RATIONALITES ET INFINI DANS LE CALCUL DE GRANDEURS FINIES

Lecorre[1*] Thomas – Ghedamsi[2**] Imène

Résumé – Dans cette étude, nous explorons, auprès d'un public de doctorants en sciences, les connaissances liées à la notion de limite finie de suite à travers la question du calcul de grandeurs finies par des processus infinis. Le dispositif présenté étudie ces connaissances lors de la résolution collective d'un problème et les analyse selon le modèle des rationalités (pragmatique, empirique, théorique).
Mots-clefs : limite, infini, modèle des rationalités, grandeurs.

Abstract – In this study, the knowledge of PhD students in sciences on the notion of finite limit of a mathematical sequence is explored through the question of computing the value of finite magnitudes by means of infinite processes. The experimental device investigates this knowledge in the context of a collective task of problem-solving and the data are analyzed by means of the model of rationalities (pragmatic, empirical, theoretical).
Keywords: limit, infinity, model of rationalities, magnitudes.

I. INTRODUCTION

L'axiome d'Archimède, dit axiome du continu depuis Hilbert, a permis de contourner les problèmes liés aux grandeurs divisibles à l'infini et a fondé la méthode d'exhaustion de calcul de ces grandeurs. Là où nous serions aujourd'hui passés au calcul de limites, les mathématiciens d'antan (Euclide, Archimède, etc.) utilisent un double raisonnement par l'absurde pour montrer que la grandeur en question n'est ni strictement supérieure ni strictement inférieure à cette « limite » (Burn, 2005). Dans l'analyse standard contemporaine, bien qu'épurée de ce qui pourrait renvoyer à l'infini et aux infinitésimaux, la définition formelle de la limite généralement introduite à l'entrée à l'université, n'a plus aucun lien explicite avec cet axiome ainsi qu'avec ses racines hormis le fait qu'il engendre la convergence formelle de la suite $(1/n)_n$[3]. Or, certains travaux ont montré que l'introduction de cette définition ne garantit pas aux élèves/étudiants de surmonter les difficultés inhérentes à la notion de limite dans divers contextes, mathématiques ou autres (Przenioslo, 2004). En particulier, ces travaux soulignent qu'en aval de la définition formelle de limite, le travail des élèves/étudiants dans de tels contextes pourrait être entravé par le resurgissement de phénomènes liés à l'infini et aux infinitésimaux. Ces phénomènes sont en général attribués aux conceptions fondamentalement dynamiques (Robert, 1982) que pourraient avoir formé les élèves/étudiants lors d'un premier enseignement informel de la limite.

Cette recherche aborde la question des manifestations de ces phénomènes auprès d'un public avancé en mathématiques (doctorants en sciences) et destiné à poursuivre une carrière professionnelle dans le champ des mathématiques ou de disciplines qui lui sont connexes. Nous partageons le point de vue selon lequel avoir le sens de la limite est synonyme d'une prise de conscience des raisons intrinsèques à ses racines ; ces raisons fondent à leur tour la structuration de l'édifice final. Cet édifice unifie, à travers le formalisme, l'ensemble des notions qui renvoient à l'infini et aux infinitésimaux en analyse réelle (un nombre réel comme limite d'une suite de rationnels, un nombre dérivé, un reste intégral, une différentielle, un équivalent, une suite de Cauchy, etc.). Une manière de tester qu'on a acquis ce sens, c'est de pouvoir faire fonctionner les significations de cet édifice dans ses divers contextes, notamment en dehors du cadre de l'Ecole et de la classe de mathématiques. Dans cette étude, notre objectif va au-delà d'un simple recensement ou catégorisation des différents symptômes

1 [*] Université Cergy-Pontoise – France – thomas.lecorre@u-cergy.fr
2 [**] Université de Tunis – Tunisie – ighedamsi@yahoo.fr
3 Axiome d'Archimède : *Pour tout x et y > 0, il existe un entier n tel que y< n.x*. En prenant $x = \varepsilon$ et $y = 1$, on obtient la convergence vers 0 de la suite $(1/n)_n$.

