Des preuves écrites en géométrie pour travailler le concept mathématique d'implication en formation des professeurs

Virginie Deloustal-Jorrand IUFM d'Alsace - Équipe ACODIS - ERTé Maths à Modeler

RESUME

Dans cet article, nous présentons une étude épistémologique et didactique du concept mathématique d'implication dans trois cadres : logique formelle, ensembliste et raisonnement déductif. Notre hypothèse est que la plupart des difficultés et erreurs, tant dans l'utilisation que dans la compréhension de l'implication, viennent du manque de liens, dans l'enseignement, entre ces trois cadres. Cette étude est issue d'une partie de notre travail de thèse. Nous montrons, ici, comment un travail sur des preuves écrites en géométrie peut permettre des apprentissages sur l'implication.

1. INTRODUCTION

L'existence du concept d'implication dans la logique naturelle amène à le confondre avec l'objet mathématique et ce dernier paraît, en conséquence, transparent et facile à manipuler. D'autre part, l'implication, bien qu'au centre de toute activité mathématique, n'est presque pas enseignée ; elle apparaît plutôt comme un outil *paramathématique* : devant être connu sans être enseigné [Chevallard Y., 1985, p.50]. Pourtant, de nombreux étudiants manifestent des difficultés en ce qui concerne les conditions nécessaires et les conditions suffisantes jusqu'en fin d'université. C'est pourquoi, nous affirmons que cette identification de l'objet mathématique à l'implication de la logique naturelle est insuffisante pour une « bonne » appréhension et une « bonne » manipulation de cet objet.

Cette recherche est issue de notre thèse sur l'implication mathématique [Deloustal-Jorrand V., 2004] soutenue en 2004. Nous commençons par un bref aperçu des difficultés liées à l'implication de la logique naturelle. Après avoir distingué trois cadres pour l'implication mathématique, nous énonçons la thèse que nous avons soutenue, éclairée par le cadre théorique et les choix que nous avons faits pour notre ingénierie. Nous présentons ensuite notre situation ainsi que son analyse mathématique et didactique puis nous concluons par quelques résultats.

2. L'IMPLICATION DANS LA LOGIQUE NATURELLE

Nous appelons *logique naturelle* toutes les règles et conceptions ayant trait au raisonnement, le plus souvent en dehors d'un cadre mathématique, utilisées dans des situations de la vie courante. Nous appelons ainsi *implication naturelle* le concept d'implication de la *logique naturelle*. Nous utilisons cette *implication naturelle* chaque fois que nous utilisons les expressions « si…alors », « pour que…il faut que… », « seulement si… » etc. Ces nombreuses expressions ont des acceptions qui diffèrent selon le contexte dans lequel elles sont employées. C'est ce que nous allons essayer d'illustrer succinctement par quelques exemples.

2.1. Confusion avec seulement si ou avec si et seulement si

Considérons la phrase : *Tu auras un dessert (Q) si tu manges ta soupe (P).*
Cette phrase peut s'exprimer par *Si P alors Q* ou *P implique Q* (condition suffisante).
Pourtant, par cette phrase, on veut la plupart du temps signifier *Tu auras un dessert seulement si tu manges ta soupe* (condition nécessaire mais non suffisante) puisqu'une bêtise en cours de repas peut supprimer le dessert (ceci s'exprime par « Q implique P »). Mais la phrase est, en fait, plus nuancée, elle exprime, non seulement qu'il est nécessaire de manger la soupe, mais aussi que, sous certaines conditions, cela est suffisant pour avoir un dessert. Les conditions en question étant le plus souvent tacites et comprises par tous suivant le contexte. On voit donc, ici, que l'implication de départ (P implique Q) doit être interprétée par sa réciproque (Q implique P) ou encore par une équivalence sous conditions (P équivaut à Q).

2.2. Le principe du maximum d'informations

Une autre cause de la confusion de l'implication avec l'équivalence est *le principe du maximum d'information* très utilisé implicitement dans la logique naturelle. Ce principe exprime que ce qui ne nous est pas dit n'existe pas, ou tout au moins n'est pas connu, car sinon on nous l'aurait dit.
Dans son article *Cosmonaute*, M. Legrand, [Legrand M., 1983, p.65] donne un exemple de l'utilisation de ce principe dans la logique naturelle.

> *- Dans le langage courant, l'implication "si...alors..." est presque systématiquement interprétée comme une équivalence ; par exemple : quand je dis : "s'il fait beau, je sortirai", si je suis sorti, "logiquement" la plupart des gens en concluent : "il a fait beau".*
> *- En fait, on ne peut rien conclure en termes de certitude, mais il faut bien reconnaître qu'il y a contradiction apparente à "sortir quand il fait mauvais" après avoir précisé "qu'en cas de beau temps on sortirait".*
> *- Le principe du maximum est très utilisé inconsciemment dans le langage courant et met en conflit "la logique courante" et la "logique scientifique".*

2.3. Prémisse fausse et causalité

Dans la logique naturelle, une implication à prémisse fausse est très souvent jugée soit fausse soit inintéressante, cependant elle peut parfois être acceptée comme vraie. Par exemple, si moi qui suis une femme, je dis :
si j'étais un homme, je ferais mon service militaire ou *si j'étais un homme, j'allaiterais mon bébé*, la première phrase sera probablement déclarée vraie alors que la seconde sera jugée fausse puisque ceci est impossible dans l'état actuel de la médecine. Or, si l'on traitait ces deux implications dans la logique formelle, elles seraient toutes deux déclarées vraies puisque la prémisse *si j'étais un homme* est fausse. Il semble que, dans la logique naturelle, bien que l'on sache

que je suis une femme, pour donner une valeur de vérité à cette implication on suppose que la prémisse est vérifiée, c'est-à-dire que l'on fait *comme si* j'étais un homme. Ce *comme si* est d'ailleurs traduit par l'utilisation du conditionnel introduit par : *si j'étais….*

De même, les implications entre deux évènements n'ayant aucun lien sont, en général, déclarées comme n'ayant aucun sens ou bien comme étant fausses.
Par exemple la phrase *Si les souris ont une queue alors Dakar est la capitale du Sénégal* semble vide de sens. Pourtant, notons que, dans la logique formelle, cette implication dont la prémisse et la conclusion sont vraies est déclarée vraie.

