AU SUJET DE LA DETERMINATION DE DISTANCES INACCESSIBLES, COMPARAISON DE PLUSIEURS INSTITUTIONS D'ENSEIGNEMENT

CORINE CASTELA
Laboratoire André Revuz de didactique (DIDIREM)
IUFM de Haute-Normandie
Corine.Castela@univ-rouen.fr

Résumé. Ce texte analyse les solutions apportées à des questions de détermination de distances inaccessibles par des manuels de mathématiques du secondaire, au Chili et en France, et par l'enseignement de topographie dans une institution de formation professionnelle post-baccalauréat. Les comparaisons que cette étude suscite sont utilisées comme déclencheur d'une enquête qui révèle certains éléments du rapport de l'enseignement français de la géométrie à l'utilisation d'instruments de mesure.

Mots-clés. Topographie, Mesurage, Comparaison curriculaire, Praxéologies, Paradigmes géométriques.

1. Cadre théorique

1.1. La notion de praxéologie

Pour analyser ce que les élèves doivent apprendre relativement à la détermination de distances inaccessibles dans les exemples que j'analyserai dans cette présentation, j'utilise la notion de Praxéologie introduite en didactique des mathématiques par Y.Chevallard (1999, 2002) :

> « La Théorie Anthropologique du Didactique considère que, *en dernière instance*, toute activité humaine consiste à *accomplir une tâche t* d'un certain *type T*, *au moyen* d'une certaine *technique* τ, *justifiée* par une *technologie* θ qui permet en même temps de la *penser*, voire de la *produire*, et qui a son tour est *justifiable* par une *théorie* Θ. En bref, toute activité humaine *met en œuvre* une organisation qu'on peut noter [T, τ, θ, Θ] et qu'on nomme *praxéologie*, ou *organisation praxéologique*. Le mot de praxéologie souligne la structure de l'organisation [T, τ, θ, Θ] : le grec *praxis*, qui signifie « pratique », renvoie au *bloc practico-technique* (ou praxique) [T, τ], et le grec *logos*, qui signifie « raison », « discours raisonné », renvoie au *bloc technologico-théorique* [θ, Θ].» (Chevallard, 2002, p.3)

Dans la mesure où je vais immédiatement faire fonctionner cet outil dans des exemples précis, je ne chercherai pas ici à en dire plus sur cette définition.

1.2. Les paradigmes géométriques

C. Houdement et A. Kuzniak (2000) ont différencié trois paradigmes en Géométrie : la Géométrie Naturelle, la Géométrie Axiomatique Naturelle, la Géométrie Axiomatique Formaliste. Seuls les deux premiers (GI, GII dans la suite) interviennent dans ce texte. Ces paradigmes se différencient par leurs objets, leur mode de validation et la place qu'y jouent les instruments : GI est une géométrie des dessins instrumentés acceptant l'usage de certains de ces instruments pour la validation, GII une géométrie d'objets abstraits modélisant les tracés aux instruments mais définis par des propriétés, le seul mode de validation admis est la démonstration.

2. Comparaison franco-chilienne

Dans cette partie, je m'appuie sur les résultats d'une recherche coopérative franco-chilienne[1], consacrée à l'enseignement de la géométrie dans les deux pays (voir Castela et Al. 2006). La situation problématique qui sera étudiée plus précisément est la suivante : *déterminer la distance d'un point inaccessible à un point accessible*. Nous nous intéresserons aux praxéologies relatives à cette question présentes dans les systèmes chilien et français d'enseignement des mathématiques. L'étude se limite au niveau institutionnel, il ne nous a pas été possible de poursuivre l'exploration par des observations dans des classes. Sont analysés textes officiels et manuels : au Chili, le ministère propose des Documents d'Accompagnement (DAcc dans la suite) très détaillés, qui présentent de nombreuses propositions d'activités ; en France, ce n'était pas le cas au moment de l'étude (2003-2005), ce qui a été compensé par une étude plus développée des manuels pour ce pays.

2.1. En Segundo Medio

Des éléments du contexte institutionnel

Le cursus obligatoire au Chili comporte 12 années, en deux cycles : *Básico* de 1B à 8B, *Medio* de 1M à 4M ; *Segundo Medio* est la 10ème année de scolarité (Seconde française).

La question de la détermination de mesures de grandeurs inaccessibles apparaît à ce niveau dans une unité consacrée à la similitude de figures planes, qui traite des représentations à l'échelle, du théorème de Thalès et des critères de similitude des triangles. Notons que l'année de *Segundo Medio* est véritablement celle où commence l'apprentissage de la démonstration ; cette unité inclut un item intitulé "Distinction entre hypothèse et conclusion. Organisation logique des arguments".

Dans ce cadre, les DAcc proposent 7 activités, l'une d'elle est entièrement consacrée aux grandeurs inaccessibles : il s'agit toujours de déterminer une hauteur, le texte décrit 6 techniques matérielles permettant d'obtenir les mesures nécessaires à la résolution du problème, modélise géométriquement la situation par un dessin codé mais ne dit rien sur la composante mathématique des techniques (il s'agit sans doute d'utiliser le théorème de Thalès ou un cas de similitude). Aucun exemple numérique n'est donné et le texte donne les conseils suivants aux professeurs : profiter d'une sortie sur le terrain pour que les élèves effectuent eux-mêmes les mesures nécessaires (*mediciones estimativas*) ; favoriser les échanges sur les écarts constatés selon les équipes et le caractère approché du mesurage ; faire effectuer les calculs avec les chiffres significatifs et évaluer l'amplitude des erreurs.

