PLACE DU RAISONNEMENT MATHEMATIQUE DANS LES SCIENCES ECONOMIQUES

NAJOUA HAJ ALI
Université de Tunis, ESSEC (Tunisie)
Hajalinajoua@yahoo.fr

Résumé. Les sciences économiques utilisent des outils mathématiques issus presque de tous les domaines mathématiques (Haj ali, 2005). Parallèlement, les branches de l'économie sont très nombreuses et chacune englobe des théories. Artaud (1993) précise que ceux qui réussissent le mieux en économie sont ceux qui ont une culture mathématique en argumentant par l'examen de la liste des prix Nobel en Sciences économiques. Est-ce du à leur maîtrise d'outils ou du raisonnement mathématique ? La question est de savoir si la méthode économique utilise le raisonnement mathématique.

Mots-clés. Activité Mathématique, activité Economique, phase expérimentale, démonstration, raisonnement, preuve, recherche et enseignement.

Introduction

Notre première question était : quelles mathématiques enseigner dans une formation économique ? Dans un premier temps nous nous sommes centrée sur les outils mathématiques utilisés dans les enseignements de modules d'économie dans une formation économique. Nous avons montrée que beaucoup d'outils mathématiques sont utilisés et que certaines différences sont relevées dans leur enseignement en classe de mathématiques (Haj ali 2005).

Dans l'objectif de faire un état des lieux d'un enseignement des mathématiques dans une formation économique entre autres nous avons passé des questionnaires à des étudiants[1] et des enseignants d'économie[2] (Voir annexe) et les réponses à quelques questions nous ont interpellées sur un nouvel questionnement.

En regardant les réponses des étudiants aux questions :

« Les mathématiques sont utiles en économie :

- Car l'enseignant de mathématiques le dit : OUI ☐ NON ☐.
- Car l'enseignant d'économie le dit : OUI ☐ NON ☐.

Autre réponse : ……………………………………………….

Voyez-vous un lien entre les enseignements d'économie et de mathématiques

OUI ☐ NON ☐ (merci de développer) » (voir annexe)

Nous avons constaté, que plusieurs étudiants voient qu'il y a un lien entre les mathématiques et l'économie de par leur raisonnement, et la question est de savoir comment ?

Par ailleurs, voici ci-après les réponses des enseignants d'économie aux questions qui nous intéressent dans cet article :

---

[1] En 2002, nous avons interrogé 960 étudiants répartis dans les quatre années de la filière « économie financière et bancaire». La 1ère année consiste en une année de tronc commun de toutes les filières « économie et gestion », la 2ème année « économie » et les 3ème et 4ème années « économie financière et bancaire ».

[2] Nous avons questionné 29 enseignants d'économie de l'enseignement supérieur dans une institution qui débutent dans le domaine de la recherche.

	jamais	Rarement	Souvent	Très souvent	Toujours	Non réponse
Dans mes recherches, en mathématiques, j'utilise l'approche graphique	1 (3 %)	8 (28 %)	7 (24 %)	6 (21 %)	2 (7 %)	5 (17 %)
Dans mes recherches, en mathématiques, j'utilise l'approche analytique	0	1 (3 %)	10 (35 %)	8 (28 %)	5 (17 %)	5 (17 %)

	jamais	Rarement	Souvent	Très souvent	Toujours	Non réponse
Dans mes enseignements, en économie, j'utilise l'approche graphique	0	4 (14 %)	17 (59 %)	4 (14 %)	3 (10 %)	1 (3 %)
Dans mes enseignements, en économie, j'utilise l'approche analytique	0	3 (10 %)	9 (31 %)	8 (28 %)	6 (21 %)	3 (10 %)

Ces réponses nous permettent de constater que dans l'activité économique aussi bien au niveau de la recherche que de l'enseignement les approches graphiques et analytiques sont utilisées. La question est de savoir à quel moment et de quelle manière ?

Dans le cadre de cet article la question que nous abordons est : a priori, des mathématiques, ce n'est pas seulement des outils sont utilisés dans une activité économique aussi bien au niveau de la recherche que de l'enseignement mais aussi le raisonnement.

Cette question nous a amenée à investiguer sur les notions suivantes : qu'est ce qu'un raisonnement mathématique ? Où intervient il en mathématique ? Qu'est ce qu'une activité mathématique ? Est-ce qu'elle se présente de la même façon dans une recherche en mathématiques et dans un enseignement de mathématiques ? Dans le deuxième cas l'enseignant et l'apprenant ont il la même position vis-à-vis de cette activité ? Qu'est ce que la preuve dans la recherche en mathématiques ? Qu'est ce que la preuve dans l'enseignement des mathématiques ? Toutes ces notions se présentent-elles de la même manière en économie ? Sinon où se trouvent les similarités s'il y en et où se trouvent les différences s'il y en a ?

1. Le raisonnement dans l'activité mathématique

Le raisonnement dans l'activité mathématique a fait l'objet de beaucoup de recherches en psychologie, en mathématiques, en didactique des mathématiques… En 2005, le groupe de didactiticiens des mathématiques du Québec a participé à un colloque dont le thème est « Raisonnement mathématique et formation citoyenne ». Ce colloque comprend deux conférences et douze communications qui présentent différentes recherches sur le raisonnement en mathématiques. Dans la conférence de clôture Sierpinska a déclaré

> « Le thème de ce colloque « raisonnement mathématique et formation citoyenne » et les questions soulevées dans le document de discussion

suffirait à remplir un congrès de neuf jours pour quatre milles participants » (Op. cité, 2005, p. 197).

Si ceci montre quelque chose, c'est la richesse des questions de recherche autour du raisonnement qui sont traitées et qui restent encore des perspectives de travail. Dans ce qui suit nous n'allons pas exposer ces travaux mais interpeller seulement ceux qui sont en rapport avec notre problématique.

