

INTRODUCTION DU CONCEPT DE LIMITE EN CLASSE DE PREMIERE SCIENTIFIQUE AU CAMEROUN : UN EXEMPLE D'APPROCHE PAR LES COMPETENCES

NGOUFO* Hyacinthe Noel William

Résumé : L'objet de cette étude porte sur l'enseignement de la limite en classe de première scientifique au Cameroun. L'intérêt d'une telle investigation vient du fait que la présentation des concepts de limite et d'infini, leur place dans notre enseignement, l'intérêt ou non des définitions rigoureuses pour ces notions au lycée sont autant de sujets qui rejaillissent constamment dans les préoccupations pédagogiques et didactiques des enseignants de mathématiques.

Mots-clefs : limite, compétences, enseignement, concept, fonction.

Abstract: The purpose of this study is based on the teaching of the Lower sixth scientific class limit in Cameroon. The interest of such an investigation comes from the fact that the presentation of the concepts of limit and infinity, their place in our teaching, the interest or not of the rigorous definitions for these notions in high school are all subjects that spring constantly in the pedagogical and didactic concerns of mathematics teachers.

Keywords: limit, competencies, teaching, concept, function.

I PARTIE THEORIQUE

1. Analyse conceptuelle

Dans ce travail, nous avons commencé par faire une analyse conceptuelle de la limite et de cette analyse, nous avons dégagé l'origine du concept de limite à travers une enquête épistémologique. Cette origine remonte aux paradoxes du célèbre philosophe grec Zénon dans lesquels il démontre l'impossibilité du mouvement (paradoxe de la dichotomie, Achille et la tortue, Achille lance le javelot...). Par la suite le concept est présent dans la quadrature de la parabole avec Archimède (-287 à -212) (il s'agit d'une méthode de détermination de l'aire A délimitée par la parabole et un segment joignant deux de ces points). Ensuite, suivront les travaux de Cauchy et Gauss où ils recherchent un peu plus de rigueur dans la définition du concept de limite : *lorsque les valeurs successives attribuées à une même variable s'approche indéfiniment d'une valeur fixe de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée limite de tous les autres.* (Résumé des « leçons » données à l'Ecole Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal, 1823). Enfin vient la définition rigoureuse en ε et α par l'Allemand Karl Weierstrass au 19^{ième} siècle. Par la suite, nous avons recensé quelques obstacles épistémologiques liés au concept :

L'horreur de l'infini : l'obstacle réside dans le fait qu'en admettant l'existence de l'infini, étant donné par exemple qu'un ensemble infini peut être mis en bijection avec l'une de ses parties infinies, alors on aboutit à une contradiction avec la théorie d'Euclide selon laquelle : « le tout n'est pas égale à la partie ».

La nature fictive des entités mathématiques appelées *infinitésimaux*. Au sens de Carnot, une quantité infiniment petite est une quantité qui est considérée comme continuellement décroissante, tellement qu'elle puisse être rendue aussi petite que l'on veut. Comment

* Ecole Normale Supérieure de Yaoundé – Cameroun – h.ngoufo@yahoo.com

comprendre qu'une quantité (nombre positif dans le langage moderne) soit plus petite que toute quantité donnée mais qui n'est pas nulle ?

Le modèle monotone du concept de limite, par exemple, une somme infinie peut être finie. C'est le cas de la série numérique $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ dont la somme vaut $\frac{\pi^2}{6}$. Deux quantités peuvent tendre simultanément vers 0, alors que le rapport « $\frac{0}{0}$ » tend vers une quantité finie.

La transposition numérique des grandeurs géométriques : l'obstacle ici est dans le fait qu'on a du mal à représenter numériquement certaines grandeurs géométriques. Si on considère la grandeur géométrique $\sqrt{2}$, on ne peut pas l'épuiser en l'écrivant numériquement parce que le développement décimal de $\sqrt{2}$ est illimité.

Enfin nous avons dégagé trois points de vues épistémologiques pour dépasser ces obstacles : le point de vue *algébrique* qui porte sur le calcul des limites selon les règles algébriques (Trouche 1996) ; le point de vue *approximation de x* ou *cinématique* : la variable tire la fonction (Bkouche, 1996) et le point de vue *approximation de f(x)* : c'est le degré d'approximation que l'on veut au niveau des $f(x)$ qui tire le degré d'approximation de la variable (Bkouche 1996).