Nous retenons donc qu'au niveau des intentions officielles sont simultanément présentes dans la classe de mathématiques l'initiation à la géométrie déductive et des situations de mesurage dans l'espace matériel, prenant en compte les questions d'approximation. Cette situation perdure tout aussi explicitement l'année suivante dans l'unité centrée sur la géométrie des triangles rectangles qui reprend la question des grandeurs inaccessibles avec des techniques de visée pour lesquelles il est expliqué comment construire un goniomètre artisanal. Dans le cas d'une hauteur inaccessible, le calcul fait intervenir l'expression $\frac{1}{\tan b - \tan c}$

[1] Coopération Equipe Didirem-Equipe PUC Valparaiso avec le soutien du comité Ecos-Conicyt

, le texte conseille de laisser les étudiants se rendre compte des effets importants de l'arrondi sur les valeurs des tangentes lorsque les mesures b et c sont proches.

Un exemple proposé par un manuel

Le manuel *Arrayán* de Segundo Medio propose dans le cadre de l'unité sur les figures semblables la situation suivante[2] :

> « Une autre application de la similitude des triangles est celle qui permet de calculer la distance à un point lointain ou inaccessible par exemple la largeur d'un fleuve, la distance entre un point et un bateau visible en haute mer, etc. Supposons que tu désires calculer la distance entre un point A situé sur la rive d'un fleuve et un arbre situé en un point P de la rive opposée.
> Pour calculer cette distance, tu peux procéder de la façon suivante
> 1. Situer un point B à une certaine distance *d* de A .
> 2. Par visée, mesurer les angles déterminés $\prec$ PAB et $\prec$ ABP.
> 3. Mesurer $\overline{AB}$.
> 4. Construire à l'échelle un triangle auxiliaire A'B'P' semblable au triangle ABP. (critère AA de similitude)
> 5. Mesurer avec une règle ou un mètre ruban la longueur de $\overline{A'P'}$.
> 6. Calculer la longueur de en prenant en compte le rapport de l'échelle employée $\frac{d}{d'}$. »

$$\frac{x}{A'P'} = \frac{d}{d'}$$

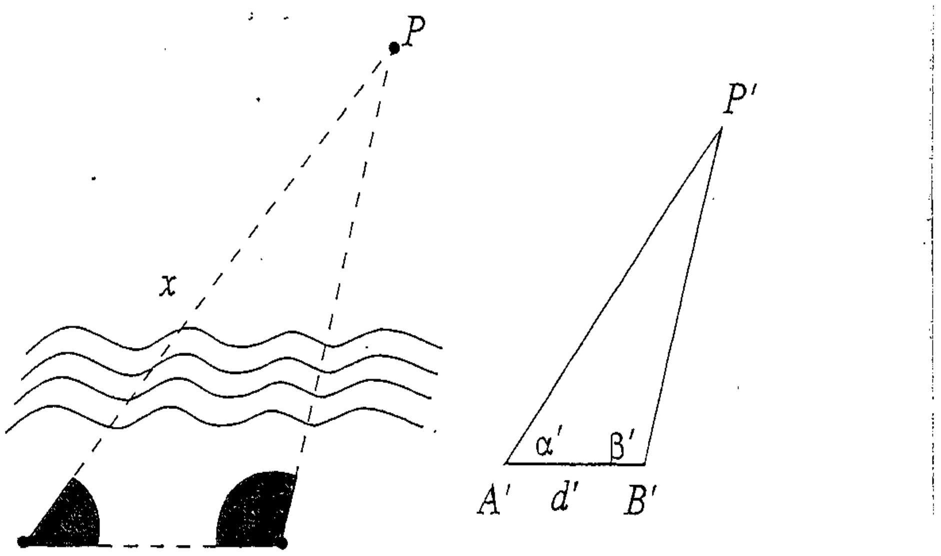


Figure 1. Dessin illustrant la situation dans le manuel chilien

La praxéologie présentée par le manuel peut se décrire de la manière suivante :

- Type de tâches *T* : déterminer la distance d'un point inaccessible à un point accessible.
- Technique :

[2] Dans cet article, les traductions sont assurées par mes soins, les notations chiliennes sont conservées.

Le descriptif cité plus haut commence par une phase de mesurage (détermination aux instruments des mesures nécessaires) ; celle-ci est ici seulement évoquée, aucun instrument n'est considéré mais à la lecture des instructions officielles de l'année suivante, je fais l'hypothèse que les intentions institutionnelles sont bien d'importer la pratique effective de mesurage dans l'enseignement des mathématiques (ce qui suppose que celui-ci sorte de la salle de classe). Même si les exercices de travail de cette technique présents dans ce manuel fournissent les mesures utiles (comment pourrait-il en être autrement ?), un des exercices proposés pour l'évaluation demande : "Si tu désires connaître la hauteur d'un poteau et si tu disposes d'un miroir, d'un mètre de couturière et de la bonne volonté d'un ami, que ferais-tu pour la calculer ?". La dimension effective, matérielle, des techniques relève donc bien des objectifs d'apprentissage.

La deuxième phase de la technique consiste à construire aux instruments un triangle de l'espace de la feuille de papier, qui soit une représentation à l'échelle du triangle de l'espace initial dans le cas où l'on connaît la longueur d'un côté AB et les mesures des angles en A et B.

La troisième phase est un mesurage sur le dessin obtenu ; elle se situe donc dans le paradigme G I. La dernière phase est un traitement mathématique d'une situation de proportionnalité.

- Technologie :

Nous nous intéressons ici aux savoirs mathématiques qui assurent que la technique utilisée donne bien le résultat recherché. La technique d'obtention de la représentation à l'échelle est justifiée par le cas de similitude noté AA (deux triangles ayant deux angles respectivement égaux sont semblables), le retour aux dimensions réelles l'est par la définition des triangles semblables (proportionnalité des côtés et égalités des angles). Ces théorèmes sont enseignés dans l'unité étudiée. Par contre, les savoirs numériques relatifs au traitement de l'égalité de rapports sont anciens.