Dans l'activité mathématique le raisonnement est omniprésent aussi bien dans le processus de résolution que dans l'activité de contrôle (Saboya, 2005). Ces raisonnements sont multiformes. Différentes situations peuvent se présenter ; une situation qui nécessite une réflexion sur les relations entre les données, une situation nécessitant un raisonnement quantitatif, une situation nécessitant un raisonnement qualitatif, une situation nécessitant la prise en compte de plusieurs données en même temps, … Chaque situation fait appel à certains types de raisonnements. Ces raisonnements peuvent varier en fonction des matériaux dont on dispose ; un Environnement Papier Crayon (EPC) ou un Environnement Informatique d'Apprentissage Humain (EIAH) (Richard, 2005, p. 168). De même ils peuvent varier d'une personne à une autre en fonction de leurs statuts autrement dit, de ce qu'ils ont de disponible comme définitions, théorèmes, propriétés, types de raisonnements[3]… De ceci apparaît qu'il va y avoir une différence entre l'activité mathématique du mathématicien et celle de l'élève[4].

Par ailleurs, une autre différence apparaît ; dans l'activité du mathématicien, le résultat n'est pas certain ; c'est-à-dire lorsque le mathématicien fait de la recherche il ne sait pas où il va aboutir, en témoigne Perrin (1997) qui a en un premier temps montré que le schéma de Hilbert Hd,g des courbes de degré d et de genre g n'était « presque » jamais connexe. Mais, il s'est avéré que la preuve qu'il a communiquée était fausse. Après il a cherché à montrer que ce schéma est toujours connexe. On remarque que la deuxième conjecture est en contradiction avec la première.

Cependant, du côté de l'élève, le résultat est toujours connu du moins par l'enseignant et l'élève le sait. Une différence subsiste entre « montrer que … » et « est-ce que … » ; ces deux questions ne mobilisent pas le même type de raisonnements.

Néanmoins, les deux types d'activité obéissent au principe du tiers exclu c'est-à-dire qu'un énoncé mathématique est ou bien vrai ou bien faux il n y a pas de troisième alternative.

Par ailleurs, Perrin[5] distingue l'activité mathématique du chercheur de celle de l'enseignement. Il définit la première comme suit :

« Je voudrais insister, tout d'abord, sur le fait que la démonstration est loin d'être la seule activité du mathématicien. Elle est précédée par une phase que l'on peut qualifier d'expérimentale, faite de tâtonnements, de calculs, de considérations d'exemples, d'où vont émerger les conjectures permettant de comprendre la situation en formulant des énoncés. Ces conjectures, si elles sont sérieuses, sont le plus souvent assorties d'arguments en leurs faveurs qui vont devenir des ébauches de démonstration. La démonstration proprement dite ne viendra qu'après cette phase préliminaire que je

[3] Par exemple il se peut qu'une personne ne maîtrise pas assez le raisonnement par l'absurde alors elle ne va pas essayer de l'utiliser et elle va essayer d'autres raisonnements.

[4] Dans cet article, à chaque fois où on parle de l'élève on sous-entend l'élève ou l'étudiant.

[5] Daniel Perrin IUFM de Versailles et Université Paris-Sud Mathématicien (chercheur en mathématiques) et enseignant.

considère pour ma part comme la plus importante et, en tous cas, la plus intéressante. » (Op. cité, 1997, p. 5)

Ainsi, la démonstration n'est pas l'unique raisonnement qu'utilise le chercheur en mathématiques. Cette phase est précédée d'une première phase expérimentale que l'auteur considère comme étant la plus importante dans l'activité mathématique. La phase expérimentale consiste à faire des tâtonnements, faire des calculs, considérer quelques exemples et enfin faire une conjecture en se basant sur quelques arguments (ces arguments peuvent être visuels, intuitifs[6], …).

Ainsi, pour comprendre en quoi consiste l'activité du mathématicien on est confronté à voir du point de vue du mathématicien qu'est ce qu'une démonstration valide et quels raisonnements, mobilise un mathématicien dans la phase expérimentale.

Par ailleurs, l'auteur définit l'activité mathématique dans l'enseignement par opposition à celle du chercheur au niveau de la deuxième phase en exprimant que :

> « Le point fondamental qui me semble faire la distinction avec la situation de la recherche c'est que dans l'enseignement la nécessité d'une rigueur « absolue », et parlant d'une formalisation totale, est moins impérative que dans la recherche, dans la mesure où on est, en général assuré de la validité des résultats qu'on enseigne : ils ont été prouvés (rigoureusement) par les mathématiciens (souvent depuis longtemps). » (Ibid., 1997, p. 7)

Duval pointe une autre différence au niveau de la première phase ; la phase de recherche qu'il exprime ainsi :

> « Dans l'organisation d'une activité de résolution de problème en classe, il est classique de bien séparer deux phases : l'une, individuelle ou en groupe, de recherche suivie d'une mise en commun où l'on confronte ce qui a été trouvé ; l'autre de « rédaction », destinée à fixer pour la suite ce qui doit être retenu, en lui donnant généralement une forme mathématiquement plus reconnaissable. Et naturellement, tout le travail de compréhension mathématique est associé à la première phase, tandis que le raisonnement déductif ne serait qu'une mise en forme rédactionnelle. […] Autrement dit, ce sont les déductions qui permettent de joindre l'hypothèse à la conclusion, et on a toutes les déductions quand on a toutes les définitions ou théorèmes correspondants. Tout cela concerne la phase de recherche qui en classe, peut s'achever par une mise commun. La démonstration serait donc obtenue et il n y aurait plus qu'à rédiger ». (Op., cité. 2005, p.22)

Ainsi, dans les activités mathématiques du chercheur et dans l'enseignement on observe des phases expérimentales (ou de recherche) différentes et une phase de démonstration dont la rigueur est exigée dans le premier genre d'activités et l'est moins dans le deuxième genre.

Maintenant regardons quels raisonnements sont susceptibles d'être mobilisés dans la phase expérimentale de l'activité mathématique du mathématicien et de celle de l'élève et quels raisonnements déterminent une démonstration de même une démonstration rigoureuse. La phase expérimentale de l'activité mathématique du chercheur comporte une étape de preuve pragmatique.