Nous avons montré [Deloustal-Jorrand V. 2000&2004] que des futurs enseignants utilisent le même type de raisonnement lorsqu'ils sont face à l'implications *Si 3 est pair alors 4 est pair*.
En général, ils la déclarent fausse, et ceci pour différentes raisons, par exemple parce que :
- la prémisse est fausse
- il n'y a pas de lien de causalité (4 est pair mais ce n'est pas dû au fait que 3 est pair)
- si on suppose que 3 est réellement pair alors 4 ne peut pas être pair puisque 4=3+1.

2.4. Conception causale-temporelle de l'implication

Nous appelons « théorème-en-acte de causalité » la *propriété-en-acte* suivante :

> *« A implique B » n'a de raison d'être, et a fortiori ne peut être vraie, que lorsque A et B ont un lien de cause à effet entre elles.*

Ce théorème-en-acte est faux en mathématique où seules les vérités respectives de la prémisse et de la conclusion permettent de déterminer la valeur de vérité de l'implication (cf. tables de vérité). Cependant, ce théorème-en-acte est très proche de la logique naturelle et il est renforcé par certaines expressions langagières associées à l'implication : *B résulte de A* ; *B est la conséquence de A*.
De plus, ceci induit très souvent un ordre chronologique entre la prémisse et la conclusion, puisque, dans le monde physique, la cause précède la conséquence. Cela conduit à la propriété-en-acte :

> *Lorsque A implique B, A doit être vérifiée avant B*

Mais alors si dans A $\Rightarrow$ B, A doit précéder B, il est difficile d'admettre, par exemple, que B soit une condition nécessaire pour A.
Nous avons montré, dans une expérimentation avec de futurs professeurs du secondaire, que la *conception causale-temporelle* attachée à ces propriétés était source d'erreurs dans le maniement de l'implication mathématique [Deloustal-Jorrand V. 2000&2004].

2.5. Les manuels de seconde de l'enseignement français

Les manuels de seconde issus des programmes 2000 ne prennent pas en charge la définition de l'implication, il y a une identification du concept mathématique à celui de la *logique naturelle*. Voici trois exemples :

> *Une implication est une phrase mathématique indiquant qu'une donnée (1) entraîne (ou implique) une conclusion (2).* [Déclic, 2nde, 2000]
>
> *Si...alors : tournure "standard" qui tend à expliquer que si une propriété est satisfaite, on peut en déduire qu'une seconde l'est également.* [Pyramide, 2nde, 2000]
>
> *La phrase "si A alors B" est une implication. On note A $\Rightarrow$ B et on lit "A implique B" ou "A donc B".* [Collection Indice, Bordas, 2nde, 2000]

Il y a donc un écrasement de l'implication mathématique sur *l'implication naturelle* qui ne permet pas de présenter toutes les spécificités de la première.

2.6. Entre formateurs de mathématiques

Nous avons essayé de montrer grâce à quelques exemples, qu'une implication énoncée en langue naturelle signifie autre chose ou, tout au moins, plus que ce qui est réellement dit. L'implication naturelle est floue et reste tributaire du contexte et ceci même pour des formateurs de mathématiques de l'IUFM, comme le montre l'anecdote suivante.

Dans notre dernier concours blanc, une question d'un exercice de géométrie était formulée de la façon suivante : « Quelle condition suffit-il d'imposer au triangle SEG pour que le quadrilatère SIMJ soit un losange ? » (Une condition nécessaire et suffisante était que le triangle soit isocèle).
Ce n'est qu'au moment de la correction, et sur une question de ma part, que les différentes interprétations chez les formateurs ont été confrontées. Certains ont compris cette question comme la demande d'une condition suffisante au sens mathématique et ont accepté les réponses du type « il suffit que le triangle soit équilatéral » alors que d'autres ont refusé ces réponses au motif qu'il fallait une « condition minimale ». Certains ont parlé de « condition strictement suffisante » d'autres ont interprété l'expression « quelle condition suffit-il d'imposer » par « donnez une condition suffisante et nécessaire ». Ces derniers défendent le fait qu'à une question du type : « quelle condition suffit-il d'imposer à un parallélogramme pour qu'il soit un rectangle ? » il serait ridicule d'accepter une réponse du type « il suffit que ce soit un carré » même si elle est mathématiquement correcte…
Il s'agissait donc bien, ici, de l'interprétation d'une phrase de français par des professeurs de mathématiques (enseignants du secondaire et enseignants-chercheurs confondus).
Ceci rejoint des résultats de J. Rolland [Rolland J., 1999] qui avait demandé à des étudiants de DEUG de donner une condition suffisante qui ne soit pas nécessaire, les réponses en langage mathématique étaient souvent du type :

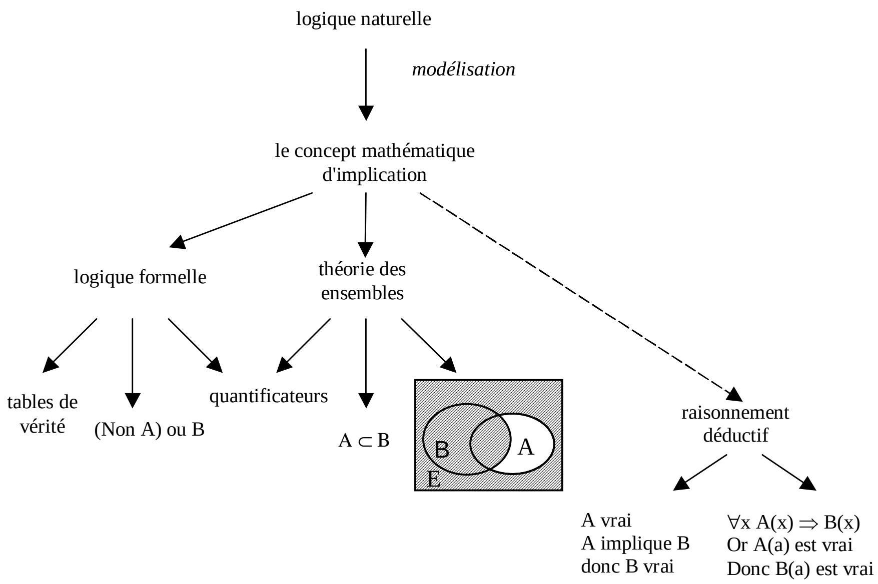
> *« Un parallélogramme qui a deux angles droits est un rectangle. La condition est suffisante mais pas nécessaire. En effet, un seul angle droit suffit. »*
>
> *L'hypothèse que nous retiendrons [est qu'il s'agit-là d'] une conception de la condition nécessaire comme condition suffisante « minimale ». Regardons l'exemple proposé, il y a équivalence entre la classe des « parallélogrammes avec un angle droit » et des « parallélogrammes avec deux angles droits ». Pourtant, le fait de rajouter qu'il y ait un second angle droit est considéré comme une information supplémentaire qui ne permet plus à la condition « parallélogramme avec deux angles droits » d'être vue comme nécessaire. Une condition nécessaire apparaît donc ici comme une condition suffisante qui contiendrait un minimum d'informations. [Rolland J., 1999, p. 224-225]*