- Théorie :

Il s'agit de savoir comment à son tour est justifiée la technologie, ce qui nécessite une organisation cohérente de savoirs qui constitue au moins un embryon de théorie au sens classique de ce terme. Dans le manuel considéré, l'organisation en question est la suivante : théorème de Thalès sous sa forme générale de conservation des rapports par projection parallèle et sous sa forme spécifique au triangle (3 rapports égaux) ; démonstration grâce à ce dernier résultat de ce qui est désigné comme "théorème fondamental de similitude" (lorsqu'on mène dans un triangle ABC une parallèle à l'un des côtés, on détermine un triangle semblable à ABC) ; les cas de similitudes sont énoncés sans démonstration mais il est précisé en marge qu'ils peuvent être démontrés à partir du théorème fondamental (auquel il faut associer les cas d'isométries enseignés l'année précédente). Ce descriptif laisse à penser que la théorisation ainsi proposée relève du paradigme GII dans lequel le seul mode de validation accepté est la démonstration. Mais ce n'est pas le cas pour les théorèmes de Thalès : ceux-ci sont établis par mesurages sur des dessins puis institutionnalisés comme théorèmes sans qu'à aucun moment ne soit mis en évidence un quelconque changement de statut d'un énoncé (par exemple, de conjecture à théorème admis ou qui peut se démontrer comme c'est le cas pour les cas de similitude). Il y a donc coexistence de modes de validation relevant des paradigmes GI et GII[3].

---

[3] Sur les 3 autres manuels étudiés, l'un est très proche de l' *Arrayán* (mesures sur dessin pour traiter un problème de distances inaccessibles, vérification empirique du théorème de Thalès, énoncé sans remarque particulière quant au mode de validation) ; les deux autres proposent pour ce théorème une démonstration par les aires et ne

Les formes de la validation dans l'enseignement chilien de mathématiques

Une caractéristique des orientations prônées par le ministère chilien est d’accorder une très grande place au travail d'exploration préalable à l’institutionnalisation d’une notion ou d’un résultat. Cette orientation répond à la volonté d'accompagner les élèves dans la construction du sens des résultats enseignés. Ce choix est clairement exprimé dans le texte suivant qui concerne le travail sur la construction de triangles au niveau de la 7ème année :

> « Relativement aux triangles, cette unité met l'accent sur le dessin. Il s'agit que les élèves se convainquent eux-mêmes des conditions de possibilité et d'impossibilité de construction d'un triangle. [...] la somme de 2 côtés doit être supérieure au troisième. Cependant, il ne s'agit pas d'enseigner cela comme une vérité. Nous proposons ici un ensemble d'activités qui conduisent les élèves à découvrir et comprendre la condition d'existence. » (*Mineduc*, *Septimo Año Básico* - 7B- p. 51-52)

Dans ce contexte, la formulation et, au moins dans une certaine mesure, la décontextualisation et la généralisation des résultats sont régulièrement dévolues aux élèves. Concernant la validation, elle est à leur charge dans le cadre d'une géométrie GI pendant les 6 premières années. La 7ème année semble introduire un changement en introduisant l'idée de conjecture :

> « Dans aucun des cas proposés ne se réalise une observation exhaustive de toutes les possibilités, pas plus que ne sont proposées des démonstrations générales des phénomènes. C'est pourquoi les conclusions sont des conjectures, elles n'ont pas le statut de conclusions générales. » (*ibidem* p. 64)

Le professeur se voit alors investi de la responsabilité de valider mais les textes ne permettent pas de trancher sur la forme du processus de validation.

Cette inflexion n'est pas reprise l'année suivante ; à propos d'un travail consacré aux angles déterminés par deux parallèles et une sécante, on trouve par exemple la précision suivante :

> « Les conclusions obtenues […] grâce aux mesures réalisées, peuvent aussi être vérifiées par déplacement de droites et rotations d'angles. Il est important de souligner que si un raisonnement permet d'établir clairement la relation entre les angles, il n'est pas nécessaire de mesurer. » (*Mineduc 8B* p. 27)

Ainsi le statut des conclusions obtenues par les élèves redevient ambigu, les modes de validation matérielles relevant de GI restent acceptées. Toutefois le raisonnement commence à être privilégié quand il est possible.

La démonstration apparaît dans le domaine d'activité de l'élève au niveau de la première année de l'enseignement *Medio* mais l'objectif explicite est alors que les élèves argumentent en produisant une chaîne d'affirmations cohérentes :

> « les démonstrations non formelles ne doivent pas être considérées comme des erreurs ou des défauts, mais comme une étape vers des

traitent que les situations de grandeurs inaccessibles qui se résolvent par raisonnement grâce aux théorèmes du cours. Aucune sortie sur le terrain n'est envisagée. Dans les limites du projet de coopération Ecos-Conacyt, la transposition dans les classes des intentions ministérielles n’a pas été étudiée.

démonstrations plus formelles. » (*Mineduc 1M* p. 86)

Les instructions évoquent à plusieurs reprises des dessins et pliages qui semblent acceptés comme moyens d'argumenter. Pendant les années ultérieures qui donnent plus de place aux démonstrations formelles et marquent une certaine mise à distance de la prise d'informations sur dessin, l'appui sur des explorations dans le monde des objets matériels reste cependant une constante pour introduire les théorèmes au programme : ainsi au niveau de *Tercero Medio* (Première française), l'activité d'exploration consacrée aux théorèmes d'Euclide[4] envisagent la possibilité que les élèves se convainquent de la similitude des triangles en jeu par découpage. Les textes n'attirent à aucun moment l'attention des professeurs sur la nécessité de conférer un statut spécial aux théorèmes qui ne seraient validés que par expérimentations, ce qui renvoie au traitement de la validation du Théorème de Thalès dans le manuel *Arrayán*.