2. Difficultés récurrentes des élèves

Dans la suite de ce travail, nous avons identifié chez les élèves quelques conceptions récurrentes liées au concept de limite. Sans prétendre à l'exhaustivité, voici quelques-unes : certains élèves pensent qu'une fonction constante n'a pas de limite puisqu'elle ne varie pas ; la limite d'une fonction n'est déterminée qu'aux bornes de son domaine de définition ; les élèves ne maîtrisent pas les règles opératoires et des théorèmes sur les limites; les écritures du type $0 \times \infty$ utilisées abusivement par certains enseignants créent la confusion chez les élèves à partir du moment où ils ne comprennent pas pourquoi on ne peut pas avoir « $0 \times \infty = 0$ »; les élèves ne comprennent pas pourquoi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-3}{x-2} = 1$ car selon eux, x n'atteindra jamais l'infini; les élèves se représentent l'infini comme un nombre.

3. Problématique

L'analyse conceptuelle sus-évoquée et certaines difficultés récurrentes des élèves nous ont permis de nous rendre compte de la difficulté qu'il y a à introduire le concept de limite en classe de première au Cameroun tant du point de vue épistémologique que des difficultés rencontrées par ceux qui ont déjà suivi un enseignement sur les limites. C'est donc pour cela que nous proposons une approche par les compétences pour l'introduction de ce concept au Cameroun. Pour cela, nous avons formulé la question de recherche suivante : *Quel est l'impact sur les performances scolaires des élèves de l'introduction du concept de limite dans une approche par les compétences ?*

Le problème que nous voulons résoudre ici est celui de l'appropriation du concept de limite, le sens et la signification par les élèves. Le sens étant entendu ici comme l'ensemble des différents schèmes qu'évoque la notion de limite. Ainsi, la thèse que nous défendons ici est que l'approche utilisée jusqu'ici par les enseignants de mathématiques pour l'enseignement de la limite en première ne permet pas une bonne conceptualisation de la notion et son opérationnalité dans l'activité mathématique par l'apprenant. Pour soutenir cette

thèse, nous postulons ici en guise d'hypothèse générale que : *l'introduction du concept de limite par une situation peut permettre une bonne acquisition de par les élèves*. De cette hypothèse, se dégage trois hypothèses de travail dont la première est : *les conceptions que les élèves ont de la limite dans le sens commun se constituent en obstacles dans la pratique*. Pour la seconde : *l'introduction du concept de limite par l'intuition n'est pas suffisante pour la manipulation de cet objet d'enseignement*. Quant à la troisième : *une situation idoine et une prise en charge des élèves peuvent permettre une bonne conceptualisation de la notion de limite*.

4. Cadres théoriques

Nous avons situé ce travail dans trois cadres théoriques dont nous montrons par la même occasion la pertinence du choix. Nous commençons par la théorie des situations didactiques de Guy Brousseau à partir de 1971 qui propose une modélisation du savoir, des situations d'enseignement. Nous donnons dans ce qui suit certains objets développés par cette théorie tout en donnant leur intérêt pour ce travail :

Comme objet, nous avons le *travail du professeur* qui consiste à exposer le savoir et les problèmes dont la résolution mettra en œuvre ce savoir. Pour ce travail, nous commencerons par une situation dont la résolution mettra en œuvre le savoir limite. Elle développe également l'objet *variables didactiques* : ce sont celles dont la modification des valeurs provoque des adaptations, des régulations, des apprentissages et dans le cas de la recherche des solutions d'un problème, des changements de stratégies. Pour ce travail, ce sont la fonction, le réel vers lequel x tendra dans le calcul de la limite, l'intervalle sur lequel nous travaillons. La *situation didactique* quant à elle est celle dans laquelle l'intention d'enseigner est manifeste. Pour ce travail, nous considérons l'activité d'apprentissage comme notre situation didactique. La théorie parle aussi de *situation adidactique* dans laquelle l'intention d'enseigner n'est pas manifeste. Dans le cadre de ce travail, la situation-problème sera notre situation adidactique.

Nous nous situons ensuite dans le cadre de la transposition didactique développée par Yves Chevallard (1985) qui pour lui consiste au travail qui d'un objet de savoir à enseigner fait un objet d'enseignement. Le schéma de la transposition didactique consiste à partir du savoir de référence pour le savoir enseigné en passant par le savoir à enseigner.