Il me paraît donc toujours aussi nécessaire de travailler, en formation des professeurs, sur cette difficulté d'appréhension de l'implication mathématique en ce qu'elle a de commun et de différent avec *l'implication naturelle*.

Ces ambiguïtés de la langue française, qu'elles soient dues à des abus de langages, à des interprétations dépendant du contexte, à des interprétations en terme de causalité et temporalité, rendent confus le concept naturel d'implication. Ceci aura, évidemment, des conséquences sur la compréhension et l'utilisation du concept mathématique que nous allons présenter maintenant.

3. TROIS CADRES POUR L'IMPLICATION MATHEMATIQUE

Le concept mathématique d'implication peut être interprété comme un modèle du concept de la logique naturelle. Comme tout modèle, le concept mathématique est fidèle à l'objet naturel sous certains aspects et moins, voire pas du tout, sous d'autres. Cette distance entre l'objet naturel et l'objet mathématique entraîne des difficultés dans l'utilisation de l'implication mathématique.
Pour notre analyse épistémologique [Deloustal-Jorrand V, 2000 & 2004 & 2007] nous avons choisi de distinguer trois cadres pour l'implication : cadre ensembliste, cadre de la logique formelle et cadre du raisonnement déductif. Ces trois cadres sont bien évidemment reliés et leurs intersections ne sont pas vides.
Nous appelons « raisonnement déductif » une structure ternaire basée sur un pas d'inférence : « A est vrai, A implique B est vrai, donc B est vrai » [Duval, 1993, p.44]. Ce troisième cadre n'a pas le même statut que les deux autres, l'implication y est un outil. Dans l'enseignement secondaire français ce cadre est très présent et fait souvent office de seule définition.



Se placer dans le cadre ensembliste signifie qu'on considère que les propriétés définissent des classes d'objets : à chaque propriété correspond un ensemble, l'ensemble des objets qui ont cette propriété. Alors l'implication dans le cadre ensembliste peut être exprimée comme suit :
dans l'ensemble *E*, si *A* et *B* sont les ensembles des objets satisfaisant respectivement les propriétés A et B, alors l'implication entre énoncés contingents A(x) ⇒B(x) est satisfaite par tous les objets x de *E* sauf ceux qui sont dans *A* sans être dans *B*, c'est-à-dire par tous les objets de la zone hachurée ci-dessous. L'implication est fausse pour les objets tels que la prémisse A(x) est vraie alors que la conclusion B(x) est fausse (ensemble Non A ou B, figure 1). Dans le cas où A est inclus dans B, l'implication est vraie pour tout objet x de E (figure 2).

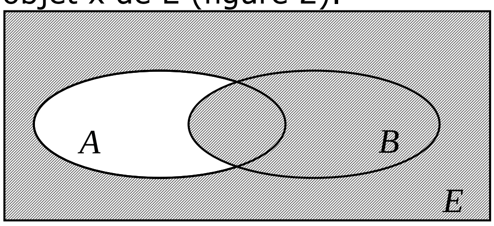


figure 1

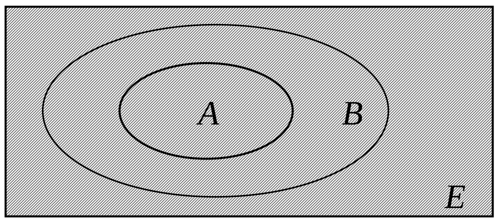


figure 2

4. THESE SOUTENUE ET CADRE THEORIQUE

Nos premiers résultats ont montré les difficultés récurrentes liées à l'implication même auprès de professeurs débutants, ces difficultés étant souvent liées à une *conception causale de l'implication*[1]. C'est pourquoi nous soutenons qu'il est nécessaire de connaître et d'établir un jeu dialectique entre les trois cadres, logique formelle, ensembliste et raisonnement déductif, pour une bonne

[1] Nous appelons *conception causale de l'implication* l'identification de « A ⇒ B » à la phrase « A est la cause de B » [Deloustal-Jorrand V., 2000 & 2004 & 2007].

appréhension et une bonne utilisation de l'implication. Pour étudier cette thèse, nous avons construit une ingénierie didactique qui problématise l'implication à l'aide de situations relevant de ces trois différents cadres.
Pour cela, nous nous sommes appuyée sur la théorie des situations de G. Brousseau [Brousseau G., 1997], sur la théorie des champs conceptuels de G. Vergnaud [Vergnaud G., 1990] ainsi que sur les jeux de cadres développés par R. Douady [Douady R., 1986].

5. PRESENTATION SUCCINCTE DE NOTRE INGENIERIE

5.1. Choix généraux pour notre ingénierie

Le public

Le public des professeurs stagiaires[2] nous a paru très pertinent pour deux raisons. En effet, d'une part ils pensent que ce concept est transparent pour eux et d'autre part, ils sont confrontés à des élèves qui ne savent pas comment utiliser l'implication et qui ne reconnaissent pas ses propriétés. D'ailleurs, V. Durand-Guerrier [Durand-Guerrier V., 1996] montre comment les pratiques des professeurs contiennent des implicites incompris des élèves. Nous avons donc jugé opportun de leur donner les moyens de revenir sur leurs connaissances sur l'implication et d'en construire de nouvelles.

