(4 ;1) ;(4 ;2) ;(4 ;3) ;(4 ;4) ;(4 ;5) ;(4 ;6) ;(5 ;1) ; (5 ;2) ;(5 ;3) ;(5 ;4) ;(5 ;5) ;(5 ;6) ;(6 ;1) ;(6 ;2) ;(6 ;3) ;(6 ;4) ;(6 ;5) ;(6 ;6)}
En notant E l'évènement : « La somme des résultats des deux dés est supérieure ou égale à 9 ».
On a : E = {(3 ;6) ;(4 ;5) ;(5 ;4) ;(6 ;3) ;(4 ;6) ;(5 ;5) ;(5 ;6) ;(4 ;6) ;(5 ;6) ;(6 ;6)}
Et par équiprobabilité dans Ω, on obtient P(E) = 10/36 = 5/18 < 1/3. Ce qui permet de confronter le bon résultat avec la réponse erronée découlant du biais d'équiprobabilité.
Sans détailler davantage l'approche laplacienne, nous allons désormais restreindre notre propos sur l'approche fréquentiste, dont le paragraphe suivant présente une première étude.

3. *Étude des praxéologies en jeu*

Notre tâche consiste à estimer la probabilité que la somme de deux dés soit supérieure ou égale à 9. Notons la t_1. Le type de tâche T correspondant tient compte de notre institution I de la classe de 2^{nde}, et de l'organisation mathématique locale (OM_E) liée à la fluctuation d'échantillonnage. Ce qui nous amène à une répétition réelle de l'expérience aléatoire, ou à une simulation de type numérique exploitant le générateur pseudo-aléatoire de la machine. Ainsi, pour la tâche t_1 l'expérience aléatoire peut être simulée à partir de la variable aléatoire sous-jacente : Alea(6)+Alea(6). Le type T est donc la classe des tâches pouvant se résoudre par approche fréquentiste simulée, dans les mêmes conditions de difficulté que la tâche t_1 : c'est-à-dire lorsqu'une simple instruction de calcul en ligne permet une modélisation numérique du résultat observé lors de l'expérience aléatoire. Par exemple :

- t_2 : En lançant trois dés (au lieu de deux). Modèle numérique : Alea(6)+Alea(6)+Alea(6).
- t_3 : Déterminer la probabilité que la distance entre deux points choisis au hasard sur un segment de longueur 1 dépasse 1/2. Modèle numérique : Abs(Alea()-Alea()).

Plusieurs techniques permettent de résoudre le type de tâche T au sein de l'institution I :

- τ_1 : Approche fréquentiste réalisée en répétant l'expérience aléatoire réelle.
- τ_2 : Approche fréquentiste réalisée en répétant l'expérience aléatoire simulée.
- τ_3 : Approche fréquentiste par simulation algorithmique d'une répétition de l'expérience aléatoire pour en déduire une fréquence des succès.
- τ_4 : Approche fréquentiste par simulation algorithmique d'une fluctuation d'échantillonnage (nuage de points représentants plusieurs fréquences).
- τ_5 : Approche fréquentiste finalisée en exploitant l'intervalle de fluctuation.

Prenons en considération le discours sous-jacent sur la technique :

> On entend par technologie (…) un discours ayant pour objet premier de justifier « rationnellement » la technique (…) le style de rationalité varie bien entendu (…) de sorte qu'une rationalité institutionnelle pourra apparaître… peu rationnelle dans une autre institution. (Chevallard, 1998)

Ce principe relatif de « rationalité » se rattache d'ailleurs à l'idée de paradigme probabiliste abordée par Parzysz dont le premier niveau (P1) est évoqué en ces termes :

> « des observations permettant d'attribuer une chance d'apparition à chacune des différentes issues » (Parzysz, 2014, p. 68).

Dans notre institution I, la description d'un protocole expérimental probabiliste, ainsi qu'une justification de l'intervalle de fluctuation basée sur l'observation (raisonnement de type inductif), entrent dans ce cadre de rationalité. Nous pouvons donc en déduire les technologies sous-jacentes aux techniques respectives τ_1 τ_2 , τ_3 , τ_4 , et τ_5 :

- θ_1 : le principe intuitif de la loi des grands nombres.
- θ_2 : le principe d'équivalence de l'expérience aléatoire réelle et de sa simulation.
- θ_3 : la structure algorithmique des programmes de simulation d'une fréquence des succès.
- θ_4 : la structure algorithmique des programmes de simulation d'un nuage de fréquences.
- θ_5 : L'énoncé de l'intervalle de fluctuation.