Le savoir de référence est le savoir en tant qu'objet d'étude à l'université. Il est accessible sous forme de note de cours. Pour ce travail, nous considérons la définition savante du concept de limite donnée à l'université comme savoir de référence :

Soient $f \in \mathcal{F}_{\mathbb{R}}$, $X_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, X_0 un point d'accumulation de $\text{Dom}f$ et $L \in \overline{\mathbb{R}}$. L est limite de f en X_0 si $\forall V \in \mathcal{V}(L), \exists \mathcal{O} \in \mathcal{V}(X_0), \forall x \in \mathcal{O}, (x \in \text{Dom}f \text{ et } x \neq X_0) \Rightarrow f(x) \in V$. La syntaxe utilisée ici dans la définition formelle est absente au secondaire que ce soit au niveau du savoir à enseigner ou du savoir enseigné. La notion de point d'accumulation est aussi absente au secondaire et c'est d'ailleurs ce qui explique pourquoi les élèves ne savent pas la condition qu'il faut sur un x_0 pour qu'on puisse calculer la limite en x_0 . Néanmoins la notion de voisinage est évoquée implicitement à travers la notion d'intervalle au secondaire, bien que l'utilisation ne soit pas la même que dans le savoir de référence.

Le savoir à enseigner est celui précisé dans l'ensemble des textes officiels (programmes, instructions officielles, commentaires, etc.). Pour cette recherche, nous considérons le savoir

en vigueur dans les programmes officiels au Cameroun qui admettent ces équivalences comme définition de la limite d'une fonction :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} |f(x) - l| = 0 ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} |f(x+h) - l| = 0.$$

Le savoir enseigné est celui construit par l'enseignant et qu'il mettra en œuvre en classe. Pour ce travail, nous considérons l'interprétation : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ signifie que « lorsque x se rapproche de a , $f(x)$ se rapproche de b . Il vient de cette transposition didactique qu'il y a un écart entre le savoir de référence et le savoir enseigné. En effet on part de la définition formelle de l'écriture $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ à son interprétation en classe de première scientifique au secondaire.

Le troisième cadre est celui de la notion de limite d'une fonction numérique : la définition de la limite que nous retenons ici est celle que nous avons donnée au niveau du savoir de référence. Toutefois nous avons observé ici d'une part que c'est le point de vue *approximation* qui a cours à l'université. D'autre part, d'après les travaux de Bloch et Ghedamsi (2005), à l'université, la validation des résultats s'observe dans le système de preuve de l'analyse, pourtant c'est le cadre intuitif qui sert de validation au secondaire.

5. Recension des écrits

Dans la suite de ce travail, nous avons recensé quelques écrits des auteurs sur les difficultés et obstacles liés à l'enseignement de la limite dont nous donnons la teneur ici et l'intérêt pour cette étude. Certains chercheurs ont travaillé sur les obstacles et difficultés liés à l'enseignement de la limite qui sont : d'ordre épistémologique (Sierspiska 1985, Brousseau 1998) dus aux raisons internes aux mathématiques; d'ordre didactique (CREM 1995, Artigue 1998, Brousseau 1998, Groupe aha 1999) dus aux pratiques d'enseignement peu efficaces ; d'ordre cognitif (Tall, Vinner 1981, Cornu 1991, Dubinsky 1991) dus aux processus de conceptualisation et d'abstraction impliqués et d'ordre métacognitif (Zan 2001, 2002) dus à l'ensemble des attitudes qu'adoptent les élèves dans leur rapport au savoir mathématique.

Dans son article *Apprentissage de la notion de limite*, Cornu (1981) montre en se référant aux travaux de Tall et Vinner (1981) que l'activité mathématique ne se résume pas à la mise bout à bout des propositions selon des règles logiques. Un objet mathématique n'est pas mis en jeu uniquement d'après les axiomes ou les propriétés qui le caractérisent. La mathématique professionnelle où l'élève met en jeu à chaque instant des aspects très personnels de la notion mathématique qu'il manipule : il a présent à l'esprit des exemples particuliers, chaque notion déclenche en lui des images et ce sont ces images qui font bien souvent fonctionner l'intuition. Il montre également que ce sont les modèles propres de l'apprenant qui ne sont ni faux, ni justes qui font fonctionner l'activité mathématique chez l'apprenant. Ces modèles propres résultent des mélanges entre modèles spontanés de l'apprenant et la définition mathématique. L'auteur entend ici par modèles spontanés les conceptions du sens commun à propos d'un concept. Les résultats de Cornu nous permettent de construire notre séquence de cours en tenant compte des modèles spontanés des apprenants. Ceci d'autant plus qu'il sera illusoire de penser que la définition mathématique de la limite effacera toutes les conceptions du sens commun.

