LES DIFFICULTES LIEES A L'APPRENTISSAGE DE L'INTEGRALE DEFINIE A L'ENTREE EN CLASSE PREPARATOIRE

AKROUTI* Inen

Résumé – Nous présentons l'étude d'un questionnaire proposé à un groupe d'étudiants en classe préparatoire avant qu'ils n'abordent le cours d'intégration. A travers ce questionnaire, nous estimons explorer le niveau de connaissances supposées acquises chez les étudiants en fin du lycée, pour la notion d'intégrale, et essayer de repérer les difficultés qui pourraient exister.

Mots-clefs : Intégrale définie, aire algébrique, représentation sémiotique, dualité processus/objet.

Abstract – In this paper, we present the study of a questionnaire proposed to a group of students in the preparatory classes before they take the course on integral calculus. Through this work, we try to explore the level of knowledge supposedly acquired by students at the end of secondary school about the definite integral concept. We try to identify the difficulties that may exist.

Keywords: Definite integral, algebraic area, semiotic representation, process/object duality.

I. INTRODUCTION

Le concept d'intégrale définie, comme la plupart des concepts de l'analyse réelle, est un concept multiforme : il s'interprète en termes d'aire, de primitive, de somme ou plus précisément de limite de sommes. Dans de nombreux pays, le curriculum le présente comme un outil de calcul d'aire et de volume (Yerushalmy et Swidan, 2011). En Tunisie, il est introduit à partir des primitives des fonctions continues. Cette définition fait le lien d'une part entre primitive et intégrale et d'autre part entre intégrale et aire : pour une fonction continue et positive f sur un intervalle $[a, b]$ et F une primitive de f, l'aire sous la courbe est le réel $F(b) - F(a)$, appelé intégrale de f de a à b et noté $\int_a^b f(x)dx$.

En étudiant le point de vue institutionnel, Haddad (2012) souligne que l'enseignement de l'intégrale est réduit à un ensemble de propriétés algébriques et il s'identifie à un ensemble de techniques calculatoires. Ainsi les élèves s'habituent à travailler sur un ensemble de savoirs et de savoir-faire qui est le plus souvent utilisé de façon algorithmique. D'un autre côté, Ghedamsi (2008) constate que l'enseignement actuel « semble stabilisé autour de la manipulation d'un certain nombre d'ostensifs relatif aux fonctions, limites et dérivées ». Il se focalise sur quelques problèmes prototypiques. Ce choix pourrait poser des difficultés chez les étudiants dans leur processus d'apprentissage : Ils seraient susceptibles d'échouer dans certaines situations proposées où le contexte est non routinier.

Suite à ce constat, il nous est paru légitime de nous interroger sur *l'état des connaissances* des étudiants sur la notion d'intégrale. Notre objectif est notamment d'analyser l'impact des choix institutionnels sur l'apprentissage des élèves. Pour ce faire, nous nous sommes appuyés sur l'analyse des réponses à un questionnaire élaboré dans le cadre de notre mémoire de master (Akrouti, 2016) et proposé à l'entrée à l'université. A travers ce questionnaire, nous cherchons des éléments de réponse aux questions de recherche suivantes : l'enseignement actuel, en fin du secondaire, favorise-t-il un apprentissage adéquat de la notion d'intégrale ? Quelles difficultés peut-on repérer chez les nouveaux entrants à l'université en rapport avec cette notion ?

*1. Institut Supérieur de l'Education et la Formation Continue ISEFC, Université Virtuelle de Tunis – Tunisie – akroutiinen@yahoo.fr