Synthèse

Je retiendrai deux points, selon moi directement liés, qui sont très explicites dans les textes officiels d'orientation et dont la reprise dans les manuels est réelle mais inégale :

- L'enseignement chilien de mathématiques étend son champ d'intervention au traitement de tâches par des techniques relevant en partie du monde non mathématique ; l'utilisation d'instruments de mesure et la prise en compte de questions d'approximations y sont présentes.
- Le souci de la construction du sens des savoirs mathématiques par les élèves conduit à maintenir jusqu'à la fin du secondaire des approches inscrites dans le paradigme GI. La validation par recours aux instruments est acceptée dans l'enseignement basique, son éviction au profit du raisonnement puis de la démonstration est très progressive et peut-être jamais totalement accomplie. GI et GII coexistent jusqu'à la fin de la scolarité.

2.2. Dans le secondaire français

L'étude dont il est rendu compte ici réfère pour la France au programme de collège (6ème à 9ème année de scolarité) en vigueur à l'époque. Depuis ce programme a subi certaines évolutions (entrée en vigueur en classe de Sixième en 2005), notamment l'explicitation d'un minimum exigible (socle commun) qui pourrait se traduire par une certaine atténuation des traits exhibés par notre étude des orientations antérieures (place plus explicite au travail sur les dessins géométriques en Sixième, mise en avant de la dimension "Recherche et production orale d'une preuve" dans l'apprentissage de la démonstration dont l'écriture formalisée ne relève pas du socle commun). Un examen rapide des nouveaux manuels montre que sur les points abordés dans la suite, aucune évolution notable n'est repérable ; le choix d'exemples tous extraits de ces nouvelles éditions le montrera.

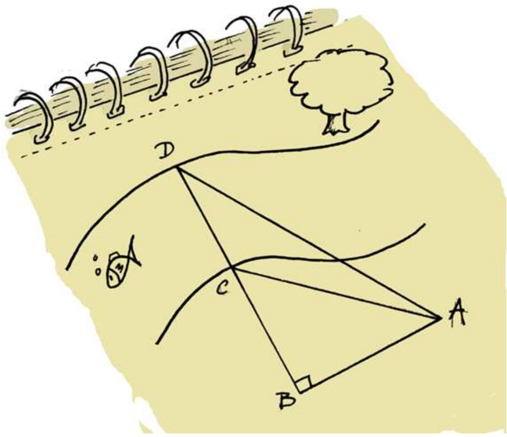
Le type de tâches *T*, *Déterminer la distance d'un point inaccessible à un point accessible*, apparaît à différents niveaux de la scolarité française.

En classes de Quatrième et Troisième[5]

Dans ces classes, nous rencontrons le type *T*, ou plutôt une variante *T** (il n'y a pas de phase mesurage) exclusivement dans les chapitres de trigonométrie consacrés au cosinus en Quatrième, au sinus et à la tangente en Troisième.

[4] Relations métriques faisant intervenir la hauteur relative à l'hypoténuse dans un triangle rectangle.

[5] 8ème et 9ème année de scolarité.



Extrait du Brevet
Monsieur Schmitt, géomètre, doit déterminer la largeur d'une rivière. Voici le croquis qu'il a réalisé :
AB = 100 m ; BAD= 60° ;   BAC = 22° ; ABD = 90°.
a. Calculer la longueur BC au dixième près.
b. Calculer la longueur BD au dixième près.
c. En déduire la largeur de la rivière à un mètre près.

Le manuel Sésamaths 3e , Collection Mathenpoche
Ed Génération 5, 2008 ; p. 188

Figure 2. Exercice de Troisième (France) : cas d'un angle droit

L'énoncé ci-dessus est extrait d'un texte de l'examen national de fin de collège, il montre que dans la configuration particulière d'un triangle rectangle, il est attendu que les élèves connaissent la praxéologie correspondante qui est donc un objet enseigné :

- Type de tâches *T** : les mesures nécessaires étant fournies (longueur d'un côté, mesures des angles), calculer les longueurs inconnues.
- Techniques :

Dans le cas où la longueur à calculer correspond à l'hypoténuse, la technique utilise le cosinus ; pour le côté manquant de l'angle droit, on peut utiliser le calcul précédent et le théorème de Pythagore (4ème) ou la tangente (3ème).

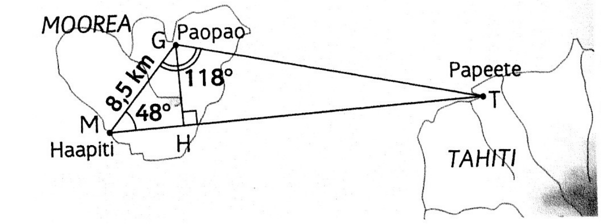
- Technologie :

La validité des techniques repose sur la définition des fonctions trigonométriques puis sur les résultats numériques relatifs aux égalités $\frac{a}{b} = c$ et $a^2 = b$.

- Théorie :

L'invariance des rapports qui valident la définition des fonctions trigonométriques est justifiée par un résultat relatif aux droites orthogonales à une même droite et, moyennant des implicites lié à l'invariance des mesures par déplacement et à l'alignement de certains points, par le théorème de Thalès dans le triangle. Celui-ci est introduit en 4ème, j'ai examiné les manuels publiés en 2007 par les grands éditeurs scolaires (7 manuels) : un seul propose dans le cours la démonstration générale par les aires ; les autres commencent par une exploration numérique par mesures à la règle et/ou avec un logiciel qui aboutit à un résultat explicité comme conjecture ; ensuite un seul passe sans aucune précaution à l'énoncé du théorème ; les cinq derniers jouent sur l'un des deux ressorts suivants pour mettre en évidence le caractère incomplet de la justification : explicitation du caractère admis ("on admettra cette conjecture") et/ou démonstration dans des cas annoncés comme particuliers.