Dans leur article *Obstacles to student's understanding of the limit*, Abraham Kumsa et al (2017), travaillent sur les obstacles liés au concept de limite et ils ont relevé les obstacles épistémologiques, didactiques, cognitifs et métacognitifs. Ils ont identifié trois sources d'obstacles épistémologiques dans l'enseignement et l'apprentissage de la limite. La première est le développement historique et la formalisation du concept de limite. Ici, ils montrent que le caractère fictif des *infiniment petits* et des *infiniment grands*, l'aspect métaphysique de la limite constituent des obstacles épistémologiques. La seconde parle des concepts utilisés et leur nature duale dans la formalisation de la limite : le concept d'infini avec sa double nature (infini potentiel et infini actuel), le concept de fonction (tantôt vu comme ensemble de valeurs ou alors comme expression analytique) qui selon eux créent des barrières dans la tête des apprenants. La dernière source est la nature duale implicite dans la symbolisation de la limite (dynamique et statique).

Pour les obstacles cognitifs, les auteurs montrent que certaines difficultés observées chez l'apprenant résultent de l'incompatibilité entre le concept image individuel de ce dernier et le concept définition de la limite. Ils montrent que le niveau d'abstraction et de conceptualisation impliqué dans la formalisation de la limite est également source d'obstacle cognitif.

Les auteurs finissent par conclure que certains choix didactiques de l'enseignant, la manière par laquelle le concept se présente dans les manuels, le gap entre ce qui doit être dit et ce qui est actuellement dit sont autant de sources d'obstacles didactiques. Le travail de ces auteurs nous a permis de nous rendre compte des obstacles liés à l'enseignement de la limite et nous avons utilisé cela pour enrichir notre problématique.

Dans son article *Limites et infini au lycée* l'Equipe POTIERS-NIORT (1993), travaille sur les concepts de limite et d'infini dans leurs aspects historiques et philosophiques, sur leur fonctionnement dans l'enseignement Français depuis 1945 et sur leurs différentes approches par d'autres disciplines telles que la physique, la chimie et l'informatique. Elle (l'équipe) stipule que la notion de limite, bien qu'étant en germe dans les paradoxes de Zénon, dans l'œuvre de Fermat, Newton, Euler ; n'apparaît clairement, du moins au sens où on l'entend actuellement que vers les années 1860. Elle soulève également les problèmes dans lesquels l'infini est impliqué : génération des entiers, suite des nombres premiers, sommation des séries et donc problèmes de convergence, comparaison d'ensembles et donc puissances d'ensembles. D'après les auteurs, l'enseignement du concept de limite en classe de première est difficile pour certaines raisons : les définitions de Weierstrass des limites sont difficiles à assimiler par un débutant, leurs énoncés étant complexes puisque contenant deux quantificateurs (non commutables) portant sur une implication. Leur mise en œuvre est des plus délicates, car elle suppose que l'étudiant ait assimilé ce qu'est une condition suffisante (difficulté logique), et que de plus il soit à l'aise dans l'utilisation des techniques de majoration et de minoration élémentaires (difficulté technique).

Notre intérêt pour ce travail vient du fait que qu'il nous a fourni des éléments qui ont orientés notre réflexion sur l'analyse conceptuelle, mais également sur les difficultés qu'il y a à introduire les expressions telles que : « est infiniment petit », « est infiniment grand » au lycée. En effet le problème qui se pose ici est celui de l'ordre de grandeur et nous avons repéré cela lors de l'analyse du manuel de première D.

II PARTIE EXPERIMENTALE

1. Analyse des manuels et observation d'une pratique de classe

Toujours dans l'optique d'apporter quelques éléments de réponse à nos questions de recherche, nous avons analysé le manuel Excellence en mathématiques classe de première D, édité par NMI Education. Nous avons porté notre choix sur ce manuel parce que l'ossature d'une unité didactique ici commence par *prendre un bon départ : une ou plusieurs activités sont proposées à l'apprenant dans lesquelles il doit faire face aux difficultés et mobiliser ses connaissances pour répondre aux interrogations*. Ce qui s'inscrit dans la logique de l'approche par les compétences qui met l'accent sur les processus d'apprentissage (l'élève construit son propre savoir en activité).