[6] Par exemple, pour conjecturer que 1-1+1-1…à l'infini est égale à $\frac{1}{2}$, Grandi a utilisé les égalités $\frac{1}{1-x} = 1+x+xx+x^3+x^4+\ldots$, à l'infini et $\frac{1}{1+x} = 1-x+xx-x^3+x^4-x^5\ldots$, à l'infini et, il a utilisé un argument visuel et un autre intuitif pour expliquer sa conjecture pour x = 1 (pour plus de détails voir (Hitt, 2005, pp. 141-142))

Cependant on distingue différents types de ces preuves : l'empirisme naïf, l'expérience cruciale, et l'exemple générique (Balacheff, 1999, pp. 205-208)

Parallèlement, dans la phase expérimentale de l'activité mathématique dans l'enseignement les élèves vont essayer de joindre bout à bout des déductions ainsi cette phase comportera des déductions locales. La différence de cette phase avec celle du chercheur est due à la certitude du résultat à prouver dans l'enseignement et à son incertitude dans la recherche.

Par ailleurs, la démonstration est une preuve pour la communauté mathématique. Balacheff la définit comme suit :

> « Une démonstration est une suite d'énoncés telle que tout énoncé est soit une hypothèse soit un énoncé dont la validité est par ailleurs déjà établie (théorème) ou admis (axiome), soit est déduit d'énoncés qui le précèdent selon une règle explicite et convenue » (Op. cité, 1999, p. 199)

Duval (1993) schématise un pas de déduction dans une démonstration par : prémisse(s) $\rightarrow$ conclusion et ce qui nous permet de passer de(s) prémisse(s) à la conclusion c'est un énoncé tiers. Dans un pas de déduction la (les) prémisse(s) représentent un énoncé qui peut être une hypothèse, un théorème, un axiome ou une déduction des énoncés qui précèdent selon une règle explicite et convenue par la communauté scientifique. Cette règle est appelée règle de détachement ou encore règle du *modus ponens,* l'énoncé tiers représente un postulat et la conclusion est obtenue par substitution de la partie conséquence de l'énoncé tiers. Ainsi dans un pas de déduction la justification porte sur le statut des prémisses et de l'énoncé tiers.

Par ailleurs, plusieurs raisonnements peuvent être mobilisés dans la phase de démonstration dont on énumère le raisonnement direct, le raisonnement par l'absurde, le raisonnement par la contraposition, le raisonnement par récurrence, le raisonnement par disjonction des cas, le raisonnement proportionnel… Précisons que très souvent c'est la nature de l'affirmation qui guide vers le raisonnement adéquat.

Par ailleurs, Perrin montre que la rigueur en mathématiques est indispensable, il présente un exemple historique « le problème de Chasles »[7] et montre que sans cette rigueur on peut aboutir à n'importe quoi. Au fait le manque de rigueur provient de l'utilisation du principe de la conservation du nombre[8] qui est non fondé. Or, l'auteur précise qu'on peut rendre rigoureux un principe en mettant en place un formalisme adapté et il souligne que :

> « En réalité, dans le cas de Bézout, mettre en place le formalisme n'est pas plus facile que de prouver directement le théorème, mais l'avantage de cet effort est de donner lieu à de multiples généralisations et de permettre de traiter ensemble toute une vaste classe de problèmes » (0p. Cité, 1997, p. 4)

L'auteur rajoute que malgré qu'aujourd'hui les formalismes soient assez bien établis définir ce qu'est qu'une démonstration rigoureuse reste non aisée. Il justifie sa position en citant une expérience personnelle :

> «… nous avions cru prouver qu'un certain objet (le schéma de Hilbert Hd,g des courbes de degré 2 et genre g) n'était « presque » jamais connexe. La démonstration était écrite, soumise à une revue prestigieuse, contrôlée par un rapporteur, acceptée sans problème ! Pourtant, en faisant des calculs (assez compliqués) sur un exemple précis nous avons trouvé un contre-

[7] Dans le plan combien de coniques sont tangentes à 5 coniques données ?

[8] Si, dans une situation particulière, on trouve un nombre fini de solutions (non multiples) alors ce nombre vaut aussi dans le cas général.

exemple. Il nous a fallu quelques jours pour admettre notre erreur et quelque temps pour comprendre où était la faute dans la démonstration[9] » (Ibid., 1997, p. 5)

L'auteur propose deux éléments qui nous permettent d'être sûrs qu'un résultat est correct :

« à force de voir fonctionner ce résultat dans des dizaines d'exemples différents, de situations distinctes, on finit par être vraiment, intimement, convaincu de son exactitude[…] un résultat est définitivement établi lorsque l'on a suffisamment progressé (soi-même ou la communauté) pour qu'il devienne « trivial », c'est-à-dire soit revu, en général par d'autres voies, plus simples ou plus conceptuelles, de manière totalement convaincante » (Ibid., 1997, p.. 5-6)

En essayant de faire une classification de Rigueur et formaliste l'auteur déduit de ce qu'il connaît de l'histoire que :

« …dans la plupart des cas, la motivation de l'introduction d'un formalisme nouveau n'a pas été le souci d'une plus grande rigueur mais bien plutôt la nécessité de cet outil nouveau pour traiter des problèmes plus difficiles ou comprendre des situations plus complexes, et la rigueur est venue, en quelque sorte, en prime.» (Ibid., 1997, p.. 6-7)

Il rajoute que :

« a) la rigueur n'est pas gratuite : son objectif est d'être sûr des résultats ;

b) la rigueur absolue (?) n'est possible qu'en présence d'un formalisme suffisant ;

c) l'introduction d'un formalisme est, en général, justifiée par des progrès à accomplir plutôt que par le souci de rigueur. » (Ibid., 1997, p. 7)

A ce propos, Hitt (2005) a montré à travers un exemple historique[10] qu'un processus de preuve s'améliore dans la construction des mathématiques et ne devient une démonstration que lorsque la mathématique est achevée.