Le type *T** pour un triangle non rectangle apparaît quelques fois dans des exercices d'approfondissement mais aucune des techniques possibles n'est un objet d'enseignement ; comme on le voit dans l'énoncé ci-dessous, les élèves sont guidés dans la résolution.



74 Mesures polynésiennes

Un géomètre veut calculer la distance entre Haapiti sur l'île de Moorea et Papeete sur l'île de Tahiti. Il sait que :

- la distance entre Haapiti et Paopao est égale à 8,5 km soit GM = 8,5 km ;
- $\widehat{GMT} = 48°$;
- $\widehat{MGT} = 118°$.

a. On note H le pied de la hauteur issue du point G dans le triangle MGT.
Calculer les valeurs exactes, puis les arrondis au mètre, des distances MH et GH.

b. Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{MGH}$.
En déduire celle de l'angle $\widehat{HGT}$.

c. Calculer la valeur exacte, puis l'arrondi au mètre, de la distance HT.
En déduire la distance MT, puis son arrondi au km.

Transmath 3ème , Edition Nathan, 2008, p. 216

Figure 3. Enoncé de Troisième (France) : cas général

Je ne décrirai pas dans le détail la technique en jeu ; sa technologie intègre deux nouveaux éléments, la définition de la hauteur et le théorème sur la somme des angles d'un triangle, résultats qui s'inscrivent dans le cadre de la théorie géométrique présentée au collège.

Cette théorie relève clairement de GII. Il en est de même des techniques rencontrées ci-dessus, voire même du type de tâches *T** qui ne fait qu'évoquer le contexte concret ; les élèves n'ont pas à prendre de mesures. Ceci peut se comprendre dans le cas d'un examen mais l'étude des manuels correspondants à l'ancien et au nouveau programme conduit aux mêmes conclusions : sur 8 manuels de 3ème (édition 2008), deux seulement donnent un énoncé dans lequel les mesures sont absentes, donc à déterminer par mesurage, l'un de ces deux manuels est d'ailleurs le seul à se préoccuper des instruments de mesure, proposant dans une activité de groupe la réalisation de ce qu'il appelle un viseur ; les autres au mieux évoquent un monde professionnel en utilisant les termes de géomètre (cf. exemple ci-dessus) ou de théodolite.

Quid de la technique par représentation à l'échelle ?

La notion de représentation à l'échelle est abordée en classe de Cinquième, dans le cadre du thème "Proportionnalité". L'étude menée dans quatre manuels correspondants aux anciens programmes révèle que l'écrasante majorité des exercices proposés consiste à effectuer des calculs de proportions à partir de données numériques fournies par l'énoncé. La praxéologie rencontrée au Chili est présentée une fois dans une activité d'introduction qui cependant donne les mesures nécessaires. Quant aux exercices, le nombre d'énoncés demandant la réalisation d'un dessin à l'échelle est faible (de 5/25 à 1/14), aucun ne donne lieu à mesurage, ni pour obtenir les données nécessaires à la réalisation du plan, ni pour utiliser ce plan pour de nouvelles informations. Les représentations à l'échelle n'ont donc aucune fonctionnalité, la présence de ce sujet dans le programme répond au besoin de faire travailler, dans un contexte de grandeurs, des techniques numériques relatives à la proportionnalité[6].

[6] Les dessins à l'échelle peuvent être des moyens de contrôle mais j'avancerai l'hypothèse suivante : de très nombreux énoncés d'exercices ne contiennent aucune mesure numérique ou bien n'utilisent pas d'unité de

Pour explorer plus avant ce qui apparaît comme une éviction du mesurage par l'enseignement des mathématiques au collège, l'étude France-Chili s'est penchée sur la question de la présence de prise d'informations sur des dessins en classe de Sixième. Les 3 manuels les plus utilisés ont été étudiés : en Gestion de données, les représentations graphiques ne donnent quasiment jamais lieu à des tâches de lecture ; en Géométrie, si l'on excepte le chapitre sur les angles dont l'enjeu central est l'apprentissage de l'usage du rapporteur, le pourcentage du nombre d'exercices nécessitant une mesure relativement au nombre total d'exercices plafonne à 4,2%. Ce choix est explicitement justifié dans deux des trois manuels qui insistent sur l'impossibilité d'être certain en utilisant des instruments et sur la nécessité de démontrer pour prouver en mathématiques :

> « Utiliser une règle graduée ou un rapporteur pour mesurer, un compas pour comparer des longueurs comportent un risque d'imprécision. Se fier à des impressions au regard d'une figure est dangereux […] Aussi en mathématiques, observer une propriété sur une figure n'est pas suffisant. Il faut ensuite la démontrer à partir des données de l'énoncé » (Transmath, 6ème, Nathan, 2000).

Les instruments de mesure sont donc ici très clairement prohibés, voire diabolisés, pour des raisons d'imprécision considérées comme allant de soi ; la démonstration est présentée comme la seule méthode possible de validation. Nous reviendrons donc plus loin sur la position française relativement à l'apprentissage de la démonstration.

Avant d'abandonner le collège, je signalerai que le nouveau programme semble[7] se traduire par une légère évolution, variable suivant les manuels, pour les deux premières années du collège ; l'utilisation des mesures sur plan par exemple est plus présente en Cinquième.

Au lycée

En Seconde, le type de tâches *T* est abordé dans le cadre de l'enseignement de Physique où il est essentiellement traité par une technique dite de la parallaxe qui est justifiée par le théorème de Thalès. Celle-ci n'est pas reprise par les manuels de mathématiques. Les cas d'isométries et de similitudes sont au programme de cette classe ; ni les instructions ni les manuels ne reviennent à l'occasion sur le sujet des représentations à l'échelle. Un manuel sur 9 étudiés seulement propose l'étude de problèmes concrets dans ce chapitre.

