LE PASSAGE DE LA GÉOMÉTRIE PHYSIQUE À LA GÉOMÉTRIE THÉORIQUE AU CYCLE 3

AMADORI[*] Claire – HAIRON[**] Elodie

Résumé

L'un des objectifs du programme d'enseignement de la géométrie au cycle 3 (élèves âgés de 9 à 11 ans) en France correspond au passage de l'identification perceptive (la reconnaissance par la vue) de figures et de configurations à leurs caractérisations par des propriétés, c'est-à-dire au passage d'une géométrie physique à une géométrie théorique. Nous avons étudié à ce niveau scolaire les pratiques de deux enseignants pour déterminer en quoi elles permettaient aux élèves d'acquérir une méthodologie et un raisonnement adaptés à la pratique de la géométrie.

Mots-clefs : géométrie, enseignement, passage, physique, théorique.

Abstract – One of the objectives of programs of the education of the geometry in the cycle 3 (pupils aged 9-11) in France corresponds in the passage of the perceptive identification (the gratitude by the view) of figures and configurations in their characterizations by properties" or still the passage of the physical geometry to the theoretical geometry. We wanted to study the processes used by the teachers to allow the pupils to acquire a methodology and a reasoning adapted to the practice of the geometry.

Keywords: geometry, education, going through, physical, theoretical.

I. INTRODUCTION

Paul Claudel (1954) a déclaré : « La géométrie n'est pas faite pour être apprise, elle est faite pour être utilisée ». Claire Amadori et moi-même, alors étudiantes fonctionnaires stagiaires en 2016-2017 avons choisi de baser notre thème de recherche sur la géométrie au cycle 3 (élèves âgés de 9 à 11 ans). En nous penchant sur les résultats de l'évaluation CEDRE de 2014 (Arzoumanian & Dalibard, 2015), il nous est apparu que la géométrie posait de nombreuses difficultés aux collégiens (élèves âgés de 11 à 15 ans) : seulement la moitié d'entre eux réussissaient à résoudre un problème de géométrie déductive à une étape et à mettre en œuvre des théorèmes de géométrie dans des cas simples. Nous avons donc souhaité concentrer notre recherche sur l'enseignement de cette discipline en fin d'école (élèves âgés de 10 à 11 ans) pour mieux en comprendre les enjeux.

Nous présentons tout d'abord, dans une partie théorique, les différents types de géométrie en lien avec les programmes français actuels. Ce qui nous amène à envisager différentes questions : Comment un enseignant peut-il amener un élève à raisonner en géométrie ? Quels gestes professionnels sont mis en œuvre ? Quel matériel est utilisé par l'enseignant pour y parvenir ? Pour répondre à ces questions, nous décrivons l'expérimentation mise en œuvre, puis ses résultats et concluons ce texte par quelques perspectives.

II. LES DIFFERENTS TYPES DE GEOMETRIE

Fénichel, Pauvert et Pfaff (2004) expliquent que « dans l'acceptation la plus courante, les figures sont assimilées aux objets géométriques définis par des axiomes et des propriétés. » Dans le plan, une figure peut être considérée comme un ensemble de points de celui-ci, ou encore comme une trace matérielle sur une feuille de papier. D'après Roditi (2014), qui se base sur les travaux de Parzysz, cette dernière proposition est la définition d'un dessin et non d'une figure. Pour lui une figure renvoie à « l'objet théorique représenté […] elle est

[*] Académie de Créteil - France
[**] Académie de Créteil – France – elodie.hairon@gmail.com

composée d'objets géométriques en relation. » (id.). Nous retiendrons cette définition pour la suite de notre texte.

1. Géométrie physique et géométrie théorique

Perrin-Glorian et Godin (2014) définissent la géométrie plane comme « l'étude à différents niveaux des formes planes et des figures qu'on peut tracer sur une surface plane. » (p.28) Ils font la distinction entre deux géométries enseignées à l'école élémentaire : la géométrie physique qui consiste à valider les propriétés des figures avec des instruments et qui engendre des procédures matérielles, et la géométrie théorique, pour laquelle la validation se fait par des démonstrations, qui supposent une manipulation d'énoncés.