En conclusion, de cette étude il ressort que, dans l'activité du mathématicien, pour l'établissement d'une conjecture une étape expérimentale est nécessaire. Dans cette étape différentes argumentations peuvent être produites et preuves pragmatiques peuvent être élaborées. Pour la justification de la conjecture une démonstration rigoureuse absolue est exigée et cette rigueur absolue ne sera possible qu'en la présence d'un formalisme adéquat. En ce qui concerne l'activité mathématique de l'élève très souvent on est obligé de sacrifier cette rigueur absolue dans la phase démonstration pour des raisons tels que, le manque de connaissances de certaines théories, de la part de l'élève, pour la preuve à un certain niveau d'enseignement. Ainsi, en rapport avec notre problématique, une voie que nous pouvons explorer est voir jusqu'où la rigueur est présente dans l'activité de l'économiste (chercheur) autrement dit les économistes utilisent ils des formalismes mathématiques dans leur activité économique ?

Si on veut faire une investigation au niveau des raisonnements mathématiques utilisés dans l'activité économique, on constate que c'est un travail de longue halène si on considère la quantité des recherches menés sur les raisonnements mathématiques en mathématiques. Ces dernières ont étés menée

[9] Je signale que, passant d'un extrême à l'autre, nous cherchons maintenant à montrer que le schéma de Hilbert est toujours connexe.

[10] La recherche de la somme infinie 1-1+1-1+1…

par des spécialistes de différents domaines ; psychologues, mathématiciens, didacticiens des mathématiques, … depuis des années et d'autres restent en cours d'après les perspectives de ces travaux.

En économie, à ma connaissance du moins en didactique des mathématiques, il n y a pas de travaux similaires. Par suite, ce que nous allons essayer de faire, c'est explorer le terrain et repérer des indices qui peuvent nous aider à mieux forger notre problématique.

Dans ce qui suit, nous nous limitons à l'analyse de quelques articles et ouvrages d'économie.

2. Des raisonnements mathématiques dans l'activité économique

Dans cette partie nous voudrions mieux comprendre l'activité économique du point de vue de ses liens éventuels avec l'activité mathématique.

L'économie se fixe comme objectif de résoudre les problèmes de la société. Les besoins de la société changent, parallèlement, les problèmes changent et de nouvelles méthodes se créent qui permettent de résoudre les nouveaux problèmes. Allais définit l'économie comme suit :

> « L'acticité économique a essentiellement pour objet de satisfaire les besoins pratiquement illimités des hommes avec les ressources limitées dont ils disposent en travail, en richesses naturelles et en équipements, compte tenu des connaissances techniques limitées qui sont les leurs. La science économique apparaît ainsi comme la science de l'efficacité, et par là même elle est quantitative » (Allais, 1968, p. 5)

Ainsi l'économiste est sans cesse confronté à de nouveaux problèmes. Parallèlement, les autres sciences évoluent et fournissent aux économistes de nouveaux outils, tels que les mathématiques et les statistiques, qui leur permettent de répondre au moins partiellement à leurs questions. Cet état de fait entraîne une évolution continuelle des théories économiques et leur diversification. Ainsi les branches de l'économie sont très nombreuses, on peut citer : la micro-économie, la macro-économie, la croissance économique, l'économétrie, la comptabilité nationale, … chacune de ces branches englobe une diversité de théories. Dans cette diversité, l'usage des mathématiques est lui aussi très varié.

A la fin du moyen âge, la pensée économique contemporaine se détache de la morale et de la philosophie. L'interrogation des premiers économistes était « Comment enrichir le prince sans appauvrir les sujets ? ». Petit à petit se constitue une science qui jusqu'à nos jours n'est pas unifiée.

Quatre grands courants de la pensée économique se sont constitués et coexistent. Ces courants se différencient de par leur grille d'analyse de l'économie et de leurs différents points de vue et objectifs dans leur description de l'économie (Albertini, 1988). Une méthode particulière est née, en mathématiques avec Euclide ; l'axiomatique. Cette méthode a été utilisée par des mathématiciens, des logiciens et des philosophes jusqu'à la fin du XIXème siècle. A cette axiomatique, dite « Axiomatique des Anciens » succéda, en 1900, une deuxième axiomatique dite « Axiomatique des Modernes » à travers les travaux de Hilbert en géométrie et ceux de Peano en arithmétique. La méthode a diffusé dans d'autres disciplines telles que les sciences économiques. La question qui nous intéresse est de savoir quelles sont les principales axiomatisations disponibles en économie. Mongin affirme que :

> « Celles [Les axiomatisations] des économistes répondent au « genre ensembliste » représenté ailleurs par Bourbaki tout en présentant une forte

spécificité. La sémantique y est peu formalisée et souvent fixée une fois pour toutes ; les systèmes formels sont « théorématiques » plutôt que « définitionnels », suivant une distinction nouvelle introduite par ce travail ». (Op. cité, 2003, p. 99)

Par ailleurs, Mongin a recensé trois grandes classes de développements axiomatiques que voici :

(1) En théorie de la décision, une axiomatisation consiste le plus souvent à se donner un ensemble non vide X, ensemble des choix possibles (ou « alternatives »), et une relation binaire ≥ sur X (appelée relation de préférence) qui satisfait différentes conditions. L'axiomatique la plus représentative est celle de l' « utilité de von Neumann-Mongestern », qui, historiquement parlant, remonte à Theory of Games and Economic Behavior (1944). Elle prend pour X l'ensemble des mesures de probabilités définies sur un ensemble mesurable donné, tandis que les conditions imposées à la relation ≥ s'énoncent habituellement ainsi : préordre, continuité, indépendance. L'axiomatique de Savage (1954) est nettement plus complexe, mais elle se rattache au même schéma. […]

(2) En théorie du choix social, on se donne un ensemble non-vide X, appelé ensemble des situations sociales ; des relations binaires (dites de préférence) ou des fonctions numériques (dites d'utilité) sur X, au nombre de n (« le nombre d'individus ») ; enfin, une fonction F (dite de choix social) reliant ces n objets à une autre relation sur X (la « préférence collective »). Les axiomes se présentent comme des conditions posées sur F, et en particulier sur son domaine et sur son espace d'arrivée. Arrow a fixé ce schéma dans Social Choice and Individual Values en 1951. Et il en existe aujourd'hui d'innombrables variantes.[…]