θ_1 , θ_2 , θ_3 , et θ_4 sont des embryons de technologie issues des techniques τ_1 , τ_2 , τ_3 , τ_4. La technologie θ_5 , la plus avancée dans I, incarne la théorie sous-jacente notée Θ.
Ces technologies sont productrices de nouvelles techniques pouvant traiter d'autre types de tâches. On peut exploiter θ_3 pour élaborer la technique de simulation d'une loi géométrique tronquée, ou encore exploiter θ_5 pour élaborer une technique de prise de décision…
Mais la justification empirique de θ_5 passe par une exploitation des autres technologies citées à travers les techniques correspondantes. Cela nous ramène à l'idée de tâche problématique :

> Dans un univers de tâches routinières, surgissent (…) des tâches problématiques (…) qui sont alors des types de problèmes (…) autour desquels de nouvelles praxéologies devront se constituer. (Chevallard 1998)

Cette situation de pénurie praxéologique se vérifie en abordant dans I la fluctuation d'échantillonnage. Il s'agit de créer une organisation praxéologique encore inédite $O=[T/\tau_i/\theta_i/\Theta]_i$. La question « comment créer *O* » devient alors une organisation didactique *dO.* Nous décrivons ci-dessous les moments d'études correspondant à *dO* :

- Moment 1: Première rencontre avec O en expérimentant T à l'aide de la technique τ_1 qui permet d'appréhender la nature du hasard, et de mettre l'intuition à l'épreuve.
- Moment 2 : Exploration du type de tâche T. L'élaboration de techniques étant au cœur de l'activité mathématique, τ_1 peut être affinée, puis comparée à τ_2 , puis accélérée avec τ_3 …
- Moment 3: Constitution de l'environnement technologico-théorique. Reproduction du travail avec d'autres tâches pour faire émerger les premiers embryons de technologie.
- Moment 4: Travail de la technique pour dépasser les embryons de technologies. Aboutissement de τ_4 en exploitant θ_4 pour mettre en évidence θ_5 à l'aide de conjectures.
- Moment 5: Institutionnalisation de θ_5 . Cela va permettre une émergence de la théorie Θ, et la distingue de certains éléments qui ont contribué à sa construction.
- Moment 6 : l'évaluation.

Cette étude envisageant à travers l'outil TAD un renforcement progressif et une évolution des techniques successives, montre le rôle particulier joué par le travail algorithmique, qui peut souvent être réinvesti ou adapté sans que toutes ses étapes soient à reconstruire. Et cela se vérifie encore davantage pour les programmes de simulations. Nous pouvons citer Chevallard pour un aspect plus général de cette idée :

> En réalité l'étude et la résolution d'un problème d'un type déterminé va toujours de pair avec la constitution d'au-moins un embryon de technique, à partir de quoi une technique plus développée pourra éventuellement émerger (…) ainsi se noue une dialectique fondamentale : étudier des problèmes est un moyen permettant de créer et de mettre au point une technique relative aux problèmes de même type, technique qui elle-même sera ensuite le moyen de résoudre de manière quasi routinière des problèmes de ce type. (Chevallard, 1998)

La partie suivante ne concerne que la simulation, à l'aide d'une approche algorithmique, du phénomène de fluctuation d'échantillonnage. L'enchaînement des moments didactiques va guider notre analyse du travail mathématique associé aux structurations successives des techniques τ_2 , τ_3 , τ_4 , puis τ_5 et de leurs avatars technologiques sur lesquels elles vont successivement s'appuyer.