Ces mêmes auteurs ont retenu trois étapes pour décrire l'apprentissage de la géométrie : une première correspondant à la reconnaissance perceptive des formes et à l'introduction d'un vocabulaire précis (maternelle), une seconde pour l'identification de propriétés qui peuvent être vérifiées ou produites avec des instruments (cycle 2 et début cycle 3 – élèves âgés de 6 à 9 ans) et une dernière étape qui correspond à la déduction à partir d'axiomes et de théorèmes (fin cycle 3 et cycle 4 – élèves âgés de 10 à 15 ans). Les deux premières étapes font partie de ce que les auteurs définissent comme la géométrie physique et la dernière relève de la géométrie dite théorique. L'étude de la géométrie physique est différente de celle de la géométrie théorique. Pour mieux comprendre le processus d'apprentissage et mieux distinguer ce qui se joue dans l'une ou l'autre de ces deux géométries, nous allons nous intéresser aux différents niveaux de pensée des élèves pour passer d'un type de géométrie à un autre.

2. Les niveaux de pensée de Van Hiele

Afin de préciser nos questions initiales, nous avons repris les travaux de Braconne-Michoux, puisqu'ils correspondent à notre propre questionnement ; pour elle il s'agit de :

> « Expliquer comment un élève peut passer d'une observation très globale des objets géométriques à leur organisation théorique dans l'exercice de la démonstration ou dans la construction d'un raisonnement hypothéticodéductif, et décrire les conditions d'enseignement qui favoriseraient ce passage pour l'élève. » (Briconne-Michoix, 2014, p. 25)

Pour ce faire, elle s'appuie d'abord sur les niveaux de pensée de Van Hiele (1959) que nous rappelons ci-dessous :

- Le premier niveau aussi appelé niveau 0 de pensée est l'identification et la visualisation ; il s'agit de la reconnaissance de l'aspect global des figures.

- Le deuxième niveau de pensée (niveau 1) est celui de l'analyse. Les élèves connaissent alors la liste des propriétés des figures. Ces propriétés sont utilisées pour décrire ce qui est visible et le codage permet d'identifier une figure.

- Le troisième niveau de pensée (niveau 2) correspond à la déduction informelle. L'élève peut organiser de façon hypothético-déductive les propriétés. Il argumente sa pensée.

- Le quatrième niveau de pensée (niveau 3) correspond à la déduction formelle. L'élève maîtrise la distinction entre les définitions, les conditions nécessaires et suffisantes, les réciproques ainsi que la nécessité d'axiomes.

- Le dernier niveau (niveau 4) est celui de la rigueur ; nous ne l'aborderons pas car il concerne des niveaux supérieurs à ceux de l'école élémentaire et du secondaire.

Ces cinq niveaux viennent ainsi préciser le passage entre la géométrie physique et la géométrie théorique. Braconne-Michoux (1998, p.156) précise aussi que :

> « Le but ultime de l'enseignement de la géométrie [...] est d'amener les élèves au niveau de déduction formelle (niveau 3) sans pour autant négliger les niveaux inférieurs. » Une étude a montré qu'à un « cours de géométrie avec démonstrations » situé au niveau 3, seule une minorité d'élèves « ne dépassait guère le niveau 1 et certains [...] ne maitrisaient même pas le niveau [...] 0 ».

Ces constats rejoignent ainsi ceux de l'enquête CEDRE évoquée en introduction. Comme nous nous intéressons aux pratiques des enseignants, ces différents niveaux vont nous permettre de les étudier pour déterminer comment elles peuvent ou non favoriser le passage d'un niveau à l'autre.

III. QUESTIONNEMENT

Salin et Berthelot (1993) font état du fait que l'enseignement de la géométrie se révèle délicat pour les enseignants, et que ceux-ci peuvent prendre des libertés avec le programme quand ils ne sentent pas à l'aise avec cette discipline. Par ailleurs, les points de vue des didacticiens dont nous avons étudié les articles tendent à dire qu'il faut faire évoluer les démarches des enseignants de façon à faciliter le passage de la géométrie physique à la géométrie théorique, par exemple, en sensibilisant les futurs enseignants aux difficultés potentielles dans l'apprentissage de la géométrie en les mettant en conditions (Kuzniak et Rauscher, 2002).