L'analyse de ce manuel nous permettra d'une part de relever l'écart entre le savoir de référence et le savoir enseigné et d'autre part d'identifier les phénomènes dans les manuels qui peuvent créer des problèmes dans l'enseignement et l'apprentissage de la limite. La recension des écrits sur le sujet nous a montré que certains obstacles liés à l'acquisition de la limite par les apprenants sont de nature didactique. Ce sont ces phénomènes qui vont nous inspirer à construire notre situation afin d'introduire la limite dans une perspective d'approche par les compétences dans l'optique de mesurer son impact sur les performances scolaires des apprenants. Ainsi de l'analyse de ce manuel, il vient que : le langage prédominant est le langage mixte: c'est-à-dire un mélange du langage mathématique et du formalisme logico mathématique. Le vocabulaire utilisé pour exprimer les notions telles que voisinage de $+\infty$, point d'accumulation d'un point est celui du savoir de référence. L'interprétation de l'écriture $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ est *lorsque x se rapproche de a , $f(x)$ se rapproche de b* . L'approche dite graphique est utilisée pour introduire le concept de limite et les tâches de types algorithmiques sont prépondérantes dans le manuel.

Pour finir avec l'analyse du manuel, nous avons identifié certains phénomènes absents dans le manuel qui peuvent s'ériger en obstacle dans la pratique : la non clarification des expressions telles que : *être aussi grand que l'on veut, être aussi petit que l'on souhaite* etc. L'absence de vrais problèmes qui mettraient en relation les calculs d'approximation dans l'optique de donner du sens aux expressions comme *être près de* ou *être aussi grand que l'on souhaite*, etc., préliminaires à celles dont on se sert pour les limites.

Nous avons appuyé l'analyse du manuel par l'observation d'une pratique de classe d'une enseignante du lycée bilingue d'application de la ville de Yaoundé au mois de Mai 2017. De cette pratique, il ressort qu'il y a des similitudes entre la transposition qui est faite dans le manuel de première D analysé et celle qui est faite en salle de classe.

2. Expérimentation et analyse des résultats

Notre expérimentation s'est déroulée en deux phases. Dans la première phase, nous avons passé un questionnaire qui a porté sur quatre exercices construits autour du calcul des limites en première scientifique. Nous l'avons passé le jeudi 20 Avril 2017 aux élèves de première c (17- 18 ans) du lycée bilingue d'application de Yaoundé qui avaient déjà suivi un cours sur les limites. L'analyse *a posteriori* du questionnaire nous permettra de confirmer notre première hypothèse spécifique. Ainsi de cette analyse, il vient que :

Il y a une forte présence chez les apprenants des conceptions du sens commun (limite comme point d'arrêt, limite comme borne infranchissable). Dans l'interprétation de

l'écriture $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$, certains apprenants voient b comme une borne à ne pas franchir. Cette conception de la limite se rapproche plus du sens commun dans la mesure où lorsqu'on parle de limite d'un *champ de maïs* par exemple en société, il s'agit d'une borne à ne pas franchir, ce qui nous permet de rejoindre le point de vue de Cornu lorsqu'il parle de modèles spontanés des apprenants comme obstacle à la connaissance mathématique. D'autres toujours concernant l'interprétation de l'écriture $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ parle de *b comme point d'arrêt* $def(x)$. Nous pensons ici qu'il s'agit encore de conception du sens commun. D'ailleurs Cornu a qualifié ce modèle (dans la tête des élèves) de modèle α : la limite est infranchissable. Nous voyons le caractère infranchissable ici dans l'expression *le point d'arrêt de $f(x)$* .