II. ANALYSE DE LA NATURE DU TRAVAIL MATHÉMATIQUE

1. *L'espace de Travail Mathématique (ETM)*

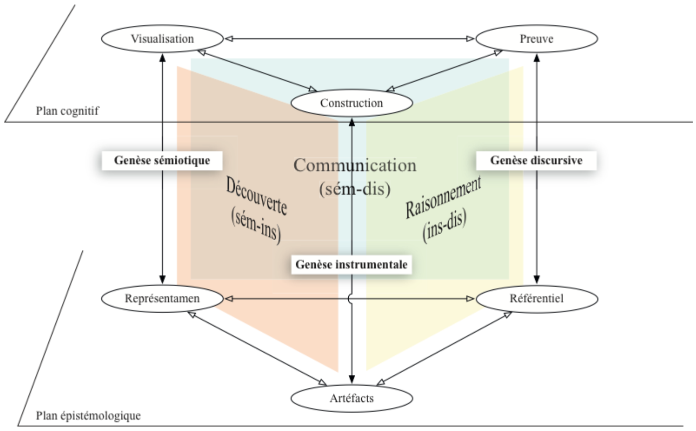

Figure 2 *– L'Espace de Travail Mathématique (Kuzniak & Richard, 2014).*

L'outil méthodologique ETM (Kuzniak 2011) va nous aider à décomposer les perceptions intellectuelles en jeu lors de l'activité mathématique. Trois dimensions instrumentale, sémiotique, et discursive sont prises en compte. Chacune engendre une relation dynamique entre le plan épistémologique et le plan cognitif. Les outils technologiques (artefacts), sémiotiques (representamen), et théoriques (référentiel) du plan épistémologique, peuvent alors être exploités à l'aide de schèmes appropriés. On parle dans ce cas respectivement de genèses instrumentale (I), sémiotique (S), et discursive (D). Et ces genèses respectives produisent dans le plan cognitif des constructions, des visualisations, et des preuves. Enfin l'activation de deux genèses peut entraîner une circulation entre les dimensions qui les portent, ce qui peut parfois être rapprochée de l'idée de modélisation.
Nous nommons « projection » de l'ETM la restriction à un domaine spécifique de ce que nous observons dans l'ETM. L'interaction dans notre étude des probabilités, des statistiques descriptives et de l'algorithmique nous amène donc à projeter l'ETM dans ces trois domaines. Et nous noterons ces trois projections : ETM_p, ETM_s, et ETM_A.
Afin d'éviter une surcharge visuelle, nous présenterons le schéma de l'ETM avec une vue du dessus. Des points et des traits mis en gras représentant les différentes genèses D, I, et S ainsi que les circulations dans les plans situés entre les axes de ces genèses.

2. *La place de l'algorithmique*

Nous commençons par une précision de Modeste (2012) concernant le fait qu'un programme de simulation n'est pas un algorithme proprement dit :

> Simulation d'expérience : les trois variantes de simulation ne nous semblent pas relever réellement de l'algorithmique : il s'agit de mettre sous forme d'un programme ou d'un programme-papier, de traduire, une expérience avec des outils numériques (générateur de nombres aléatoires). On ne traite pas un problème au sens où nous l'avons défini. (Modeste, 2012 p 130)

Cela nous apparaît surtout lié à l'utilisation du générateur pseudo-aléatoire, qui est lui-même un artefact instrumentalisé pour construire le programme de simulation. En référence à l'Espace de Travail Algorithmique (ETA) de Laval (2015) qui englobe notre idée d'ETM_A, le travail de conception algorithmique présente une triple dimension instrumentale, sémiotique, et discursive au sein de l'ETM_A. Nous relions en particulier cette dimension discursive à l'idée du langage comme expression verbale ou écrite qui permet l'articulation et l'enchaînement des pensées. En effet, les programmes de simulations finalisant les techniques τ_2 , τ_3 , et τ_4 (voir figure 3 ci-dessous) sont des écritures formalisées de protocoles expérimentaux. Les expressions algorithmiques en langage naturel constituent alors une formulation explicite de la démarche à suivre dans le domaine des statistiques descriptives pour mener à bien une approche fréquentiste. Et ces explicitations qui peuvent être rapprochées de l'idée de preuve nous ramènent aussi aux technologies correspondantes : θ_2 , θ_3 , et θ_4. Cela évoque encore cette genèse discursive qui, selon Laval (2015), se confirme lorsque le programme « tourne » (en orientant le travail algorithmique suivant son premier niveau de paradigme algorithmique).