Les types de tâches : élaboration de preuves / analyse de preuves

Notre situation propose deux types de tâches pour permettre un travail sur l'implication : la construction d'une preuve (séance 1) et l'analyse d'une preuve écrite (séance 2). Le premier type oblige à la recherche de conjectures, d'exemples ou de contre-exemples, alors que le second type oblige au contrôle du résultat, des outils et des pas d'inférence.

La mise en jeu des trois cadres : logique / ensembliste / raisonnement déductif

Nous nous sommes attachée, ici, à ce que nos problèmes permettent et nécessitent la mise en œuvre du cadre ensembliste et/ou logique pour la résolution, considérant que le cadre déductif sera toujours présent pour peu que les problèmes ne soient pas uniquement posés dans le cadre logique.

Les objets mathématiques sont faciles d'accès

Notre hypothèse est que, pour qu'un apprentissage puisse se faire sur l'implication, il faut que le travail se fasse sur le raisonnement et la preuve. D'autre part pour qu'on puisse repérer des erreurs dues à l'implication, nous devons nous donner les moyens de contrôler que ces erreurs ne sont pas dues à des concepts mathématiques. Pour cela, il faut que les concepts mathématiques en jeu n'apportent pas, par eux-mêmes, de difficultés. Les objets que nous proposons dans ces situations ont donc été choisis pour satisfaire ce critère.

[2] Les professeurs stagiaires sont des professeurs en formation initiale à l'Institut Universitaire de Formation des Maîtres (IUFM) qui ont une classe de collège ou de lycée en responsabilité.

Les implications en jeu ne sont pas des CNS

Notre hypothèse est que, pour problématiser l'implication, il faut pouvoir distinguer les conditions nécessaires des conditions suffisantes. C'est pourquoi, nous proposons des situations où la plupart des implications en jeu ont des réciproques fausses.

Les enjeux de vérité et de découverte sont présents

Dans nos problèmes, on ne connaît pas d'avance le résultat que l'on va obtenir puisqu'il faut « trouver les conditions telles que… » ou discuter de la véracité (non évidente) d'implications données. L'activité mathématique est faite d'essais, de conjectures, d'exemples et de contre-exemples et elle est motivée par la résolution du problème. L'enjeu de vérité est réel dans ces problèmes et nous faisons l'hypothèse que cela facilite le passage au cadre ensembliste puisque le cadre déductif n'est plus alors suffisant.

Les types d'objets : objets institutionnels / objets non institutionnels

Dans nos problèmes, les classes d'objets en jeu (en géométrie, les quadrilatères ayant deux côtés opposés égaux) ne sont pas institutionnalisées dans l'enseignement et les propriétés et les théorèmes qui leur sont associés ne sont pas familiers. Nous faisons l'hypothèse que ceci rend l'utilisation du cadre ensembliste nécessaire ou tout au moins économique. Il n'est plus possible de penser les propriétés comme des qualités d'objets, il faut considérer les ensembles qui leurs sont associés.

L'organisation sociale : travail individuel / travail en groupe

Notre hypothèse est que le travail de groupe, parce qu'il favorise les échanges et les débats, est indispensable pour qu'une confrontation puisse avoir lieu entre les différents cadres. Le travail individuel, quant à lui, permet à chacun d'essayer une piste de résolution dans le cadre qui lui convient. Cette phase individuelle est, pour nous, un préalable nécessaire pour nourrir le débat à venir, la richesse des argumentations en découlant directement.

5.2. Conditions de l'expérimentation

Une première expérimentation a concerné plus particulièrement la confrontation entre les cadres de la logique formelle et de la logique naturelle [Deloustal V., 2000]. Le problème que nous présentons est issu d'une autre expérimentation menée auprès d'une cinquantaine de professeurs stagiaires de l'IUFM[3] de Grenoble, sur deux séances de trois heures. Cette expérimentation, concernant plus spécialement les cadres ensembliste et logique formelle, comporte deux types de tâches. La première séance est consacrée à l'élaboration de preuves, en géométrie et sur les pavages de polyminos, alors que la seconde porte sur l'analyse de preuves dans ces deux domaines. La situation présentée dans cet article concerne la partie sur les preuves écrites en géométrie faisant suite à la situation géométrie 1 que nous rappelons ci-dessous :

[3] Institut Universitaire de Formation des Maîtres

Géométrie 1. Soit ABCD un quadrilatère qui a deux côtés opposés de même longueur.
À quelles conditions sur les diagonales a-t-on :
2 angles droits (P1) ? 2 autres côtés de même longueur (entre eux) (P2) ?
2 autres côtés parallèles entre eux (P3) ?

5.3. Présentation du problème sur les preuves écrites en géométrie, Géométrie 2

Soit ABCD un quadrilatère qui a deux côtés opposés de même longueur. À quelles conditions sur les diagonales a-t-on : (P3) les 2 autres côtés de même longueur (entre eux) ?

Une condition nécessaire et suffisante est que « les diagonales se coupent en leur milieu » (on l'appellera C1). Que pensez-vous de l'échange suivant ?

X : Mais attends, la condition « une des diagonales coupe l'autre en son milieu » est peut-être aussi une condition nécessaire et suffisante ! (on l'appellera C2)

Y : Impossible puisque cette condition (C2) est strictement plus faible que (C1) !

6. ANALYSE MATHEMATIQUE ET DIDACTIQUE DE LA SITUATION GEOMETRIE 2

La tâche consiste en l'analyse mathématique de l'échange d'arguments entre X et Y mais elle induit aussi d'autres questions : C1 est-elle réellement une condition nécessaire et suffisante ? C2 en est-elle une autre ? Quel est l'ensemble sur lequel C1 et C2 sont équivalentes ?
L'analyse de l'échange peut se faire dans le cadre logique ou dans le cadre ensembliste (diagramme de Venn ou exhibition d'un contre-exemple). D'autre part, le cadre ensembliste est un outil nécessaire pour trouver l'ensemble sur lequel il y a égalité entre les ensemble correspondant respectivement aux propriétés C1 et C2.
Par souci de concision nous n'exposons, ci-dessous, que l'analyse de la phrase de Y et quelques résultats mathématiques[4]. Nous présentons trois stratégies, les deux premières *décontextualisées* par rapport à ce problème, attachées respectivement au cadre logique et au cadre ensembliste (contre-exemple / diagramme de Venn), la troisième *contextualisée* prenant en compte les contenus sémantiques.