liés aux questions de l'infini et de leurs origines. Notre recherche consiste à étudier les types de raisonnements qui composent le travail du public expérimenté ainsi que l'évolution des connaissances de ce public lorsqu'il est confronté à un problème d'infini et d'infinitésimaux résoluble par passage à la limite. Par conséquent, nous entreprenons cette recherche dans le cadre théorique des rationalités introduit par Lecorre (2016). Ce cadre donne une vision globale et cohérente des éléments fondateurs de l'activité mathématique, dont celle de définir, et de leurs différentes appréhensions compte tenu de la nature du raisonnement établi et de son développement. Le but de cette recherche est de mettre à jour des phénomènes liés à l'apprentissage de la définition de la limite et de les analyser, afin de pouvoir servir de fondation à des travaux ultérieurs qui traiteraient d'une renégociation de l'enseignement de la définition de la limite en réintroduisant des éléments spécifiques au principe fondamental de l'analyse, c'est-à-dire évaluer des grandeurs finies au moyen de processus infinis.

Cadre théorique

Conçu dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques (TSD), le modèle des rationalités de Lecorre (2016) part d'un questionnement des significations de l'hypothèse fondamentale « d'actant rationnel » de cette théorie. Cette hypothèse admet l'évolution du travail autonome des élèves/étudiants, ou tout autre individu engagé dans un processus de cognition, suivant les différents niveaux du milieu, cette autonomie est fondamentalement supportée par la robustesse de la situation mathématique, dite fondamentale, implémentée dans ce milieu (Brousseau, 1998). La conception de situations fondamentales dans le contexte d'apprentissage de notions mathématiques complexes, unificatrices et fortement formalisées (telle que celle de la limite) s'avère problématique (Bloch, 2005). Tout en préservant les principes de la TSD, notamment en termes d'optimisation des interactions au sein du milieu entre élèves/étudiants, professeur (médiateur) et situation mathématique, la modélisation de cette hypothèse permet de spécifier la nature du travail des élèves/étudiants ainsi que sa progression dans un tel contexte.

Une rationalité est définie comme étant un système de contrôle et de production de connaissances non contradictoires. On y distingue trois types issus de trois modes d'évaluation de la non-contradiction : la rationalité pragmatique, la rationalité empirique et la rationalité théorique. Ces différents types de rationalités caractérisent des niveaux d'accès aux savoirs complexes, cohérents avec les différents niveaux du milieu : 1) la rationalité *pragmatique* repose sur une appréhension première du réel, sur l'évidence immédiate et sur l'efficacité dans l'action ; 2) la rationalité *empirique* se décompose en deux sous types - *inductiviste* qui repose sur la recherche de généralités pour fonder des lois au travers de collections de cas et d'arguments leur donnant une plausibilité, et *réfutationniste* où une théorie n'est jamais vraie mais seulement non réfutée, et fausse quand elle est réfutée ; 3) la rationalité *théorique* recherche la vérité apodictique à partir de définitions, d'axiomes et de propriétés prouvées dans ce système. Le modèle de rationalités ne suppose pas un ordre particulier d'accès aux différents niveaux du savoir. L'évolution dans les apprentissages est alors analysée du point de vue des passages d'un type de rationalité à un autre, dits transitions de rationalités. L'étude a priori et a posteriori des conditions de réalisation de ces transitions de rationalités permet divers usages de ce modèle, notamment comme modèle de conception d'ingénieries mais aussi comme modèle exploratoire de phénomènes didactiques, soit tel que nous l'exploitons dans cette recherche.

Dans notre cas, la définition de la limite est déjà connue par le public visé, la situation d'expérimentation n'est donc pas fondamentale : son rôle essentiel est celui de déclencher des questions encourageant une réflexion profonde sur la signification de cette notion plutôt que de faire apparaître cette notion comme réponse optimale. Comme mentionné plus haut, une rationalité est non susceptible de produire des connaissances contradictoires, elle est intrinsèquement stable. Cependant, lors du déroulement de la situation expérimentale, l'actant rationnel peut rencontrer un conflit de rationalité, c'est-à-dire prendre conscience d'une contradiction. Ce sont précisément ces conflits de rationalités, au sein d'une même rationalité (conflits intra-rationalité) ou bien entre deux rationalités distinctes (conflits inter-rationalités), qui déstabilisent l'actant rationnel et sont sources de transitions de rationalités. Ces transitions marquent alors une transformation des connaissances car elles impliquent l'exigence de conformité à un autre système de contrôle, et donc à une autre rationalité.