Il y a la présence des obstacles liés à la fonction comme relevait Sierspiska (1985) (fonction rationnelle, polynôme et fonction comportant $\sin x$ comme la fonction $x \mapsto \frac{x + \sin x}{1 + x^2}$). Par exemple, pour le calcul de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{1 + x^2}$, certains élèves ont écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{1 + x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = 0$. On constate avec cet exemple qu'ils utilisent le résultat du calcul sur les limites des fonctions rationnelles pourtant ils ne sont pas en face d'une fonction rationnelle. On peut donc dire qu'ils ne savent pas ce qu'on entend par fonction rationnelle. C'est donc un obstacle lié à la fonction. Nous pensons qu'il faut revenir sur la définition des fonctions polynômes, rationnelles, trigonométriques etc., lors de l'enseignement sur le calcul des limites en première scientifique.

Il y a la présence du point de vue de Bloch et Ghedamsi (2005) qui stipulait que les élèves du secondaire n'ont pas à prendre en charge le questionnement sur les fonctions ayant des limites ou non. En effet à l'item1 *Réponds par vrai ou faux : toute fonction admet une limite finie ou infinie*, de l'exercice 2 de notre questionnaire, 28 élèves sur 33 élèves interrogés soit un pourcentage 84,84% pensent que la limite d'une fonction existe toujours en un point ou en l'infini. Ce pourcentage est élevé à notre avis parce qu'au lycée, les tâches que les enseignants donnent aux apprenants portent plus sur le calcul des limites et non sur l'éventuelle existence de la limite en un point. Cette pratique installe dans la tête des apprenants la règle implicite selon laquelle la limite d'une fonction existe toujours. Ce constat rejoint donc le point de vue développé par Bloch et Ghedamsi (2005). Nous pensons qu'il est judicieux de considérer ce type de questionnement au lycée pour parfaire la compréhension de la limite chez les élèves.

Il y a la forte présence du modèle implicite selon lequel $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ signifie que $f(a) = b$.

Cela n'est guère surprenant puisque ce modèle atteste de l'enseignement reçu sur la signification de cette écriture. D'ailleurs l'entretien mené avec l'enseignante du lycée bilingue d'application de Yaoundé le confirme. Toute porte à croire que les conceptions erronées des élèves par rapport à cette signification relèvent de la signification qui est donnée par certains enseignants en classe. Cette interprétation constitue un obstacle à notre avis puisque nous avons signalé dans l'analyse conceptuelle que le point de vue qui a cours au lycée est celui selon lequel *c'est la variable qui tire la fonction*. A partir de ce moment, on ne voit pas l'idée de mouvement dans l'interprétation des élèves. Toutefois ne perdons pas de vue aussi que la plus part des fonctions qu'on leur donne au lycée sont des fonctions continues, au point où, lorsqu'ils calculent la limite en un nombre réel qui appartient au domaine de définition de la fonction, elle se confond avec l'image de ce point par la fonction. Cela les encourage à avoir ce modèle implicite.

Ces résultats vont nous permettre d'apporter quelques éléments de réponses à notre question de recherche. En effet, il sera question pour nous de tenir compte des conceptions du sens commun, des obstacles liés à la fonction et du modèle implicite relevé au dernier tiret lors de la construction et de la conduite de notre situation dans l'optique de mieux mesurer l'impact de l'introduction du concept de limite par une situation sur les performances scolaires des apprenants.

Dans la deuxième phase, nous avons passé notre séquence de cours à 10 élèves de seconde c (16-17 ans) du lycée d'Efoulan à Yaoundé le Lundi 22 Mai 2017. Le but étant d'enseigner cette leçon aux élèves à qui on n'a jamais enseigné le cours sur le calcul des limites. Nous présentons ici la situation-problème avec laquelle nous avons introduit la séquence de cours.

Situation-problème : « Pour financer son développement, un pays décide de contracter une dette : 80000000 FCFA en 2000, 40000000 FCFA plus sa moitié en 2001, 40000000 FCFA plus son tiers en 2002 et ainsi de suite. On considère l'année 2000 comme l'année 0 et on constate que la dette varie en fonction de l'année suivant la loi $f(x) = 40000000\left(\frac{x+2}{x+1}\right)$. Il décide de ne pas aller en déca de 40000000 FCFA au fur et à mesure qu'il s'endette. Peut-il atteindre un tel objectif s'il s'endette indéfiniment ? »

Après la séquence de cours, nous avons fait une évaluation dont voici les résultats :

Question 1 :

Différentes écritures	Nombre d'élèves qui connaissent la signification	Nombre d'élèves qui ne connaissent pas la signification	Nombre d'élèves qui se sont abstenus
$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$	7	3	0
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l'$	6	4	0
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l'$	5	4	1

Tableau 1

Question 2 :

Différents items	Nombre d'élèves ayant trouvé	Nombre d'élèves ayant raté	Nombre d'élèves qui se sont abstenus
A	6	4	0
B	8	2	0
C	8	2	1

Tableau 2

Pour ce qui est de la question 1 nous attendions pour l'écriture $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ la signification *lorsque x est voisin de x_0 $f(x)$ est également voisin de l* vu que pendant la séquence de cours, nous avons donné cette signification et le sens que nous donnons à *est voisin de* Ainsi on entend ici par *x est voisin de a* si la distance entre x et a est très petite.