II. LES CHOIX THEORIQUES ET METHODOLOGIQUES

Pour investiguer les questions proposées et cerner les caractéristiques spécifiques du travail sur la notion d'intégrale, nous avons choisi deux outils théoriques. Ces outils pourraient fournir des critères d'appréciation des spécificités du travail attendu des étudiants. Il nous a été possible de souligner l'importance du rôle que pourrait jouer le statut de la notion d'intégrale dans son apprentissage. Pour cela, nous considérons *la dialectique processus/objet* (Sfard, 1991) comme premier outil choisi, dont Sfard souligne l'importance pour la conceptualisation. Il s'agit donc, dans un premier temps, d'identifier les aspects processus et objets de la notion d'intégrale. Du point de vue de sa définition formelle (introduite à l'université) l'intégrale définie renvoie aux sommes de Riemann. Or il n'y a pas, dans l'enseignement secondaire, un vrai travail reliant l'intégrale à la somme des aires algébriques et prenant en compte le passage à la limite, donc réifiant un processus (infinitésimal) de sommation d'aires. L'introduction de la relation de Chasles (aspect structural de la dimension objet) met en œuvre l'additivité des aires algébriques dans le registre algébrique. Ceci permet de réifier un processus fini de sommation d'aires, si le lien avec le calcul des aires est correctement établi. Enfin, nous pouvons considérer que le calcul de primitives constitue un aspect opératoire de l'intégrale, qui est en quelque sorte « réifié » dans la formule $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Notre choix requiert aussi *les différentes représentations sémiotiques* (Duval, 1993). En effet, les processus de traitement au sein d'un registre de représentation sémiotique et de conversion entre registres sont des éléments efficients dans le processus de conceptualisation de l'intégrale, par la mise en relation qu'ils opèrent entre les différentes formes du concept (dans les registres géométrique, algébrique et numérique). Ces processus requièrent en général une flexibilité cognitive importante et sont de ce fait difficiles pour les étudiants. Une étude du manuel tunisien[2] faite par Haddad (2012) montre que l'institution favorise le travail dans le registre algébrique. Le registre symbolique est exclusivement utilisé dans les exercices portant sur l'étude de fonctions ou de suites réelles définies par des intégrales alors que le registre graphique est sollicité dans les tâches issues de la représentation graphique d'une fonction et le calcul d'aire. Enfin, le registre numérique est quasiment ignoré sauf dans quelques exercices où il s'agit d'approcher l'aire sous la courbe par la méthode des rectangles.

Dans le cadre de ce travail, nous avons choisi de proposer un questionnaire aux nouveaux bacheliers avant qu'ils n'abordent le nouveau cours d'intégration. Les connaissances testées sont celles supposées acquises en classe terminale. Les questions proposées se basent sur l'usage des exemples et des contre-exemples qui sont des tâches non routinières et qui oblige l'individu à dépasser le schéma d'action comme le souligne Gonzalez-Martin (2005). Le questionnaire a été soumis à des étudiants en première année préparatoire à l'Institut Préparatoire aux Ecoles d'Ingénieurs de Tunis (IPEIT) parcours Math-physique (MP). Il a été proposé au mois d'avril 2015. Dans ce questionnaire, nous avons fait le choix d'écarter les tâches calculatoires fréquemment rencontrées en classe terminale. Le questionnaire est constitué de cinq questions auxquelles les étudiants devaient répondre par *vrai* ou *faux*. Il a été demandé explicitement aux étudiants de justifier leur réponse.

III. ETUDE EXPERIMENTALE

Le programme tunisien préconise d'interpréter l'intégrale définie d'une fonction continue et positive comme l'aire sous la courbe. Puis, il définit l'aire comme l'intégrale de la valeur

---

2 En Tunisie il n'y a qu'un seul manuel scolaire pour le terminal Math. L'étude de ce manuel a été faite par Haddad (2012) où il a mené une étude praxéologique des chapitres : Intégrale et Primitive.

absolue d'une fonction continue. Ce choix présente l'intégrale comme un outil de calcul d'aire des surfaces non polygonales. Il met en avant l'aspect opérationnel de l'intégrale et limite le rôle de l'aire qui se réduit à être une simple interprétation géométrique de l'intégrale au lieu de contribuer à la fonder en lien avec les sommes de Riemann.

Dans ce papier, nous avons choisi de présenter une seule question (la question Q_5) parmi les cinq proposées aux étudiants. L'objectif de cette question est d'étudier la compréhension des étudiants des liens entre aire et intégrale. L'étude de cette question se compose d'une analyse ***a priori*** comportant le travail des étudiants en termes d'activités attendues en lien avec les outils théoriques de l'étude et une analyse ***a posteriori*** se basant sur leurs traces écrites afin d'étudier leur niveau de conceptualisation. La question Q_5 est la suivante :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$. Si $[c, d] \subset [a,b]$ *alors* $\int_c^d f(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$. *Répondre par vrai ou faux en justifiant votre réponse.*