6.1. Validité de la phrase de Y, Stratégie 1 : Cadre logique

L'argument de Y n'est pas valable.
En effet, l'équivalence entre deux propriétés dépend du domaine dans lequel on se place.
Deux conditions qui ne sont pas équivalentes sur un domaine peuvent être équivalentes lorsqu'une troisième condition est vérifiée. C'est-à-dire qu'on peut avoir : « $A \Leftrightarrow B$ » est fausse mais, « $(A \text{ et } H) \Leftrightarrow (B \text{ et } H)$ » est vraie.

[4] Pour une analyse plus approfondie le lecteur pourra se référer à [Deloustal-Jorrand V., 2004]

Nous faisons l'hypothèse que cet argument théorique est peu convaincant s'il est donnée seul, et qu'il sera donc probablement accompagné d'un contre-exemple.

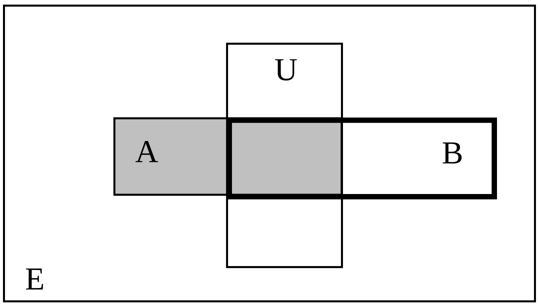
6.2. Validité de la phrase de Y, Stratégie 2 : cadre ensembliste

À l'aide d'un contre-exemple

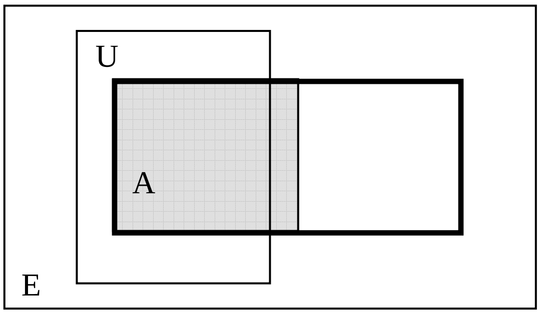
L'argument de Y n'est pas valable. Prenons comme propriétés :
H : être un parallélogramme
C1 : avoir 4 angles droits
C2 : avoir 1 angle droit
Dans les quadrilatères, la condition C2 est strictement plus faible que la condition C1. Pourtant, dans les parallélogrammes, ces deux conditions sont équivalentes.
Ce choix de propriétés est donc un contre-exemple à l'argument de Y.
Nous faisons l'hypothèse que certains contre-exemples, facilement mobilisables, et à la portée de tous, convaincront plus facilement qu'un argument théorique qu'il soit logique ou ensembliste.

À l'aide d'un diagramme de Venn

Deux conditions A et B peuvent être équivalentes sur un sous-ensemble U sans l'être sur un ensemble E, comme l'illustre le schéma ci-dessous.



Ceci est vrai, en particulier, dans le cas où l'une des conditions implique l'autre, comme le montre le schéma ci-dessous.

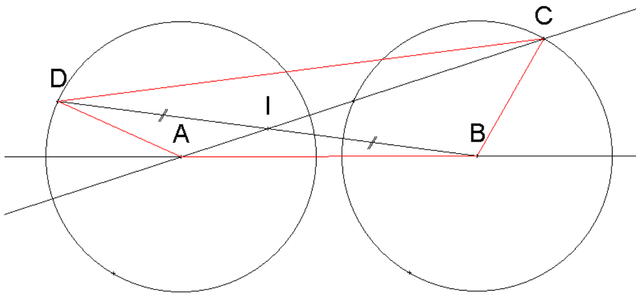


Dans le problème, C2 et C1 pourraient être équivalentes dans H, affirmer le contraire nécessite une démonstration sur les objets mathématiques.
Par conséquent l'argument de Y n'est pas valable.
Nous faisons l'hypothèse que cet argument théorique peut paraître peu convaincant et qu'il devra être accompagné d'un contre-exemple mathématique

ou tout au moins d'une représentation sous forme de patates, pour remporter l'adhésion du groupe.

6.3. Validité de la phrase de Y, Stratégie 3 : Contenus sémantiques

Y a raison. Dans ce problème-là, C2 n'est pas une condition suffisante pour P3 sous H. Il suffit de regarder le contre-exemple ci-dessous qui vérifie H et C2 mais pas P3.



6.4. Compléments (cadre ensembliste) : objets vérifiant H et P3

Pour permettre au lecteur de saisir l'ensemble de la tâche, nous lui donnons la réponse au problème posé aux stagiaires la semaine précédente. Les objets satisfaisant à la fois H et P3 ont deux côtés opposés égaux deux à deux, nous avons donc l'équivalence :

H et P3 $\Leftrightarrow$ Parallelogramme OU Quadrilatère Croisé QC [figure 3]

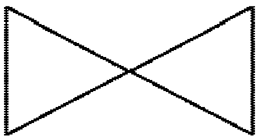


figure 3

6.5. Compléments (cadre ensembliste) : implications entre C1 et P3

La première affirmation est fausse. En effet, dans H, C1 n'est pas une condition nécessaire à P3. Si l'on se place dans Q, l'ensemble des quadrilatères, on a les équivalences suivantes :

H et P3 $\Leftrightarrow$ { être un parallélogramme $\Leftrightarrow$ diagonales se coupent en leur milieu (C1)
ou
être un croisé *papillon*

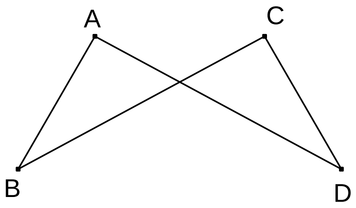


figure 4 : Quadrilatère croisé *papillon* associé au trapèze isocèle

C1 n'est donc pas nécessaire pour avoir P3, le croisé papillon est un contre exemple, mais C1 est bien une condition suffisante pour avoir P3.
En revanche, si l'on se restreint à l'ensemble des quadrilatères non croisés, on a alors les équivalences : [H et P3] ⇔ Parallélogramme ⇔ C1 (diagonales se coupent en leur milieu). En conséquence, sous H, C1 et P3 sont des conditions équivalentes dans les non croisés.