Les résultats des tableaux 1 et 2 nous montrent que plus de la moitié de l'effectif a donné la signification attendue. Cela montre que lorsque les élèves sont en activité, lorsqu'ils constatent par eux-mêmes certains résultats, cela induit des pourcentages de réussite satisfaisant. Seulement une signification a retenu notre attention ici. Elle a été donnée par 2 élèves en ce qui concerne la deuxième écriture du tableau 1. Pour eux, $\lim_{x \rightarrow x_0^<} f(x) = l'$ signifie que lorsqu'on va vers x_0 , $f(x)$ ne peut pas franchir l' . Cette signification n'est pas juste : en effet lorsqu'on dit que $f(x)$ est voisin de l' , on entend par là que la distance entre les deux est « réduite ». Distance réduite ne veut pas dire franchissement ni non franchissement de la limite l' . Nous parlons de distance réduite entre guillemets parce ce mot est relatif et on est toujours confronté au problème d'ordre de grandeur. Certaines valeurs de $f(x)$ peuvent dépasser l' , mais la distance qui sépare les deux soit toujours « réduite ». Nous pouvons interpréter la présence de cette signification $f(x)$ ne peut pas franchir l' par le fait que ces élèves sont restés dans leurs conceptions du sens commun et l'apprentissage ne pouvait résulter que de la modification de leur structure mentale pour qu'ils donnent un sens à leur niveau à la notion.

III. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Les résultats que nous avons obtenus dans ce travail, nous ont permis de comprendre que les obstacles et difficultés liés à l'introduction du concept de limite d'une fonction au lycée sont de nature épistémologique, cognitive et didactique. Pour cette dernière nous avons montré que l'introduction du concept par une situation peut permettre une bonne conceptualisation de la limite. Pour ceux des élèves qui continueront leurs carrières universitaires dans la filière mathématique, ils rencontreront encore le concept de limite d'une fonction ; mais cette fois si sur une autre forme : en tant qu'objet de savoir. On se demande donc si le fait pour un élève d'utiliser le concept de limite au secondaire avant de l'étudier à l'université comme objet théorique n'est pas de nature à créer un écart entre ces deux institutions d'enseignement ? En guise de perspective, nous pouvons approfondir ce travail en nous penchant sur l'étude de la transition entre le lycée et l'université à propos de la notion de limite d'une fonction : cas du Cameroun.

REFERENCES

- Bkouche R. (1996). *Point de vue sur l'enseignement de l'analyse : des limites et de la continuité dans l'enseignement-Repères-IREM 24* ; p.67-76. Pont-à-Mousson
- Bloch I. (2005). *Comment le cursus secondaire prépare-t-il les élèves aux études universitaires ? Le cas de l'enseignement de l'analyse en Tunisie*, IUFM d'Aquitaine, Ismène GHEDAMSI, ISEFEC-Tunis
- Brousseau (1998). *Théorie des situations didactiques*. La Pensée Sauvage ; Grenoble.
- Chevallard Y. (1985). *La transposition didactique-du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage, Grenoble.
- Cornu B. (1981). *Apprentissage de la notion de la limite : Modèles spontanés et modèles propres*. Université de Grenoble I.
- Cornu B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite : conceptions et obstacles*. Thèse, Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

Dubinsky E. (1991). *Reflective abstractions in advanced mathematical thinking*. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-126). Dordrecht : Kluwer academic publishers.

Maffini A. (2007). *Le concept D'infini et ses rapports avec le temps*. Groupe "Zeroalla zero"- Université de Parma (Italie).

Spierpinska (1985). *Obstacles épistémologiques relatives à la notion de limite*. Recherches en didactique des mathématiques, Vol.6.1. Edition La pensée Sauvage.