PROGRAMME DE SIMULATION POUR τ_2
Pour la simulation d'une expérience aléatoire :
Alea(6)+Alea(6)

PROGRAMME DE SIMULATION POUR τ_3
Pour simuler un calcul de fréquence après 400 tests de l'expérience aléatoire :

Initialiser la variable effectif à 0
Répéter 400 fois :
Si Alea(6)+Alea(6) >8
alors augmenter effectif de 1
Afficher la fréquence obtenue : effectif/400

PROGRAMME DE SIMULATION POUR τ_4
VERSION 1
Pour simuler 50 calculs de fréquences :
Répéter PROGRAMME τ_3 **50 fois**

VERSION 2
Pour tracer le nuage de points simulant 50 calculs de fréquences :

k←0
Répéter 50 fois :
PROGRAMME τ_3
k←k+1
Placer point (k ;fréquence)
Fin

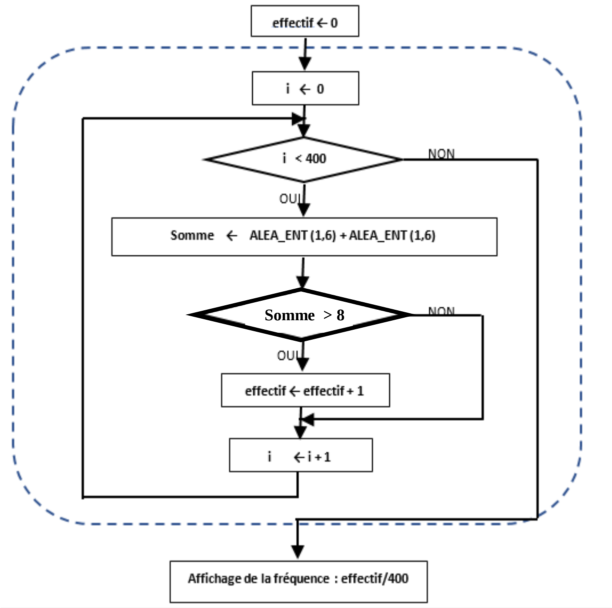

***Figure 3** – Programmes de simulation finalisant les techniques τ_2 , τ_3 , et τ_4 et organigramme pour τ_3.*

L'organigramme de la figure 3 montre comment une approche schématique peut renforcer la dimension sémiotique de l'ETM$_A$: cela met en évidence le fonctionnement réel de la machine qui est basé sur un stockage des données à des adresses mémoire. La structure d'emboîtement, ou encapsulage correspondant au principe de programmation sous-procédurale, explicite les techniques τ_2 , τ_3 , et τ_4. Et une telle visualisation de blocs structurant une suite d'instructions entraîne une circulation entre les dimensions discursive et sémiotique dans l'ETM$_A$.

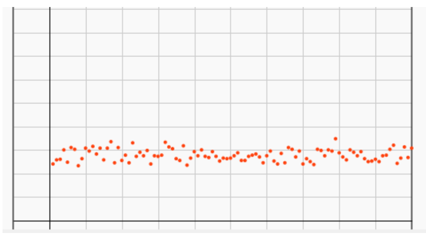

***Figure 4** – Représentation du nuage des fréquences simulées (technique τ_4) avec 100 simulations de fréquences calculées à partir d'échantillons de taille 400. Programme réalisé sur le logiciel Algobox.*

Ces programmes de simulations sont aussi très actifs dans la dimension instrumentale de l'ETM. Mais cela se produit à l'extérieur de l'ETM$_A$. L'outil « programme de simulation » est instrumentalisé pour construire une observation statistique, au sein de l'ETM$_S$ (et au sein de l'ETM$_P$ lorsque cette construction montre certaines propriétés du hasard).

Précisons les termes *artefact*, *outil*, et *instrument* avec un article de la revue ZDM (2016) :

> Artifacts are generally of material nature or they may reproduce, in a computerized environment, actions similar to what material tools do. The word tool will be used with a more general meaning, and not only material tools will be considered but also conceptual tools, like theorems, algorithms or collection of signs. (…) the word instrument has a cognitive value : a tool becomes an instrument when the subject has constructed schemes for using this tool. (Kuzniak, Nechache, Drouhard, p. 863)

En considérant l'emploi du logiciel *Algobox* qui est équipé d'un interface graphique préprogrammé, et qui ne possède pas d'instruction d'appel d'un sous-programme, nous en déduisons une mise en relation de ces considérations avec l'analyse praxéologique :

Technique appliquée pour l'approche fréquentiste	Rôle de la technique appliquée et du programme de simulation utilisé	Protocole expérimental réalisé en appliquante la technique	Genèses provoquées par la technique			Technique amorcée / technologie consolidée
			dans l'ETM_A	dans l'ETM_S	dans l'ETM_P	
τ_2	Simuler l'expérience aléatoire.	Calculer une fréquence simulée.	**Ins** , **Dis**	**Ins, Sem**, (Dis)	**Ins**	τ_3 / θ_2
τ_3	Calculer une fréquence simulée.	Tracer un nuage de points « fréquences simulées ».	(Ins), **Sem**, **Dis**	**Ins**, **Sem**, (Dis)	(Ins), **Sem**	τ_4 / θ_3
τ_4	Tracer un nuage de points « fréquences simulées ».	Conjecture : bornes de l'intervalle de fluctuations.	(Ins, Sem), **Dis**	**Ins, Sem, Dis**	(Ins, Sem), **Dis**	τ_5 / θ_4