6.6. Compléments (cadre ensembliste) : implications entre C1 et C2

Dans notre problème, sous l'hypothèse H, les conditions C1 et C2 ne sont pas équivalentes comme le montrent les deux contre-exemples ci-dessous : ce sont deux quadrilatères qui vérifient H et C2 mais pas C1.

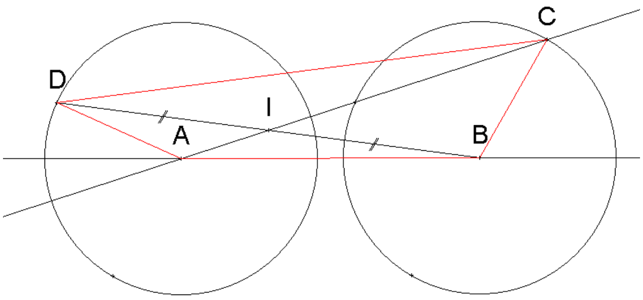


figure 5 : contre-exemple 1

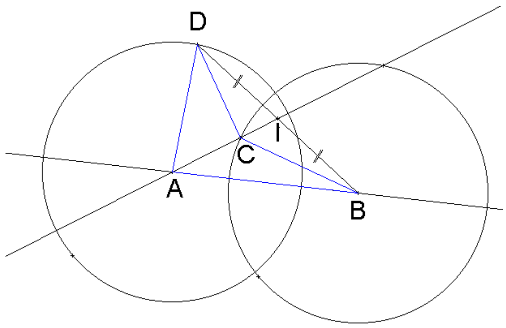


figure 6 : contre-exemple 2

Notre étude mathématique [Deloustal-Jorrand V., 2004] montre que sous l'hypothèse H , les deux conditions C1 et C2 ne sont pas équivalentes même si l'on se restreint aux quadrilatères convexes. Il faut, en fait se restreindre à un ensemble non institutionnalisé dans l'enseignement français et assez difficile à déterminer. C'est uniquement sur ce même ensemble que les propriétés P3 et C2 sont équivalentes.

6.7. Les choix didactiques pour la situation Géométrie 2

Mise en situation des cadres logique et ensembliste

Nous faisons l'hypothèse que, pour observer d'éventuels conflits entre le cadre de la logique formelle et celui du raisonnement déductif, il faut nous placer dans un contexte mathématique. En effet, nos précédentes expérimentations ont montré qu'une *conception causale de l'implication* peut cohabiter avec des connaissances de logique. En conséquence, dans un contexte logique, les professeurs pourraient être tous d'accord sans aucune difficulté et nous ne pourrions ni mesurer la mobilisation du cadre logique ni observer une éventuelle confrontation avec le cadre du raisonnement déductif. D'autre part, les professeurs ayant déjà travaillé sur le problème, les connaissances géométriques ne devraient pas être un obstacle à la résolution de la tâche, c'est pourquoi nous avons choisi un contexte mathématique ici.

Valeur de vérité fausse pour l'assertion de X

La proposition de X « la condition une des diagonales coupe l'autre en son milieu est peut-être aussi une CNS ! » est fausse. Nous faisons l'hypothèse que, pour qu'une confrontation entre le cadre de la logique formelle et celui du raisonnement déductif ait lieu et donc pour que les débats sur l'implication soient alimentés, il faut que les stratégies issues respectivement de ces deux cadres donnent des réponses contradictoires. Ainsi, nous avons choisi une assertion mathématiquement fausse alors qu'elle pourrait être logiquement valide.

Place des quadrilatères croisés

La phrase « C1 est une condition nécessaire et suffisante à P3 », présentée comme vraie, ne l'est, en réalité, que dans l'ensemble des quadrilatères non croisés. Nous faisons l'hypothèse que ceci incitera les professeurs à prendre en compte les croisés. Ceux-ci ne sont quasiment pas enseignés en France et nous avons montré que leur présence fait apparaître des stratégies basées sur le cadre ensembliste.

7. QUELQUES RESULTATS SUR LA SITUATION GEOMETRIE 2

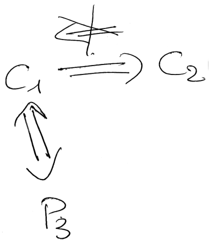
De nombreux stagiaires travaillent uniquement sur les propriétés mathématiques mais d'autres proposent des réponses dans le cadre logique, la plupart des groupes ont des réponses mixtes.

7.1. À propos de l'implication

Prégnance du raisonnement déductif

Certains stagiaires, dans différents groupes, essaient de résoudre le problème en manipulant les implications qu'ils connaissent. La sémantique n'intervient pas, C1, C2 et P3 sont des propriétés « quelconques ». Ils partent des implications connues: « C1 ⇒ P3 » ; « C1 ⇒ C2 » et « C2 n'implique pas C1 » pour essayer de valider ou non l'implication « C2 ⇒ P3 ».

Groupe 2, Armelle



Groupe 2, Anne

si $C_2 \not\Rightarrow C_1$
alors $C_2 \not\Leftrightarrow C_1$
or $C_1 \Leftrightarrow P_3$
dc $C_2 \not\Leftrightarrow P_3$.

donc Y argumentat° / rais. valide

Plusieurs stagiaires ayant produit de telles chaînes d'implications de savent pas les utiliser et conclure. Cette stratégie vient du raisonnement déductif où l'on établit des chaînes d'implications toutes dans le même « sens » pour aller de l'hypothèse à la conclusion, ici cette stratégie ne semble pas efficace.
De plus, les rédactions des preuves sous forme déductive sont toutes très soignées : choix des connecteurs, ordre des inférences…

Problématisation des conditions nécessaires et suffisantes

Comme dans la situation *Géométrie 1* les conditions nécessaires et suffisantes sont au cœur des débats, il semble qu'ici aussi il y ait parfois des confusions entre les deux.