Nous avons ainsi souhaité nous intéresser à la mise en œuvre concrète, en classe, du « passage » de la géométrie physique à la géométrie théorique, c'est-à-dire au « passage » de celui de la lecture simple d'un dessin issu de l'énoncé d'un exercice à l'appréhension et la validation de celui-ci grâce à des propriétés mathématiques. En quelque sorte, nous étudions le franchissement de la limite de la géométrie physique pour accéder au niveau de la géométrie théorique, plus spécifiquement la manière dont un enseignant assure la transition entre un raisonnement qui repose sur l'identification perceptive de figures à un raisonnement qui s'appuie sur leurs caractérisations par des propriétés. Nous avons alors mis en relation ce « passage » avec les niveaux de pensée de Van Hiele, et pour la transition entre la géométrie physique et la géométrie théorique, nous nous sommes concentrées sur le passage entre le niveau 1 et le niveau 2.

En fonction de ces niveaux, nous avons donc souhaité étudier les « gestes didactiques » des enseignants, plus précisément, d'après Bucheton :

> « Les gestes de l'enseignant sont didactiques dès lors qu'ils visent des savoirs, des modes de pensée et d'agir qui dans leur ensemble contribuent au développement cognitif, langagier, social et psycho-affectif de l'élève. Selon cette perspective, la didactique s'intéresse alors : […] aux objets de savoir enseignés et aux gestes d'étude et postures qui en permettent l'appropriation […] aux gestes professionnels spécifiques qui permettent la mise en relation pour les élèves de ce qui précède. » (Bucheton, 2009, p.40),

Pour cette même auteure, les gestes des enseignants sont fortement complexes et « épais » et par conséquent difficiles à « déplier et à décrire » (id.). Pour notre travail, nous chercherons à les décrire en étudiant l'« activité » géométrique des enseignants en perspective de celles des élèves. L'activité est entendue ici au sens de Rogalski (1995), c'est-à-dire qu'elle « est à inférer à partir des traces de réalisation de la tâche ; des observables en cours de réalisation, des questionnements » ; cette activité sera alors mise en perspective des tâches prescrites. Notre questionnement peut donc être formulé de la façon suivante : comment les enseignants procèdent-ils pour favoriser le passage de la géométrie physique à la géométrie théorique au cycle 3 ? A quel niveau de pensée les élèves se situent-ils ? Quels sont les gestes professionnels mis en œuvre pour aider un élève à changer de niveau ?