(3) En théorie axiomatique de l'équilibre général, toutes les notions sont définies par rapport à X = Rl (l s'appelle ici « le nombre des marchandises »). On se donne une suite Xi, i = 1,…,m de parties non vides de Rl (les « ensembles de choix des m consommateurs ») ; une suite correspondante de relations de préordre (« de préférence ») ≥ i définies sur les Xi ; une autre suite Yj, j = 1,…n de parties non vides de Rl (les « ensembles de production des n producteurs ») ; un point de Rl (les « ressources initiales »). Ces données définissent une économie abstraite.» (Ibid., pp. 122-123)

Actuellement, les différents domaines de l'économie ne sont pas tous totalement théorisés. L'axiomatisation en économie est ensembliste. Elle consiste en la transformation d'hypothèses (propositions premières), qui ne sont pas nécessairement vraies, en des conclusions (propositions dérivées) par déduction. La réalisation de cette axiomatisation nécessite le choix d'une symbolisation et d'une formalisation. Cette dernière détermine explicitement les propositions premières dont elle limite le nombre (le minimum possible) et délimite au moins implicitement les opérations qu'elle permet sur les signes (Mongin, 2003).

Par ailleurs, dans l'introduction du livre d'économie : la théorie économique néoclassique. 1. Microéconomie, Gueeren (1999) l'auteur souligne que :

« Sur la place et le rôle des mathématiques, - dans leur grande majorité, les théoriciens néoclassiques les plus réputés ont une formation mathématique relativement poussée – directe, ou en tant qu'ingénieurs. Tous font appel aux mathématiques mais deux attitudes se dégagent, aux nuances près, devant la grande complexité de la modélisation des décisions individuelles et de leurs interactions. D'une part, il y a ceux qui pensent que, devant cette complexité, on ne peut s'en tenir aux seuls développements mathématiques, et qu'il faut donc accepter de procéder par des approximations, fondées sur l'intuition et sur le bon sens ; on peut ranger dans cette catégorie Augustin Cournot (1801 – 1877) et Alfred Marschall (1842 – 1924), qui adoptent une approche dite « d'équilibre partiel ». D'autre part, il y a les partisans de l' « équilibre général », qui mettent en avant la « rigueur » ; pour eux toutes les propositions économiques doivent être démontrées à partir d'un ensemble d'hypothèses formulées explicitement, en supposant des comportements maximisateurs individuels… » (Op. cité, pp. 6-7) (C'est nous qui soulignons).

Cet extrait montre que certains économistes exigent la rigueur dans la démonstration de propositions économiques et d'autres la sacrifie en faveur de l'intuition et du bon sens. De ceci on émet l'hypothèse que dans l'activité économique on peut trouver différents types de preuves, des preuves argumentatives et des preuves démonstratives.

Pareillement, nous avons remarqué que les économistes ont aussi des théorèmes, par exemple, le théorème de Sonnenschein (Ibid., pp.69), théorèmes de l'économie du bien être (Ibid., p.74), le théorème de Coase (Ibid., p.83),... ces théorèmes ont-ils le même statut que ceux en mathématiques ? Se construisent-ils de la même manière ? Par quelle preuves sont ils justifiés?

L'hypothèse en économie « toutes choses égales par ailleurs » est très souvent supposée. Cette hypothèse permet d'éviter une fonction de plusieurs variables (les prix des biens divers) qui rend impossible toute étude graphique. En l'adoptant l'étude graphique devient possible et c'est l'approche par l'équilibre partiel et non général, or cette dernière est la seule valable car rigoureuse et pourtant c'est la première qui est utilisée dans l'enseignement. Ceci suppose une grande différence entre les raisonnements mathématiques qui doivent être disponibles chez l'économiste chercheur et l'économiste étudiant.

Nous avons, par ailleurs, relevé un exemple de comment se construit un théorème en économie que voici :

« Le théorème de Sonnenschein

Au début des années soixante-dix, les théoriciens qui avaient cherché à déduire des hypothèses de Arrow-Debreu des propriétés concernant la forme des fonctions de demande nette (différence entre demande et offre) sont parvenus à la conclusion que de telles propriétés n'existent pas. Ils ont alors changé de perspective, en cherchant à montrer que ces demandes nettes peuvent avoir une forme quelconque, et qu'il est donc vain de vouloir prouver quoi que ce soit à partir de cette forme (par exemple, qu'elles sont croissantes ou décroissantes). Comme Hugo Sonnenschein, Rolf Mantel, et Gérard Debreu ont été les premiers à établir ce résultat (entre 1972 et 1974), on parle à ce propos de théorème de Sonnenschein-Mantel-Debreu- ou tout simplement de théorème de Sonnenschein. Celui-ci s'énonce à quelques nuances près, de la façon suivante :

« Les demandes nettes globales du modèle de Arrow-Debreu peuvent avoir une forme quelconque. Elles sont cependant, liées à une relation, la « loi de Walras », et elles sont homogènes de degré 0. » (Ibid., pp.68-69).

N'est-ce pas comme en mathématique ? Ce théorème nous rappelle la conjecture posée par Perrin (1997, p. 5) qui s'est avérée fausse et passant d'un extrême à l'autre il cherche maintenant à montrer le contraire.

Par ailleurs, nous avons constaté que le raisonnement direct n'est pas l'unique raisonnement utilisé dans l'activité économique ; le raisonnement par l'absurde est aussi utilisé. Voici un extrait de ce livre qui le montre :

« Démonstration du premier théorème de l'économie du bien-être

Soit l'affectation des ressources d'un équilibre (quelconque) de concurrence parfaite :

$[Qe_1, \ldots Qe_n]$

à laquelle est associé le vecteur de prix Pe. La démonstration du théorème se fait par l'absurde : on suppose qu'il existe une autre affectation des ressources, $[Q_1, \ldots Q_n]$ strictement préférée à $[Qe_1, \ldots Qe_n]$ selon le critère de Pareto, et on montre alors qu'on arrive à une contradiction ; il s'ensuit que $[Qe_1, \ldots Qe_n]$ est un optimum de Pareto (il n'existe pas d'affectation des ressources qui lui soit préférée selon le critère de Pareto).