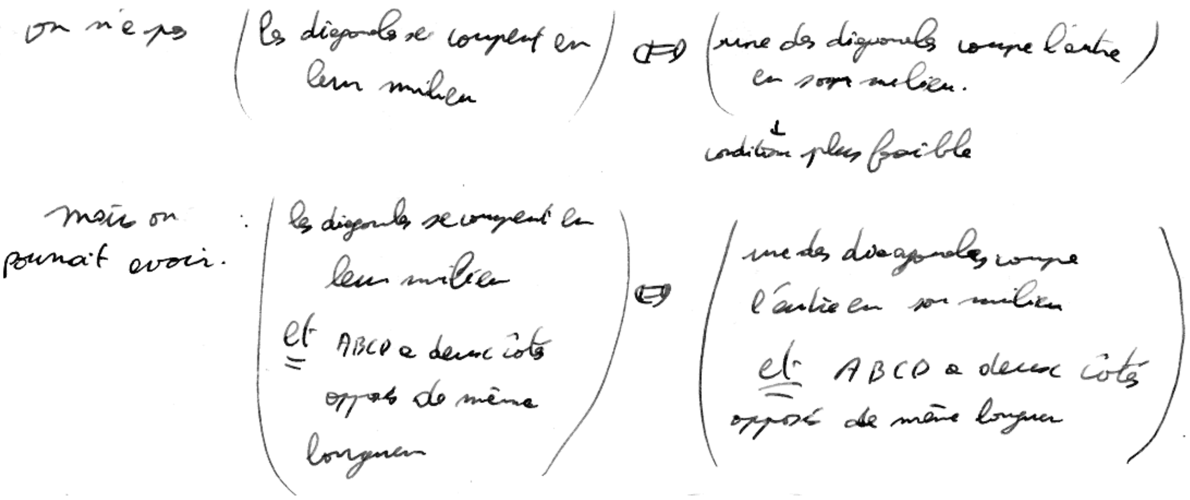
7.2. À propos du cadre logique

Argument dans le cadre logique

Quelques étudiants invalident l'argument de Y dans le cadre logique. Par exemple, dans le groupe 3, dès la lecture de l'énoncé, Paul déclare qu'il n'est pas d'accord avec Y :

> *Paul : Y dit que si on enlève une condition, elle ne reste plus nécessaire, moi je dis elle peut rester nécessaire si dans les hypothèses elle est déjà vérifiée.*

Dans le groupe 6, l'argument est le même, bien que donné avec les propriétés mathématiques.
Il peut y avoir deux conditions équivalentes, même si l'une est apparemment plus faible :


on n'a pas (les diagonales se coupent en leur milieu) $\Leftrightarrow$ (une des diagonales coupe l'autre en son milieu.)
condition plus faible
mais on pourrait avoir : (les diagonales se coupent en leur milieu et ABCD a deux côtés opposés de même longueur) $\Leftrightarrow$ (une des diagonales coupe l'autre en son milieu et ABCD a deux côtés opposés de même longueur)

Alors que le premier argument est peu convaincant pour le groupe 3, le deuxième est accepté par le groupe 6.

Pas de contenus sémantiques dans le cadre logique

Anne (groupe 2) distingue explicitement sur sa feuille :
- *le problème du raisonnement, argumentation* (avec des implications décontextualisées)

- *le problème de l'affirmation dans le problème* (avec les propriétés des objets en jeu)

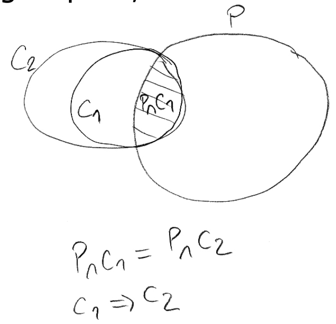
Notre hypothèse est que cette réponse vient d'une conception du cadre logique déjà mise en valeur [Deloustal, 2000 & 2004] : *dans le cadre de la logique, il n'y a pas besoin de regarder les contenus mathématiques*. Cette conception est ici un obstacle à la résolution de la tâche.

7.3. À propos du cadre ensembliste

Argument ensembliste théorique

Il y a eu quelques essais pour invalider l'argument de Y dans le cadre ensembliste. Ces preuves n'ont jamais été suivies par le reste du groupe.

groupe 2, Armelle



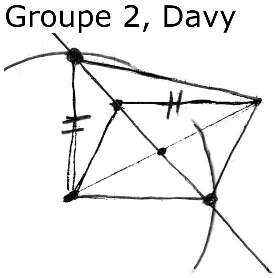
Argument sur un contre exemple contextualisé

production groupe 3

Je ne suis pas d'accord avec Y.
Exemple : CNS pour qu'un parallélogramme soit un rectangle :
- 4 angles droits
- 3 angles droits (CNS plus faible !)

Recherche d'un contre-exemple dans une classe donnée

Voici un contre-exemple à l'implication C2 ⇒ P3.
Groupe 2, Davy

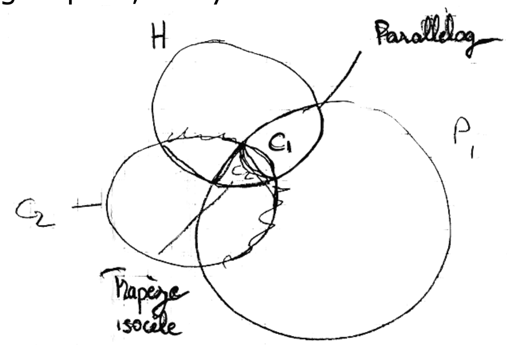


Ce contre-exemple est construit à partir d'un parallélogramme et les cercles reportant la longueur sont visibles. Nous voyons en cela la présence du cadre ensembliste. En effet, on se place dans une classe d'objets, celle des quadrilatères vérifiant C1 et H représentée par le parallélogramme, puis, tout en restant dans cette classe (les reports de longueur l'attestent), on cherche à construire un contre-exemple. Ce procédé est utilisé par plusieurs groupes et bien que nous l'ayons souvent vu dans les pavages de polyminos [Deloustal-

Jorrand V., 2004 & 2007], nous ne l'avions pas encore vu apparaître en géométrie.