Exemple : La technique τ_4 consiste à reprendre le protocole expérimental de tracé d'un nuage de fréquences simulées, et à l'automatiser en améliorant le programme de simulation d'une fréquence. Le nouveau programme de simulation permet alors d'observer différents nuages de points, ce qui donnera une possibilité de conjecturer la propriété de l'intervalle de fluctuation.

3. *Analyse des genèses et circulations dans les trois projections de l'ETM*

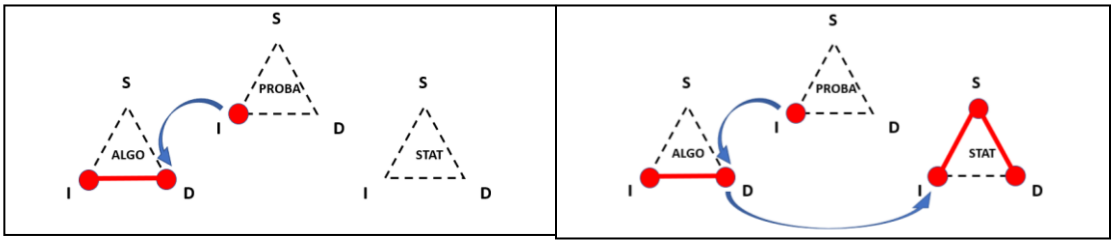

Figure 5 *– Schéma éclaté en vue du dessus de l'ETM lors des deux principales phases de la technique* τ_2

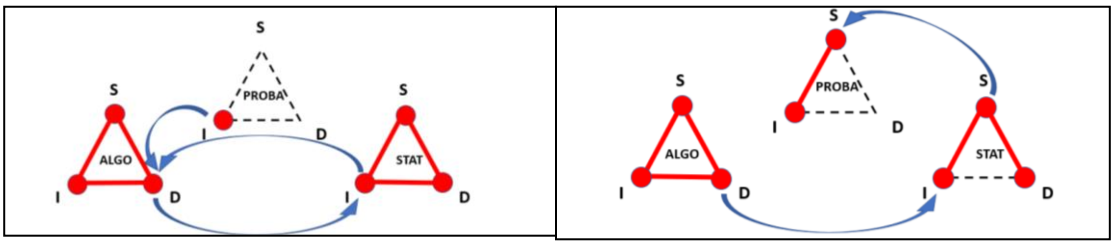

Figure 6 *– Schéma éclaté en vue du dessus de l'ETM lors des deux principales phases de la technique* τ_3

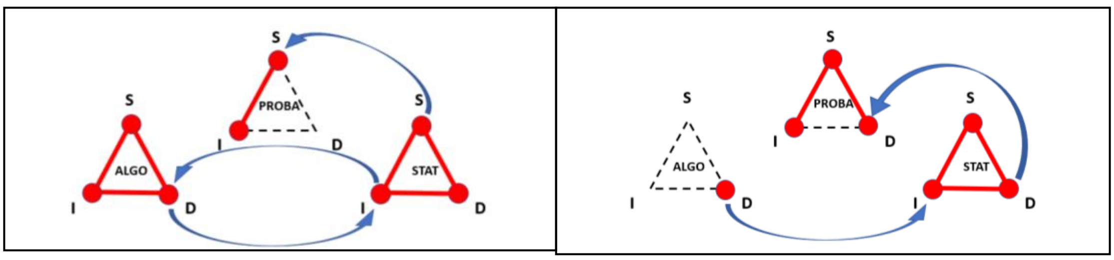

Figure 7 *– Schéma éclaté en vue du dessus de l'ETM lors des deux principales phases de la technique* τ_4

Les figures 5, 6, et 7 résument visuellement notre analyse du travail mathématique. Les structurations successives dues aux techniques τ_2 , τ_3 , et τ_4 construisent la praxéologie associée au type de tâche T. Nous en exposons ci-dessous les principaux éléments :