Comme on suppose que $[Q_1, \ldots Q_n]$ est strictement préférée à $[Qe_1, \ldots Qe_n]$ selon le critère de Pareto alors le ménage i préfère le panier Q_i, au panier Qe_i $i = 1, \ldots, n$, la préférence étant stricte pour au moins l'un d'entre eux - disons pour le ménage 1. Aux prix Pe, le ménage 1 ne peut acheter le panier Q_1, car sinon il le ferait puisqu'il est strictement préféré à Qe_1 ; Q_1 est donc forcément plus cher que Qe_1 aux prix Pe, soit :

$PeQ1 > PeQe_1$,

Comme Q_i, est préféré à Qe_i on a pour les mêmes raisons

$PeQ_i \geq PeQe_i$ $i = 1, \ldots, n$

La seule hypothèse qui intervient ici est – outre rationalité – celle de la monotonie des préférences. Si on additionne ces inégalités membre à membre, on obtient l'inégalité :

(v.1) $Pe\sum O_i > Pe\sum Qe_i$

Or, comme $[Qe_1, \ldots Qe_n]$ et $[Q_1, \ldots Q_n]$ sont deux états réalisables de la même économie, dont les ressources sont données par le même vecteur Q, on a $\sum O_i = \sum Qe_i = Q$. Par conséquent, il découle de (v.1) que :

$PeQ > PeQ$

Ce qui est absurde. Le théorème est donc établi.

Cette démonstration suppose seulement (outre que l'équilibre existe évidemment) qu'il y a un système complet de marchés (tous les biens, présents et futurs, de l'économie ont un prix affiché à l'équilibre) et qu'il y a monotonie des préférences » (Ibid., P. 77). (C'est nous qui soulignons).

Aussi, nous avons relevé un autre type de raisonnement dit procédé à l'envers. Le théorème de Sonnenschein [11] a été démontré en l'utilisant :

« Pour démontrer le théorème de Sonnenschein, on procède à l'envers. On se donne des fonctions de demande nette quelconques – plus précisément qui ne sont qu'homogènes de degré 0, tout en étant liées par la loi de Walras – et on montre qu'il existe des agents en concurrence parfaite vérifiant les conditions de Arrow-Debreu dont le choix engendrent ces demandes nettes. » (Guerrien, 1999, p. 69)

L'analyse que nous avons réalisée montre clairement que des raisonnements mathématiques sont utilisés en économie. En particulier, le cadre ensembliste est présent en économie. Deloustal-Jorrand a montré que :

« Le cadre ensembliste paraît le plus approprié à la partie découverte et recherche de la preuve. En permettant de naviguer d'un ensemble à l'autre il permet de rendre la conjecture de départ plus forte ou au contraire plus

[11] Enoncé p. 8

faible. Il amène à tester différents objets pour définir l'ensemble adéquat. Il facilite parfois la preuve quant prendre un ensemble de départ A plus grand, au sens de l'inclusion, permet d'utiliser des propriétés plus fortes » (Deloustal, 2004, p 55).

Ceci nous permet d'émettre l'hypothèse que la construction du cadre ensembliste dans la théorie économique favorise la rigueur des preuves.

Conclusion

Au début, le travail que nous avons mené consistait à explorer un domaine de l'enseignement des mathématiques dans une formation économique de l'enseignement supérieur. L'analyse d'un questionnaire que nous avons menée auprès des enseignants d'économie de cette formation et d'un autre mené auprès des étudiants nous a laissée supposer que l'économie utilise des raisonnements mathématiques. L'examen de certains articles et livres d'économie a montré que des raisonnements mathématiques sont fortement utilisées dans la construction de certains domaines de l'économie et dans l'enseignement de l'économie. Nous avons relevé aussi qu'il y a un rabattement sur le raisonnement graphique pour des fins pédagogiques. Ça serait intéressant d'étudier la fréquence de ce rabattement dans la formation des économistes et son impact…

Cette étude nous a permis d'émettre l'hypothèse que des étudiants en formation économique doivent avoir différents raisonnements mathématiques disponibles (au sens de Robert, 1998) mais la question est de savoir lesquels ? Une manière de le savoir pourrait consister à analyser tous les domaines de l'économie du point de vue de la fréquence de l'utilisation de chaque raisonnement mathématique. Il serait par ailleurs, intéressant d'analyser des processus de communication et preuve entre les économistes du passé au moment où ils discutent de la construction d'un concept économique, comparer ces processus avec ceux des mathématiciens du passé et des étudiants actuels en classe d'économie. Par ailleurs, actuellement, on enseigne « une mathématique achevée », du coté de l'économie est ce qu'on peut parler d'une économie achevée ? … Après, Est-ce qu'on enseigne une économie achevée ou une économie en cours de construction ?...

Références

ALBERTINI,J.M. & SILEM, A. (1988), *Comprendre les théories économiques. Clés de lecture*, Tome 1, éditions du Seuil.

ALLAIS, M. (1968), L'économique en tant que science, In *revue d'économie politique*, n°1, 78e année.

ARTAUD, M. (1993), *La mathématisation en économie comme problème didactique - Une étude exploratoire*, Thèse pour l'obtention du grade de docteur de l'Université d'Aix-Marseille II, IREM d'Aix-Marseille, Marseille.

BALACHEFF, N. (1999), Apprendre la preuve. In Sallantin J. Szczeciniarz J. J. (eds.) *Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle*. (pp. 197-236). Paris : PUF.

DELOUSTAL-JORRAND, V. (2004), *L'implication mathématique : étude épistémologique et didactique. Etude sous trois points de vue/ raisonnement déductif, logique formelle et théorie des ensembles. Construction d'une situation didactique qui problématise l'implication*, thèse de doctorat, Université Joseph Fourier, Grenoble I.

DUVAL, R. & EGRET, M-A. (1993), Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif. In *Repères*, n : ° 12, 114-140.