En classe de Première (11ème année), Option Scientifique, est traité un type de tâches *T° Résoudre un triangle*, qui consiste à déterminer les longueurs des côtés et les mesures des angles du triangle. *T°* est étudié dans le cadre d'un chapitre sur les calculs de grandeurs qui fait suit au chapitre sur le produit scalaire. Dans le manuel *Terracher Géométrie Première S (2001)*, trois sous types sont envisagés dépendant des mesures connues (cas correspondant aux 3 cas d'isométrie), la technique associée est présentée de manière littérale ; le type qui nous intéresse est résolu grâce à la formule des sinus[8]. La théorie permettant d'obtenir ce résultat est celle que nous avons envisagée pour les

longueur explicite : AB = 5 et non AB = 5cm. Il suffit alors de choisir une unité adaptée qui à elle seule sera porteuse de la notion d'échelle, sans utilisation explicite de la proportionnalité.

[7] Je ne m'avancerai pas plus n'ayant pas réalisé d'étude systématique.

[8] $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

praxéologies du collège augmentée d'un développement réduit conduisant à la formule de l'aire du triangle. Les deux autres cas sont résolus grâce à la formule de Pythagore généralisée.

Le type de tâches *T*° se rencontre au sein des exercices de travail de ces techniques, il s'agit alors d'une application très simple, des situations plus complexes de détermination de mesures inaccessibles lui sont donc en général préférées (voir 3.1), tous les aspects concrets étant évidemment seulement évoqués dans le prolongement du collège.

Les formes de la validation dans l'enseignement secondaire français de mathématiques

Comme nous l'avons vu précédemment, l'interdit pesant sur la prise d'informations par instruments de mesure en géométrie est utilisé par certains manuels pour légitimer la démonstration comme forme unique de validation. Précisons maintenant la position de l'enseignement français relativement à l'apprentissage de la démonstration.

Les textes officiels relatifs à la classe de Première Scientifique (BO n°7, 2000) précisent :

> « La démonstration est constitutive de l'activité mathématique et les élèves doivent en prendre conscience. Faire en sorte que les élèves puissent concevoir des démonstrations dans leur globalité puis en détailler les différentes étapes a toujours été et reste un objectif essentiel de tout enseignement des mathématiques en France. »

Cet objectif ici très clairement assigné à l'enseignement mathématique au niveau de lycée d'enseignement général a été en diverses occasions repris à leur compte par des mathématiciens français prestigieux soucieux de l'avenir de l'école française de mathématiques[9]. Il est pris en charge dès le collège. Je m'appuierai pour en donner la preuve sur les textes officiels relatifs au programme en vigueur dont j'ai déjà dit qu'on pouvait en attendre une certaine atténuation des orientations antérieures.

> « La question de la preuve occupe une place centrale en mathématiques. La pratique de l'argumentation […] se poursuit au collège pour faire accéder l'élève à cette forme particulière de preuve qu'est la démonstration..
> […] Cette initiation à la démonstration doit en particulier permettre aux élèves de distinguer une propriété conjecturée et vérifiée sur des exemples d'une propriété démontrée. En particulier l'enseignant doit préciser explicitement qu'un résultat mathématique qui n'est pas démontré est admis. » (Programmes de l'enseignement des mathématiques, des SVT, de Physique-Chimie du collège, BO n°6 2007 p.13)

On attend donc des élèves qu'ils produisent dès démonstrations (explicitement dès la Cinquième), qu'ils comprennent la différence entre une conjecture et une propriété démontrée, le statut de propriété admise permettant au professeur d'intégrer des résultats non démontrés dans la classe au corpus des propriétés auxquelles se réfèrent les démonstrations.

Mais comme l'explique le document d'accompagnement (DAcc) consacré à la géométrie au collège, il s'agit de renoncer définitivement, du moins pour le cas de la dimension 2, aux modes de validation par instruments légitimes à l'école primaire :

---

[9] Rapport de la Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques sur l'enseignement de la Géométrie.

> « Le premier obstacle rencontré en 6e (et qui perdure longtemps !) est la compréhension du changement de contrat accompagnant le changement de statut des figures. Il ne suffit plus d'observer ou de mettre en évidence à l'aide des instruments des propriétés sur une figure pour qu'elles soient avérées sur le plan mathématique. La nécessité de construire une argumentation à partir d'une base de références identifiées comme telles n'est ni naturelle, ni intuitive. C'est en travaillant, par exemple, des situations construites sur des doutes "visuels" […] plutôt qu'en appliquant de façon immédiate un théorème, que l'élève comprendra les nouvelles règles du jeu impliquées par les situations de preuve en géométrie." p. 11

Les auteurs du texte se soucient du travail à accomplir pour enrôler les élèves dans le nouveau contrat. Mais pas plus que le manuel Transmath 6ème cité précédemment, ils ne donnent d'argument véritablement convaincant en faveur de la démonstration : la notion d'imprécision n'a aucune pertinence si elle n'est référée aux exigences et possibilités de la situation concrète traitée ; quant à l'exemple proposé par le DAcc Géométrie pour illustrer la notion de doute visuel, il ignore que ce doute (portant sur l'égalité de deux longueurs) peut disparaître dès lors qu'un élève se situe dans GI et dispose d'un instrument de report ou de mesure de longueur.

Synthèse

De cette étude il ressort que le système français s'oppose au système chilien sur les deux points mis en avant en conclusion de 2.1.

- L'enseignement français de mathématiques se contente au mieux d'évoquer les aspects concrets des situations de détermination de grandeurs inaccessibles ; seules les techniques relevant de GII légitimées par des théories déjà enseignées sont utilisées ; les mesures ne sont jamais prises par les élèves.
- L'apprentissage de la démonstration étant un enjeu central dès le collège, tout autre mode de validation est prohibé, les instruments sont invalidés en tant que moyens pour obtenir des informations utilisables, ce qui induit que la géométrie pratiquée, ses objets et ses techniques, relèvent exclusivement du paradigme GII.