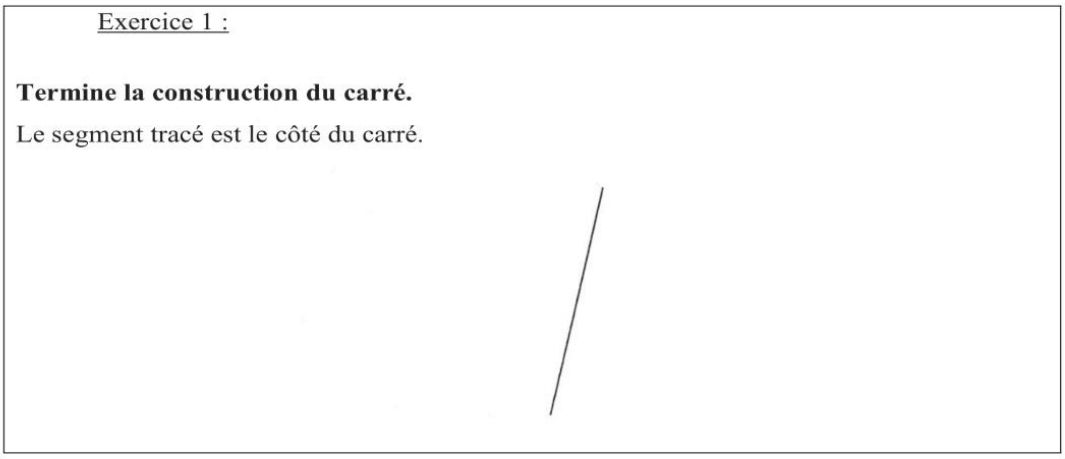
IV. EXPERIMENTATION

Notre expérimentation est basée sur un entretien avec deux enseignants expérimentés (une dizaine d'années d'expérience) de cycle 3 (CM1/CM2 et CM2 – élèves âgés de 9 à 11 ans) puis sur des observations de séances dans leur classe respective ; afin de pouvoir réaliser une étude comparative des pratiques de ces deux enseignants, nous leur avons proposé de faire une séance à partir de tâches que nous avions conçues et qui pouvaient être traitées dans les deux géométries (physique et théorique) et en mobilisant les niveaux 1 et 2 de pensée de Van Hiele.

Nous avons tout d'abord récolté des informations sur la pratique de ces deux enseignants via un entretien pour connaître leur conception des notions de figures et de dessin, leurs connaissances en géométrie (par exemple : quelle définition ont-ils d'un carré ?) et pour qu'ils nous décrivent quelques éléments de leurs pratiques (déclarées) en géométrie avec leurs classes (quelles sont les difficultés qu'ils peuvent repérer chez leurs élèves en géométrie et comment font-ils pour les pallier ?)

L'observation d'une séance de géométrie menée en classe a été pensée dans le but d'étudier les gestes professionnelles et l'activité géométrique des enseignants et des élèves. Nous avons imaginé trois tâches qui peuvent être résolues dans les niveaux de pensée 1 et 2 de Van Hiele. Ces tâches ont été prescrites dans les classes par les enseignants afin d'étudier les niveaux dans lesquels se situent les élèves et d'analyser si les gestes professionnels de l'enseignant permettent aux élèves de passer d'un niveau à l'autre ou d'un type de géométrie à un autre.

Deux problèmes de construction ont été d'abord proposés et conçus à partir de tâches figurant dans les manuels Petit Phare CM1 (2010) et Cap Maths (2010) : le premier portait sur la construction d'un carré à partir de l'un de ses côtés (Figure 1), le second, avait une consigne similaire, sauf qu'il s'agissait de construire un rectangle. Les constructions du carré et du rectangle demandent de mobiliser leurs propriétés (une identification perceptive étant insuffisante). Au-delà de la réussite à la construction, c'est aussi à la justification de cette dernière que nous nous intéresserons : est-ce que les propriétés du carré seront toutes citées sans hiérarchie (niveau 1) ou est-ce que les élèves et-ou l'enseignant chercheront à les organiser en lien avec les constructions qu'ils font (niveau 2) ?


Exercice 1 :

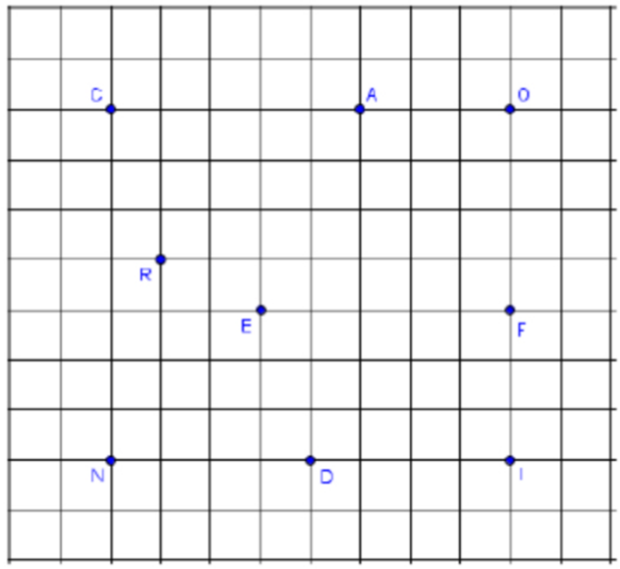
Termine la construction du carré.

Le segment tracé est le côté du carré.

Figure 1 *– Enoncé de l'exercice 1*

La troisième tâche consistait à reconnaître des figures sur papier quadrillé (Figure 2). Dans ce cas, la reconnaissance des figures peut être uniquement perceptive, mais la configuration complexe des points sur le quadrillage rend néanmoins difficile ce type d'identification.