DUVAL, R. (2005), Compréhension des mathématiques, développement de la rationalité et formation de la conscience individuelle. In D. Tanguay (éd.) *Actes du colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec*, GDM 2005 (pp. 7-38). Université du Québec à Montréal.

GUERRIEN, B. (1999), La théorie économique néoclassique. 1. Microéconomie in *Repères*, n° 275, paris, Editions la Découverte. France.

HAJ ALI, N. (2005), *Quelles mathématiques enseigner dans une école supérieure d'économie ? Une étude de cas en Tunisie*. Thèse pour l'obtention du grade de docteur de l'Université Claude Bernard Lyon I et de l'Université de Tunis.

HITT, F. (2005). L'argumentation, la preuve et la démonstration dans la construction des mathématiques : des entités conflictuelles ? Une lettre de Godefroy Guillaume Leibnitz à Chrétien, Wolf. (1713). In D. Tanguay (éd.) *Actes du colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec*, GDM 2005 (pp. 135-146). Université du Québec à Montréal.

MONGIN, P. (2003), L'axiomatisation et les théories économiques, *Revue économique*, 54(1), Janvier 2003, 99-138.

MONGIN, P. (2004), L'axiomatisation et les théories économiques, réponses aux critiques, *Revue économique*, 55(1), Janvier 2004, 147-152.

PERRIN, D. (1997). Rigueur et formalisme(s). Table ronde Formalisme et rigueur, *Actes de la IXe Ecole d'été de Didactique des Mathématiques*.

http://www.lettredelapreuve.it/TextesDivers/TableRondeEEDM97/Perrin97TableRonde.html.

RICHARD, P. R. (2005). Intégration des figures dynamiques dans l'expression écrite du raisonnement mathématique. In D. Tanguay (éd.) *Actes du colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec*, GDM 2005, (pp. 167-181). Université du Québec à Montréal.

ROBERT, A. (1998). Outil d'analyse des contenus mathématiques enseignés au lycée et à l'université) État de l'art de la recherche en didactique des mathématiques à propos de l'enseignement de l'algèbre linéaire, *Recherches en didactique des mathématiques*, 18(2), La Pensée Sauvage : Grenoble. 191- 230.

SABOYA, M. (2005). Le contrôle exercé sur l'activité mathématique : que recouvre-t-il ? Quelle place lui donne le programme ? In Actes du colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec, GDM 2205, pp. 101-113. D. Tanguay, éd. Université du Québec à Montréal.

SIERPINSKA, A. (2005). « Papa veut que je raisonne… », Quelques réflexions sur la valeur du raisonnement mathématique dans la formation de futurs citoyens et professionnels. In D. Tanguay (éd.) *Actes du colloque du Groupe des didacticiens des mathématiques du Québec*, GDM 2005 (pp. 197-216). Université du Québec à Montréal.

Annexe

QUESTIONNAIRE

Bonjour! Ce questionnaire est destiné aux étudiants de l'institution I. Il est destiné à servir pour une recherche dans le cadre d'une thèse en didactique des mathématiques.

Nous vous remercions du temps que vous allez y consacrer.

Merci de le rendre à celle ou celui qui vous l'a donné

Classe :
Groupe :
Complétez par l'année de l'obtention du Bac, la spécialité et l'établissement :
Bac :……..………………………………………………………………………….……
Moyenne générale au Bac :
Moyenne en mathématiques au Bac :
Moyenne en économie au Bac :
Redoublant au Bac : OUI ☐ NON ☐

- Comprenez-vous les mathématiques ?

  PAS DU TOUT – PEU – ASSEZ – BIEN – PARFAITEMENT
- Travaillez-vous les mathématiques ?

  PAS DU TOUT – PEU – ASSEZ – BIEN – PARFAITEMENT
- Je travaille les mathématiques car pour réussir il faut avoir une bonne moyenne en mathématiques

  OUI ☐ NON ☐
- Je travaille les mathématiques car le coefficient des mathématiques est fort

  OUI ☐ NON ☐
- Je travaille les mathématiques car elles me sont nécessaires pour comprendre l'économie

  OUI ☐ NON ☐
- Je travaille les mathématiques car si je les néglige, je ne pourrai plus me rattraper

  OUI ☐ NON ☐
- Je suis faible en mathématiques donc je dois travailler l'économie pour réussir

  OUI ☐ NON ☐
- En faisant des mathématiques je rencontre :
  1. Beaucoup de difficultés ☐
  2. Assez de difficultés ☐
  3. Peu de difficultés ☐
  4. Très peu de difficultés ☐
  5. Aucune difficulté. ☐
- En faisant de l'économie je rencontre :

1. Beaucoup de difficultés ☐
2. Assez de difficultés ☐
3. Peu de difficultés ☐
4. Très peu de difficultés ☐
5. Aucune difficulté. ☐

- Les mathématiques sont utiles en économie :
  - Car l'enseignant de mathématiques le dit : OUI ☐ NON ☐
  - Car l'enseignant d'économie le dit : OUI ☐ NON ☐

Autre réponse : ………………………………………………………………………
Voyez-vous un lien entre les enseignements d'économie et de mathématiques ?
OUI ☐ NON ☐

(merci de développer) ………………………………………………………………………………………

En mathématiques traitez-vous des exemples économiques ?
En cours : OUI ☐ NON ☐

En TD : OUI ☐ NON ☐

Merci de donner des exemples : …………………………………………………………………
Lorsque vous rencontrez un concept mathématique en économie :
– L'enseignant vous dit d'aller voir l'enseignant de mathématiques : OUI ☐ NON ☐
– L'enseignant vous explique : OUI ☐ NON ☐

Merci de donner des exemples : …………………………………………………………

QUESTIONNAIRE

Bonjour!
Ce questionnaire est destiné aux enseignants d'économie de l'institution I. Il est destiné à servir pour une recherche dans le cadre d'une thèse en didactique des mathématiques

Nous vous remercions du temps que vous allez y consacrer.
Merci de le rendre à celle ou celui qui vous l'a donné

Age (si ce n'est pas trop indiscret) :
Complétez par l'année de l'obtention du diplôme, la spécialité et l'établissement :
Bac : ………………………………………………………………………………………..
Maîtrise : ……………………………………………………………………………….
DEA : ………………………………………………………………………………….
Doctorat : ……………………………………………………………………………...
Situation professionnelle actuelle :

Permanent	☐	Contractuel	☐	Vacataire	☐	Détaché	☐

Grade : ………………………………………………………………………………..