1. *Analyse a priori*

Les étudiants qui ont gardé une bonne connaissance du cours de la fin du secondaire sont susceptibles de se baser sur la conception de l'intégrale en tant qu'aire algébrique et donc de la conversion entre registres pour construire un contre-exemple qui infirme la proposition comme le montre l'exemple suivant : $a = -1, b = d = 1$, $c = 0$ et $f(x) = x$. Ils pourraient également appuyer leur réponse par une figure. La complémentarité processus-objet qui est en jeu ici est : la sommation des aires algébriques (processus) et la relation de Chasles (objet). Si cette dualité n'est pas acquise, en lien avec la conversion de registres algébrique/graphique, on peut faire l'hypothèse que les étudiants seront en difficultés pour résoudre la tâche. En effet, davantage de manipulations algébriques sont requises, dans un travail analytique, alors que le registre graphique en permet une expression synthétique. Pour d'autres qui possèdent une conception erronée (induite en partie par l'institution) consistant à restreindre le contexte de la tâche aux fonctions positives, nous attendons qu'ils confirment la proposition. Pour ces derniers, l'intégrale est positive et coïncide avec l'aire.

2. *Analyse a posteriori*

Nous avons recueilli vingt et une réponses à cette question dont neuf réponses sont acceptables (42%) et douze réponses sont non acceptables (57%). Nous entendons par réponse acceptable celle qui est correcte avec des justifications valides du point de vue strictement mathématique et réponse non acceptable celle qui est fausse avec justification ou non et celle qui est correcte avec justification invalide ou non. Toutes les réponses recueillies sont réparties de la manière suivante :

Numéro de la question	Réponses acceptables	Réponses non acceptables			Absence de réponse
		Réponses fausses	Réponses correctes avec justification fausses	Réponses correctes sans justifications	
Q_5	9	6	4	2	0

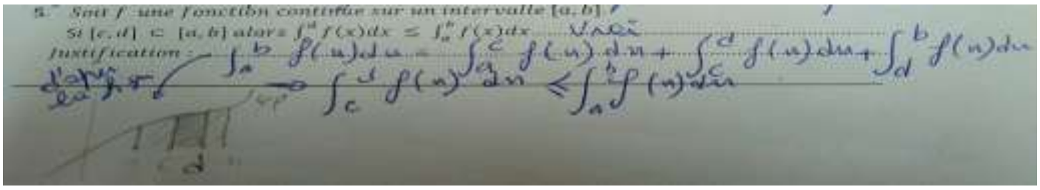
Tableau 1 *– Etude globale des réponses des étudiants*

Les réponses acceptables :

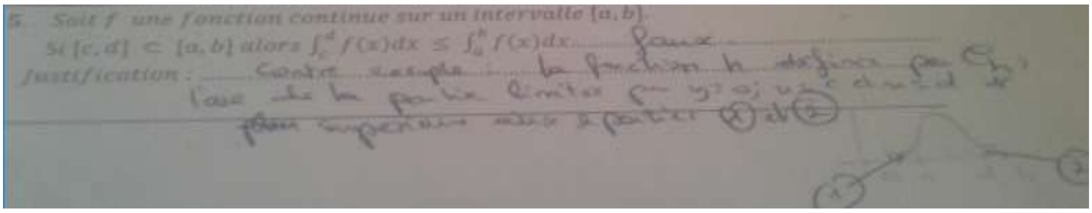
Nous avons réparti les réponses acceptables en deux catégories. La première comporte les réponses se basant sur la relation de Chasles pour mobiliser l'additivité de l'intégrale. Cinq étudiants laissent entrevoir une trace permettant d'envisager que l'interprétation en termes d'aires algébriques a joué un rôle dans la construction du contre-exemple. Les fonctions choisies prennent des valeurs négatives. Parmi ces étudiants, trois se sont limités à des réponses dans le registre algébrique en donnant la formule algébrique de la fonction sur les deux intervalles choisis. Les deux autres ont appuyé leur réponse par un dessin. Pour la deuxième catégorie, les étudiants ont calculé la primitive de la fonction sur les deux intervalles choisis pour faire la comparaison entre les deux valeurs et conclure que la proposition est fausse. Les étudiants de la première catégorie, du moins ceux qui utilisent le registre graphique, sont capables de conceptualiser, via la relation de Chasles, l'intégrale comme sommation d'aires algébriques. La dualité processus/objet est acquise, ce qui facilite la construction du contre-exemple. Pour la deuxième catégorie, la conceptualisation se base sur des aspects processus qui sont limités au calcul de primitives, ce qui rend la construction du contre-exemple plus opaque.