Mesurage et instruments de mesure sont donc des objets quasiment étrangers au monde de l'enseignement secondaire français de mathématiques et à la plupart de ses professeurs de formation universitaire mono-disciplinaire. La seconde partie de ce texte qui confronte deux praxéologies enseignées en France, l'une dans un lycée d'enseignement général, l'autre dans un lycée d'enseignement professionnel, nous permettra de développer ce diagnostic.

3. Comparaison Enseignement général - Enseignement professionnel en France

Dans cette partie, je présente les tout débuts d'un travail relatif à l'enseignement de topographie dispensé dans le cadre d'une formation de Technicien Supérieur en Bâtiment[10].

La situation problématique qui sera étudiée plus précisément est la suivante : *déterminer la distance entre deux points inaccessibles*.

[10] Il s'agit d'une formation en 2 ans, postérieure au baccalauréat.

3.1. Première S

L'exemple présenté est extrait du manuel *Terracher-Géométrie Première S (Hachette 2001*, p.117). Il fait suite à une page consacrée à l'étude du type de tâches *T°* évoqué dans 2.2.

PROBLÈME 1

Calculer la distance CD entre les deux maisons avec les données du schéma ci-contre.

❶ Recherche

On pourrait calculer CD dans le triangle ACD si AC et AD nous étaient connus (situation ③ : un angle « entre » deux côtés). Or, nous pouvons résoudre le triangle ABC (situation ② : un côté « entre » deux angles ($AB = 172$, $\hat{A} = 43° + 36°$, $\hat{B} = 48°$)) et pour les mêmes raisons, le triangle ABD.
C'est parti.

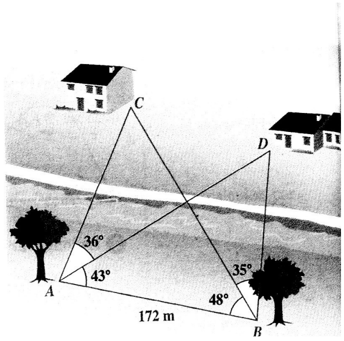


Figure 4. Enoncé de Première S (France)

Comme on le constate dans la suite (figure5), la technique utilisée fait apparaître deux fois le type *T** traité par la technique déjà rencontrée. Puis la formule de Pythagore généralisée permet de calculer la distance cherchée. La difficulté de cet exercice consiste en la reconnaissance dans le dessin qui représente la configuration géométrique de triangles dans lesquels on peut utiliser l'une des trois techniques rencontrées à la page précédente du manuel pour traiter *T° Résoudre un triangle*. Le manuel se préoccupe de cette difficulté et à la page suivante insère un conseil intitulé Rapport d'étape : «Il est impératif de savoir reconnaître les situations de référence qui permettront de résoudre un triangle… »

❷ Solution rédigée

Remarquons que $\widehat{ACB}$ a pour mesure 63° et $\widehat{ABD}$, 64°.

Calcul de AC

Appliquons la loi des sinus dans le triangle ABC :

$$\frac{AC}{\sin 38°} = \frac{172}{\sin 63°},$$

d'où : $AC \approx 118{,}85$ m.

Calcul de AD

Appliquons la loi des sinus dans le triangle ABD :

$$\frac{AD}{\sin 73°} = \frac{172}{\sin 64°},$$

d'où : $AD \approx 183$ m.

Calcul de CD

La relation d'AL-Kashi $CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \times AD \times \cos 36°$ livre, tous calculs faits :

$$CD \approx 111{,}46 \text{ m},$$

soit : $CD \approx 111$ m (restons raisonnables).

.Figure 5. Solution proposée par le manuel[11]

Je retiendrai de ce premier examen que le manuel ne se situe pas dans la perspective d'un apprentissage relatif à la technique illustrée ici. La visée est plus générale : il s'agit de développer une praxéologie plus complexe relative au type très large *Déterminer une distance*, voire à un type encore plus étendu intégrant

[11] Il y a une erreur sur la mesure de l'angle ABC.

également la détermination de mesures d'angles. Les techniques sont alors multiples, suivant les hypothèses spécifiques qui ne sont pas toujours ou pas souvent sous le contrôle du résolveur. Dans un tel contexte, il devient nécessaire de développer des savoirs pratiques, permettant par exemple de guider les choix de techniques suivant les spécificités de la situation (voir Castela 2008). Il s'agit alors au cas par cas de mobiliser et d'adapter les techniques de référence relatives à *T*°.

La situation est différente dans le domaine professionnel ; il y existe un certain nombre de types de tâches bien repérés pour lesquels les techniciens doivent connaître une technique. Celle-ci précise quelles mesures sont à réaliser pour pouvoir appliquer la partie mathématique de la technique. C'est ce contexte que nous rencontrons dans le second exemple relatif à la même situation. Si la praxéologie intègre alors des savoirs pratiques, ils diffèreront de ceux du praticien mathématicien dont le manuel *Terracher* donne une petite idée.

3.2. En classe de Technicien Supérieur Bâtiment

Il s'agit ici d'une séance de Travaux Pratiques dans le cadre de l'enseignement de topographie.

> On souhaite connaître la distance entre les deux cibles disposées sur le bâtiment E. Il vous est donc demandé de vous rendre sur place et de faire les relevés nécessaires pour déterminer cette distance.
> Vous devez choisir les stations St1 et St2[12] et faire les relevés nécessaires au calcul de la distance (ne pas oublier de faire un schéma de vos opérations). Opération à effectuer deux fois si vous avez le temps afin de vérifier la validité du relevé.
> En salle, faire les calculs nécessaires pour déterminer la distance entre les deux cibles.

La technique mathématique a déjà été présentée en cours de planimétrie. C'est la même que dans le manuel *Terracher* ci-dessus, les différences sont relatives aux mesures.