- En quelle année avez-vous enseigné pour la première fois un module d'économie ?
  Introduction à l'économie ☐ Micro-économie I ☐ Macro-économie I ☐
  Micro-économie II ☐ Economie monétaire ☐
  Econométrie ☐

Autres branches des sciences économiques : ……………………………………………………..

- Combien d'années avez-vous enseigné dans chacun des ces modules ?
  - Introduction à l'économie : ………………
  - Micro-économie I : ………………………
  - Macro-économie I : ………………………
  - Micro-économie II : ………………………
  - Economie monétaire : …………………….
  - Econométrie : …………………………..

Autres : ………………………………………………………………

- Est-ce un choix ou quelque chose qui vous a été imposé ? (vous pouvez développer): …………………………………………..……
- En quelle année avez-vous enseigné pour la première fois un module de mathématiques ?
  Math 1 ☐ Math II ☐ Math III ☐

- Combien d'années avez-vous enseigné ces modules ?
  Math I : ………………………….
  Math II : …………………………
  Math III : ………………………..
- Est-ce un choix ou quelque chose qui vous a été imposé ? (vous pouvez développer):

…………………………..………………………………………………………………………
- En quelle année avez-vous enseigné pour la première fois un module de statistiques ?
  Stat I ☐ Stat II ☐
- Combien d'années avez-vous enseigné ces modules ?
  Stat I : ………………………….
  Stat II : …………………………
- Est-ce un choix ou quelque chose qui vous a été imposé? (vous pouvez développer) :

…………………………..………………………………………………………………………….
- Vous a-t-il été nécessaire de vous documenter en mathématiques ?
  JAMAIS – RAREMENT – SOUVENT – TRES SOUVENT – TOUJOURS

(merci de développer) ……………………………………………………

- Connaissez-vous le programme de mathématiques de la classe dans laquelle vous enseignez des sciences économiques ?
  PAS DU TOUT – PEU – ASSEZ – BIEN – EN DETAIL
- Par rapport à ce programme, pouvez-vous citer les points qui vous semblent avoir le plus d'interaction avec votre cours d'économie ? (merci de développer)
  ……………………………………………………………………………….…………………………
- Connaissez-vous le contenu des cours des mathématiques de la classe dans laquelle vous enseignez des sciences économiques ?
  PAS DU TOUT – PEU – ASSEZ – BIEN – EN DETAIL

- Rencontrez-vous vos collègues de mathématiques ?

  JAMAIS – RAREMENT – SOUVENT – TRES SOUVENT – TOUJOURS

  Dans vos rencontres éventuelles :

- Vous parlez de vos étudiants : OUI ☐ NON ☐

- Vous parlez des programmes de mathématiques de votre classe : OUI ☐ NON ☐

- Vous parlez des programmes d'économie de votre classe : OUI ☐ NON ☐

- Vous parlez des liens entre mathématiques et économie en général : OUI ☐ NON ☐

  - Autre (préciser) :

(vous pouvez développer par exemple pour préciser le type de discussion que vous avez, ou pour dire pourquoi vous ne rencontrez pas souvent votre collègue, ou pour faire part des difficultés que vous avez à communiquer avec lui)

……………………………………………………………………………………………………

- Avez-vous un diplôme en mathématiques ? OUI ☐ NON ☐
- Après le bac j'ai suivi une formation en mathématiques : OUI ☐ NON ☐

Si oui :

Elémentaire ☐ Moyenne ☐ Poussée ☐

- Voulez-vous enseigner Math I ? (merci de développer)

……………………………………………………………………………………………………

- Voulez-vous enseigner Math II ? (merci de développer)

……………………………………………………………………………………………………

- Voulez-vous enseigner Math III ? (merci de développer)

……………………………………………………………………………………………………

- Voulez-vous enseigner Stat I ou Stat II ? (merci de développer)

……………………………………………………………………………………………………

- Faites-vous des mathématiques ? OUI ☐ NON ☐
- En mathématique je préfère l'approche graphique :

  OUI ☐ NON ☐
- En mathématique je préfère l'approche analytique :

  OUI ☐ NON ☐
- Dans mes recherches je suis confronté à utiliser des concepts mathématiques :

JAMAIS – RAREMENT – SOUVENT – TRES SOUVENT – TOUT LE TEMPS

- Dans mes recherches, en mathématiques, j'utilise l'approche graphique :

JAMAIS – RAREMENT – SOUVENT – TRES SOUVENT – TOUT LE TEMPS

- Dans mes recherches, en mathématiques, j'utilise l'approche analytique :

JAMAIS – RAREMENT – SOUVENT – TRES SOUVENT – TOUT LE TEMPS

- Dans mes enseignements je suis confronté à utiliser des concepts mathématiques :

JAMAIS – RAREMENT – SOUVENT – TRES SOUVENT – TOUT LE TEMPS

- Dans mes enseignements, en économie, j'utilise l'approche graphique :

JAMAIS – RAREMENT – SOUVENT – TRES SOUVENT – TOUT LE TEMPS

- Dans mes enseignements, en économie, j'utilise l'approche analytique :

JAMAIS – RAREMENT – SOUVENT – TRES SOUVENT – TOUT LE TEMPS

	Modules enseignés	**Etablissement**
Avant 1998	Semestre 1 :	
	Semestre 2 :	
1998 - 1999	Semestre 1 :	
	Semestre 2 :	
1999 - 2000	Semestre 1 :	
	Semestre 2 :	
2000 - 2001	Semestre 1 :	
	Semestre 2 :	
2001 - 2002	Semestre 1 :	
	Semestre 2 :	

NAJOUA HAJ ALI
Université de Tunis, ESSEC (Tunisie)
Hajalinajoua@yahoo.fr