Comme pour les deux tâches précédentes, la justification de la nature des figures peut être menée aux niveaux 1 et 2 selon l'organisation qui est faite ou non des propriétés.



1.Que peux-tu dire du quadrilatère CAFE ?

2. Que peux-tu dire du quadrilatère COIN ?

3. Que peux-tu dire du quadrilatère FARD?

Figure 2 *– Enoncé de l'exercice 2*

Seules les tâches ont été proposées aux deux enseignants, nous ne leur avons pas prescrit de mise en œuvre en classe ni de corrigé possible. Après l'observation de la séance, nous avons fait passer un nouvel entretien à chacun des deux enseignants observés de façon à avoir des précisions sur certains points clés de la séance. Nos questions portaient sur la conception de la séance, leurs attentes, leurs objectifs, mais aussi sur les choix qu'ils avaient opérés durant la séance. Nous leur avons aussi demandé quelles améliorations ils apporteraient et si le choix des exercices leur a paru judicieux.

V. RESULTATS

Le questionnaire, les observations en classe ainsi que les entretiens nous ont permis d'observer d'abord que les enseignants se servent de leurs propres connaissances géométriques pour amener les élèves à progresser dans ce domaine. Cette expérimentation nous a également permis de constater que les enseignants souhaitent que les élèves possèdent le plus de propriétés possibles des figures géométriques. Par exemple, concernant les propriétés du carré, l'énonciation des conditions nécessaires et suffisantes à la résolution de problème ne les satisfont pas, ils souhaitent que les élèves énoncent toutes les propriétés connues de la figure. Nous avons donc pu en déduire que les enseignants de cycle 3 ne peuvent permettre à leurs élèves d'atteindre le niveau 3 de pensée de Van Hiele et qu'ils les maintiennent systématiquement au niveau 2 en leur faisant énoncer, de façon systématique, l'ensemble des propriétés.

Dans les deux séances observées, une partie importante de l'activité des élèves et des enseignants est consacrée à l'utilisation des instruments de géométrie. En effet, afin de construire les figures demandées (tâches 1 et 2), les élèves sont amenés à utiliser des outils comme l'équerre, la règle, le compas (pour le report des longueurs) ; dans la tâche 3, les instruments peuvent aussi être exploités pour s'assurer des propriétés des quadrilatères. Notre expérimentation montre que la manipulation des instruments en géométrie représente une des difficultés majeures de cette discipline et les enseignants font état du fait que cette difficulté peut venir supplanter les apprentissages géométriques qu'ils cherchent à construire. Or, pour changer de niveau de pensée, la manipulation d'outils doit être acquise afin que l'élève se concentre sur le raisonnement. Les enseignants répondent à cette difficulté en étayant au maximum les élèves en leur rappelant par exemple comment effectuer le report d'une mesure avec un compas ou le traçage d'un angle droit avec une équerre. Souvent, les propriétés sont connues, mais la démonstration est délicate du fait de la manipulation. Les enseignants observés accordent donc une place importante à la réalisation des tracés et donc à l'utilisation des outils.

Nous nous demandions si les tâches que nous avions prescrites seraient exploitées pour permettre à un élève de passer du niveau 1 au niveau 2 de Van Hiele. Nous nous sommes aperçues dans notre expérimentation qu'il était compliqué pour les élèves de parvenir à un résultat satisfaisant sans l'étayage de l'enseignant. Néanmoins, en les amenant à formuler la liste la plus complète possible des propriétés des figures, l'enseignant cherche à amène ses élèves, avec un fort étayage au niveau 2 de Van Hiele. Cependant, le lien entre cette liste de propriétés et les justifications des constructions (exercices 1 et 2) n'est pas toujours fait explicitement.