Les réponses non acceptables :

Les réponses non acceptables représentent un taux d'environ 57%. Nous avons choisi la réponse suivante comme premier exemple d'étude :



En se basant sur un dessin, l'étudiant a utilisé la relation de Chasles pour solliciter l'additivité de l'intégrale, puis il a confirmé l'inégalité. Ici l'intégrale est à valeur positive et s'identifie à l'aire. L'erreur est due à la conception erronée consistant à considérer la fonction comme étant à valeurs positives. Malgré que la complémentarité processus/objet est mise en œuvre, la réponse est erronée car l'énoncé n'a pas stipulé la positivité de la fonction. Parmi les autres réponses fausses, quatre étudiants ont considéré que la proposition est vraie sans donner une justification. L'autre cas de réponse correcte avec justification fausse est le suivant :



L'exemple donné par l'étudiant confirme la proposition et ne l'infirme pas. Il semble interpréter l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ comme la somme des aires correspondant aux intégrales $\int_a^c f(x)dx$ et $\int_d^b f(x)dx$. Il est incapable d'appliquer la relation de Chasles et sa conversion vers le registre graphique est erronée.

IV. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

L'analyse des données présentées ci-dessus nous a permis d'identifier quatre catégories d'étudiants :

- La première catégorie : un étudiant de cette catégorie est capable de conceptualiser, via la relation de Chasles, l'intégrale comme sommation d'aires algébriques. La dualité processus/objet est acquise, ce qui facilite la construction du contre-exemple. La conversion entre le registre algébrique (travail analytique) et le registre graphique (expression synthétique) est menée correctement. La conceptualisation est d'ordre structurel. Nous entendons par cela que l'étudiant a compris la définition et les propriétés de la notion d'intégrale. Il est capable de manipuler l'intégrale dans son statut objet et son statut processus.

- La deuxième catégorie : la conceptualisation se base sur les aspects opératoires, limités au calcul de primitives ce qui rend la construction du contre-exemple plus opaque. La conceptualisation est d'ordre opérationnel. L'étudiant ne fait pas le lien entre les aspects objets et les aspects processus liées à la sommation d'aires. Du point de vue sémiotique, il se limite au registre algébrique. Il a des difficultés à poursuivre un apprentissage conceptuel.
- La troisième catégorie : bien que la complémentarité processus/objet soit mise en œuvre à travers la relation de Chasles, la réponse est erronée car elle se limite au cas des fonctions positives. Par la suite, la conceptualisation est d'ordre pseudo-structurel (Sfard et Linchevski, 1994). L'étudiant se base sur des cas particuliers pour généraliser une hypothèse. Il rencontre des difficultés liées à un abus de généralisation.
- La quatrième catégorie : un tel étudiant est incapable d'appliquer la relation de Chasles et la conversion vers le registre graphique est erronée. La conceptualisation n'a pas abouti et l'étudiant est incapable de réaliser la tâche.

Cette étude nous permet également d'étayer l'hypothèse selon laquelle, en l'absence du recours aux méthodes d'approximation mettant en application les sommes de Riemann et permettant de réifier un processus de sommation (infinitésimal), on obtient une conceptualisation de l'intégrale largement déconnectée du calcul des grandeurs (en particulier des aires). Le lien est fait de façon artificielle dans les programmes en définissant l'aire comme l'intégrale de la valeur absolue.

REFERENCES

Akrouti I. (2016) *Transition secondaire/supérieur en analyse : cas de l'intégrale de Riemann en classes préparatoires* (Mémoire de Master Université Virtuelle de Tunis, Tunis, Tunisie).

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactiques et de sciences cognitives* 5, I 37-65.

Haddad S. (2012) *L'enseignement de l'intégrale en classe terminale de l'enseignement tunisien* (Thèse de doctorat Université Paris Diderot & Université Virtuelle de Tunis, Paris, France & Tunis, Tunisie).

Sfard A. (1991) On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on process and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics* 22, 1-36.