Étude des implications en jeu

Tous les groupes s'intéressent, à des degrés différents, aux implications entre les propriétés mathématiques C1, C2 et P3, aucun groupe ne reste uniquement sur l'échange entre X et Y.
On peut voir quelques rares diagrammes de Venn mettant en lien les propriétés.
groupe 2, Davy



Les quadrilatères croisés ne sont plus laissés de côté *a priori*, les quadrilatères concaves sont aussi utilisés bien qu'ils soient qualifiés de « bizarres ». Lorsqu'une implication est démontrée fausse aucun groupe ne cherche à restreindre le domaine pour avoir une implication vraie. Le cadre ensembliste a « gagné du terrain » puisque les stagiaires ne se restreignent plus aux convexes mais il n'est pas encore un réel « outil mobilisable » puisque les stagiaires ne réfléchissent pas en termes de classes d'objets.

7.4. Cohabitation des trois cadres

Dans les groupes, des stratégies issues de plusieurs cadres cohabitent. Nous avons vu des stratégies issues du cadre du raisonnement déductif (suite d'implications, preuve de C2 $\Rightarrow$ P3), des stratégies issues du cadre ensembliste (patates, contre-exemples) et enfin des réponses dans le cadre logique. La situation comporte différentes questions résumées par la réponse du groupe 3.

Groupe 3, bilan
X a tort mais l'argument de Y est faux.

8. QUELQUES CONCLUSIONS SUR CETTE SITUATION

Les professeurs stagiaires ont passé plus d'une heure sur cette situation sans qu'aucun groupe n'ait estimé avoir terminé. La distinction entre condition nécessaire et condition suffisante a été au centre des débats.
La plupart des groupes ont vu la nécessité de s'intéresser à l'argument logique de Y. Notre question permettait donc ce travail même si l'affirmation de X était fausse. La véracité de la première phrase n'est même pas du tout mise en doute par la plupart des groupes, apparemment parce que leur questionnement ne se place pas là. La tâche a rempli son rôle dialectique entre mathématiques et logique.

Les trois cadres ont été mis en œuvre et confrontés dans cette tâche : cadre du raisonnement déductif, cadre logique et cadre ensembliste. En effet, le cadre ensembliste ou le cadre logique sont nécessaires pour étudier l'argument de Y et le cadre ensembliste semble plus efficace pour donner du sens à la réfutation de cet argument. Le cadre ensembliste est nécessaire aussi pour trouver l'ensemble des contre-exemples à C2 $\Rightarrow$ P3. D'ailleurs des témoins du cadre ensembliste apparaissent à l'aide de patates ou lors de la construction de contre-exemples.
Le cadre du raisonnement déductif est insuffisant pour résoudre la tâche et peut même être un obstacle à cette résolution. Plusieurs étudiants essaient de manipuler des implications ce qui ne leur donne, dans le meilleur des cas pas de conclusion, et dans le plus mauvais une conclusion fausse.
Ces résultats sont à replacer parmi d'autres puisque le problème présenté ici fait partie d'une ingénierie comprenant deux séances de trois heures en formation initiale des professeurs de mathématiques. Cette ingénierie mettait en jeu deux situations de géométrie et deux situations de pavages. En outre, cette ingénierie prend tout son sens quand on rappelle qu'elle a été précédée de pré-expérimentations auprès d'étudiants se destinant au professorat.
Cette situation, basée sur des propriétés de géométrie enseignées au collège, a permis aux professeurs un réel travail sur leurs connaissances mathématiques tant du point de vue du raisonnement que des connaissances géométriques. En effet, en plus de tout le travail effectué sur les implications mathématiques, les professeurs ont été amenés à se poser des questions sur la géométrie qu'ils doivent enseigner à leurs élèves : qu'est-ce qu'une diagonale (segment ou droite) ? un parallélogramme est-il un trapèze ? un quadrilatère non croisé est-il convexe ?
Nous conclurons par deux phrases de Robert, la première dite d'un air désabusé à la lecture de l'énoncé :

Robert : C'est de la géométrie de collège, ça !

la seconde dite à la fin de la séance :

Robert : Moi c'est un problème que je ne donnerais pas avant la licence[5].

BIBLIOGRAPHIE

Brousseau G., 1997, La théorie des situations didactiques. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Chevallard Y., 1985, La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné. La Pensée Sauvage, Grenoble.

Deloustal-Jorrand V., 2000, L'implication. Quelques aspects dans les manuels et points de vue d'élèves-professeurs. *Petit x n°55,* IREM de Grenoble, pp. 35-70.

Deloustal-Jorrand V., 2004, L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique. Étude sous trois points de vue : raisonnement déductif, logique formelle et théorie des ensembles. Construction d'une situation didactique qui problématise l'implication, *thèse*, Grenoble I.

[5] La licence correspondait, à cette époque en France, à la troisième année d'université.

Deloustal-Jorrand V., 2007, L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique, *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques Paris VII (à paraître)*.

Douady R., 1986, Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 7.2,* La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 5-31.

Durand-Guerrier V., 1996, Logique et raisonnement mathématique. Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication. Thèse, Université Lyon I.

Duval R., 1993, Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive ?. *Petit X, Vol.31,* IREM de Grenoble, pp. 37-61.

Grenier D., Payan C., 1998, Spécificités de la preuve et de la modélisation en mathématiques discrètes. *Recherches en didactique des mathématiques, vol 18/1,* La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 59-100.

Legrand M., 1983, Les cosmonautes. Compte rendu d'une recherche effectuée par le groupe "Apprentissage et raisonnements" de l'IREM de Grenoble. *Petit X, Vol.1,* IREM de Grenoble, pp. 57-73.

Rolland J., 1999, Pertinence des mathématiques discrètes pour l'apprentissage de la modélisation et de l'implication. *Thèse,* Université Joseph Fourier, Grenoble.

Vergnaud G., 1990, La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 10 n°2,3,* La Pensée Sauvage, Grenoble, pp. 133-170.