En résumé, il apparaît clairement que l'utilisation d'outils de mesure et de tracé, tels que l'équerre, la règle graduée, le compas, est primordiale en géométrie d'une part pour réaliser des figures et d'autre part, les outils servent à vérifier des propriétés qui ont été conjecturées auparavant. Les élèves peuvent ainsi affirmer, dans une géométrie qualifiée d' « instrumentée », qu'une figure possède les propriétés citées et en déduire sa nature. Réciproquement, si les élèves connaissent le nature d'une figure, ils doivent pouvoir, si l'on se place au niveau 2 de Van Hiele, rassembler les propriétés qui caractérisent la figure en question et la construire à l'aide des outils. Les enseignants observés sont partis de ce que les élèves maîtrisaient et ont tenté de consolider leurs connaissances tout en les amenant à dépasser le niveau 1 de géométrie (et à certains moments le niveau 0 pour les élèves les plus en difficulté) avec un fort étayage.

VI. CONCLUSION

Les propos et la posture des deux enseignants observés sont naturellement orientés vers la volonté de vouloir faire progresser leurs élèves. Ils ont choisi de faire manipuler les élèves pour leur permettre d'acquérir des automatismes notamment en ce qui concerne l'utilisation des outils de géométrie. Une analyse complémentaire autour des productions des élèves aurait pu être envisagée dans la continuité afin de bien situer le niveau de géométrie dans lequel ils se trouvaient. Ainsi, nous aurions pu mettre en valeur la manière dont un enseignant revient sur les notions pas totalement ou non acquises par les élèves.

Nous nous questionnons encore quant à l'acquisition du quatrième niveau de pensée de Van Hiele qui correspond au passage du niveau 2 au niveau 3 rencontré au cycle 4 ($5^{ème}$, $4^{ème}$ et $3^{ème}$ – élèves âgés de 11 à 15 ans). Comment les enseignants du cycle 4, qui, à la différence de ceux observés, ne sont pas polyvalents, mais spécialistes de leur discipline prennent-ils en charge ce passage entre les niveaux 2 et 3 ? Quelles tâches sont proposées aux élèves ? Avec quelle mise en œuvre ? Autant de questions qui pourraient être investiguées dans le cadre d'une autre recherche sur ce thème.

REFERENCES

Arzoumanian P., Dalibard E. (2015). Mathématiques en fin de collège : une augmentation du pourcentage d'élèves de faible niveau, *Note d'information* de la DEPP, 19.

Bucheton D. (2009). Le développe des gestes professionnels dans l'enseignement français. De Boeck.

Braconne-Michoux A. (2014) Les niveaux de pensée en géométrie de VAN HIELE : de la théorie à l'épreuve de la classe, *Bulletin AMQ*, vol. LIV, n°1.

Braconne-Michoux, A. (1998) La géométrie au collège au travers des niveaux de P.M. Van Hiele, *Bulletin de l'APMEP*, 415, p. 153-161.

Fenichel M., Pauvert M., Pfaff N. (2014). Donner du sens aux mathématiques. Tome 1. Espace et géométrie. Paris : Bordas pédagogie.

Kuzniak A., Rauscher J.-C. (2002). Autour de quelques situations de formation en géométrie pour les professeurs d'école. IUFM d'Alsace. Actes du XXIXème colloque Inter IREM organisé par l'IREM des Pays de la Loire. Repéré à http://www.arpeme.fr/documents/27C678BC216956B50DB2.pdf

Perrin-Glorian M.-J., Godin M. (2014). De la reproduction de figures géométriques vers leur caractérisation, *Math-Ecole*, 222.

Roditi E. (2014). Didactique des mathématiques – Géométrie. Repéré à http://eroditi.free.fr/Enseignement/PE1/DDM-Geo.pdf

Rogalski J. (2004). La didactique professionnelle : une alternative aux approches de « cognition située » et « cognitiviste » en psychologie des acquisitions, *@ctivités*, 1 (2), 103-120.

Salin M.-H., Berthelot R. (1993) L'enseignement de la géométrie à l'école primaire, *Grand N*, 53, 39 à 56.

<u>Les manuels scolaires.</u>

Brault, R., Roques, N. & Ribanier, C. (2010). Petit Phare Mathématiques, cycle 3 CM2. Paris : Hachette.

Dussuc M.-P., Madier D., Combier G. & Charnay R. (2010). Cap Maths Cahier de géométrie et mesure, cycle 3 CM1. Paris : Hatier.