- La technique τ_2 commence par une genèse instrumentale de l'artefact générateur aléatoire dans l'ETM_A construisant une simulation de somme de deux dés. Après validation discursive de cette simulation, on l'exploite en tant qu'outil dans l'ETM_S pour une genèse instrumentale construisant un protocole expérimental de calcul d'une fréquence (figure 5).
- La technique τ_3 consiste d'abord à reprendre le protocole de simulation d'une fréquence pour l'automatiser. Ce qui engendre une circulation complète dans l'ETM_A. Le nouveau programme de simulation d'une fréquence est ensuite utilisé comme outil dans l'ETM_S pour construire un protocole de tracé du nuage des fréquences. Ce qui provoque une genèse sémiotique dans l'ETM_P (visualisation des fluctuations du hasard).
- Enfin, la technique τ_4 reprend le protocole de tracé du nuage pour l'automatiser, ce qui génère à nouveau une circulation complète dans l'ETM_A. Ce dernier programme est utilisé dans l'ETM_S pour construire une conjecture de l'intervalle de confiance. Ce travail entraine une genèse discursive dans l'ETM_P (au premier niveau de paradigme probabiliste).

III. CONCLUSION

L'étude des moments didactiques a mis en évidence un ordre d'apparition de techniques de résolution successives pour la tâche de simulation d'échantillonnage. La structuration progressive du savoir-faire, met en relation des embryons de connaissance intuitive. Ce qui apporte une cohérence d'ensemble constituant une forme de théorie adaptée à un premier niveau de paradigme. Le phénomène de construction praxéologique met en évidence un lien direct entre l'enchaînement des techniques, et les étapes de construction du programme de simulation par encapsulages successifs. Et ces étapes algorithmiques entrent aussi en résonance avec les phases du protocole expérimental statistique. Cette congruence sémantique trouve son expression dans un certain aspect du travail de programmation informatique : l'organisation de type procédurale en blocs sous-programmes.
De son côté, l'outil ETM met en évidence des interactions entre les trois domaines considérés : Le programme de simulation est exécuté dans l'ETM_S en tant qu'outil technologique, afin de construire dans une genèse instrumentale un nouveau protocole expérimental. Puis l'ancien programme de simulation pris comme outil théorique, va construire dans une genèse discursive de l'ETM_A un nouvel objet algorithmique visant à automatiser ce nouveau protocole expérimental… L'analyse du travail mathématique dans les projections de l'ETM, met en évidence une triple répétition de ce processus : une dialectique cyclique d'interactions évolutives. Un début de réponse apparaît concernant notre question initiale lié à la nature de cycles de modélisations permettant la découverte progressive du phénomène de fluctuation d'échantillonnage, par des stagiaires ou dans le cadre de la classe. Une nouvelle phase, expérimentale, s'impose désormais pour finaliser cette recherche.

RÉFÉRENCES

Chevallard Y. (1998) Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique. *Actes de l'Université d'Eté,* IREM de Clermont-Ferrand, 91-120.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *In Annales de didactique et de sciences cognitives, volume 16*, 9–24.

Kuzniak, A. & Richard, P. (2014). Spaces for mathematical work : viewpoints and perspectives. *Relime*, 17(4.1):17–26.

Kuzniak A., Nechache A., & Drouhard J.P., Understanding the development of mathematical work in the context of the classroom, (2016), *ZDM Mathematics Education.* ***48.6***, 861-874.

Laval, D. (2015). L'algorithmique comme objet d'apprentissage de la démarche de preuve en théorie élémentaire des nombres : l'algorithme de Kaprekar. *Actes du Quatrième symposium international – ETM de juillet 2014,* 103-115. Madrid, Espagne.

Modeste S. (2012). *Enseigner l'algorithme pour quoi ? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques ? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve ?* Thèse de doctorat. Université de Grenoble. France.

Nechache A. (2016). *La validation dans l'enseignement des probabilités au secondaire.* Thèse de doctorat. Université Paris-Diderot, Paris, France.

Parzysz, B. (2009). Des expériences au modèle, via la simulation. In *Repères-IREM*, (74) : 91–103.

Parzysz, B. (2014). Espaces de travail en simulation d'expérience aléatoire au lycée : une étude de cas. In *Relime, volume 17.4*, 65–82.

RESCOL-PROB. (2009), Ressources pour la classe de seconde, Probabilités et statistiques, juin 2009. http://eduscol. education.fr (consulté le 01/08/18).