Les quatre mesures d'angles sont initialement données en degré ; un angle mesure par exemple 85° 22' 00''. Ces mesures sont converties en grades, l'unité d'usage en topographie :

$$a = 85 + \frac{22}{60} = 85{,}367° = 94{,}852 \text{ gon}$$

On remarquera pour commencer que toutes les mesures sont calculées avec trois chiffres après la virgule qui est la précision à la fois requise et permise par le théodolite utilisé. Ce sera le cas tout au long du calcul, y compris pour les distances données en mètres.

On mesure ici la différence avec l'exercice donné dans le manuel de mathématiques : toutes les distances y sont des nombres entiers et au moment de conclure, l'auteur arrondit la valeur approchée qu'il a proposée à l'entier le plus proche avec un commentaire "Soyons raisonnable" qui est une preuve flagrante de sa méconnaissance du monde de la topographie.

[12] Il s'agit des points où va être implanté le théodolite pour réaliser les visées angulaires.

La notion de valeur approchée semble totalement absente dans le contexte professionnel puisque le signe ≈ n'apparaît pas dans la conversion de $\frac{22}{60}$ en décimale, il en est de même dans l'ensemble de la solution. En réalité, les approximations sont bien présentes, qui plus est sous une forme contrôlée par la notion de chiffres significatifs : le signe "=" a ici un sens étranger au monde mathématique, a = 85,367° signifie que a est compris entre 85,3665° et 85,3675°. Le nombre de chiffres après la virgule indique la précision de l'encadrement :

AB = 3m signifie que 2,5m<AB<3,5m ; AB = 3,000 m signifie que 2,9995m<AB<3,0005 m

On vérifiera que l'usage des arrondis dans le *Terracher* est loin d'être aussi rigoureux, donnant à penser que dans ce contexte mathématique, les valeurs approchées ne sont pas l'objet d'un intérêt sincère ; le manuel parodie une situation professionnelle et l'usage de nombres décimaux contribue à l'illusion de réalisme.

3.3. Synthèse

Comme c'était prévisible du fait de la nature même de la discipline Topographie, nous avons retrouvé la différence relative à la réalisation du mesurage mise en évidence dans la partie 2 entre France et Chili. Mais les deux praxéologies se distinguent également quant au traitement des valeurs des mesures. Supposant les données exactement connues, le point de vue mathématique se centre sur la détermination de valeurs exactes, la valeur approchée est un arrondi dont la précision n'est pas motivée. Dans le cas de la topographie, les approximations tant des données que des résultats sont normées, elles correspondent aux possibilités des instruments de mesure et aux tolérances professionnelles.

Par ailleurs, les enjeux de formation respectifs des deux systèmes se traduisent par des organisations praxéologiques de granularité différente : dans l'enseignement général de mathématique, les praxéologies relatives aux trois sous-types de $T°$ sont institutionnalisées et deviennent des outils possibles pour un type de tâches très étendu qu'on ne cherche pas à catégoriser en sous-types intermédiaires ; dans l'enseignement professionnel de la topographie, il est au contraire essentiel qu'au-delà de $T°$, les techniciens formés maîtrisent un éventail de praxéologies relatives à des types spécifiques pour lesquelles des techniques algorithmiques doivent être maîtrisées.

Conclusion

Aux synthèses qui ont émaillé ce texte, je voudrai ajouter ici un questionnement relatif à l'enseignement français de mathématiques. Nous avons vu quel rapport difficile celui-ci entretient avec l'activité consistant à utiliser des instruments, en particulier pour relever des mesures. Il semble que cette situation résulte au moins en partie de l'importance accordée à la démonstration et du choix d'en commencer très tôt l'apprentissage. Tout se passe comme si, renonçant à faire accéder de jeunes élèves à un paradigme d'objets abstraits, le professeur de mathématique n'avait d'autre solution pour légitimer la démonstration que de nier toute efficacité aux instruments. Or il s'agit bien entendu d'une fiction que la confrontation à une situation du monde matériel invalide immédiatement. Sur quelles bases fonder la coexistence en classe de mathématiques des paradigmes GI et GII, des instruments de mesure et de la démonstration ? Comment montrer la complémentarité des deux approches ? Ces questions n'ont pas de réponse au niveau institutionnel en France mais les travaux didactiques apportent des éléments d'une stratégie possible.

Par ailleurs, l'exemple chilien montre qu'un enseignement moins centré sur le modèle académique des mathématiques peut être socialement légitimé. Quelles sont aux différents niveaux de détermination, Pédagogie, Ecole, Société, (Chevallard, 2002) les conditions qui rendent ce choix possible au Chili, non envisagé en France ? Une telle étude macro-didactique serait nécessaire pour comprendre les raisons profondes de la position française, évaluer les marges de manœuvre et déterminer les verrous à faire sauter pour obtenir une évolution.

Références

CASTELA C. (2008), Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 28(2), 135-182

CASTELA C. CONSIGLIERE L., GUZMAN I., HOUDEMENT C., KUZNIAK A., RAUSCHER J-C. (2006), *Paradigmes géométriques et géométrie enseignée au Chili et en France. Une étude comparative de l'enseignement de la géométrie dans les systèmes scolaires chilien et français.* Cahier de Didirem Spécial n°6, IREM Paris 7

CHEVALLARD Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 19(2), 221-266.

CHEVALLARD Y. (2002), Organiser l'étude 1. Structures et Fonctions. In J-L. Dorier & al. (eds) *Actes de la 11ième Ecole d'été de didactique des mathématiques* - Corps- 21-30 Août 2001 (pp. 3-22). Grenoble : La Pensée Sauvage.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A (2000), Formation des maîtres et paradigmes géométriques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 20(1), 89-115.

CORINE CASTELA
Laboratoire André Revuz de didactique (DIDIREM)
IUFM de Haute-Normandie
Corine.Castela@univ-rouen.fr