Trois caractéristiques essentielles définissent une rationalité : le mode d'existence des objets en jeu (objet défini, objet préconstruit, etc.), le type de logique (instanciation, causalité, logique classique, etc.), et le mode de validation (abduction, induction, déduction, argumentation, vérification, etc.). Ainsi, la stabilité d'une rationalité est assurée par une cohérence, du point de vue de la non-contradiction, des valeurs spécifiques prises par ces caractéristiques (Tableau 1). L'évolution du raisonnement peut être alors analysé en termes d'une évolution des rationalités qui rend compte de l'évolution de l'activité mathématique dans ses principaux aspects (définir, valider, « logiciser »).

	Pragmatique	**Empirique**		**Théorique**
Principe	**Action**	**Inductivisme**	**Réfutationisme**	**Théorie**
Existence des objets	Matérielle- Définition en acte	Définition intermédiaire	Définition en construction	Définition mathématique
Validation	Preuve en acte - Evidence perceptive - Vérification	Induction - Abduction - Argumentation	Contre-exemple Réfutation	Démonstration déductive
Logique	Instanciation	Causalité- Logique naturelle, classique	Logique classique	Logique classique

***Tableau 1** – Caractéristiques des différents types de rationalités*

A titre d'exemple, dans le cadre de notre recherche, les individus participant à l'expérimentation sont supposés disposer de connaissances théoriques concernant la notion de limite. Ils connaissent sa définition formelle, ont les moyens de démontrer la convergence, et savent a priori mobiliser la logique classique et ses outils (quantificateurs, négation, implication, etc.). Ils ont en outre de nombreuses connaissances sur les suites classiques et leurs convergences. Si on leur propose une situation qui désigne explicitement ces connaissances, ils devraient s'y référer sans difficulté. C'est pourquoi, nous choisissons une situation concrète dans laquelle ces connaissances jouent un rôle clef mais ne sont pas explicitement désignées. Dans ce cas, il est possible que des connaissances beaucoup plus « archaïques » réapparaissent. Par exemple, il est possible que la convergence soit beaucoup plus associée à un phénomène matériel (définition matérielle) ou à une conception dynamique (convergence perçue selon un mouvement) qu'à une définition mathématique, ou bien qu'une définition en acte soit utilisée, autrement-dit que l'objet questionné apparaisse dans le discours comme allant de soi, sans être vraiment défini. On pourra voir alors apparaître des preuves en actes, reposant donc sur l'évidence perceptive et sur une logique d'instanciation sur des cas particuliers. Tout cela relèverait d'une rationalité pragmatique. On pourra aussi avoir recours à une rationalité empirique inductiviste qui repose surtout sur l'évidence liée à la répétition des phénomènes et sur des définitions qui restent encore en construction. Ces différentes manières d'appréhender des phénomènes liés à l'infini, conçues dans une rationalité naturalisant l'infini en faisant référence à des évidences perceptives ou bien dans une rationalité qui cherche des lois générales dans la répétition des phénomènes, ou encore dans une rationalité qui formalise cet infini dans la définition de limite, peuvent conduire à des contradictions lorsqu'elles sont confrontées. Ces contradictions devraient alors produire des doutes, des remises en cause, qui sont les symptômes de conflits de rationalités, et provoquer des transitions de rationalités.

Afin de rendre effective l'expression de ces connaissances, faire prendre conscience de ces contradictions et aboutir à des tentatives de résolutions, le type de situation mathématique proposée et le respect du rôle spécifique du médiateur sont essentiels. Dans le cadre du modèle de rationalité, cette situation est contrôlée par deux critères : 1) elle doit être porteuse des significations fondamentales d'un savoir, c'est-à-dire des significations principales issues d'une analyse épistémologique concernant ce savoir ; 2) elle doit être accessible rationnellement, autrement dit chacun doit pouvoir ébaucher une pensée rationnelle à son sujet et donc mobiliser des connaissances adaptées (selon le niveau de rationalité adopté). Le rôle du médiateur est alors de permettre l'expression de ces connaissances et leurs confrontations. Il ne donne pas son avis sur ces connaissances mais va mettre en relief celles qui portent des significations fondamentales du savoir concerné et ont la potentialité de déclencher des conflits de rationalités et provoquer des transitions de rationalités. Théoriquement, son rôle ne va pas jusqu'à imposer lui-même des transitions de rationalités, ce que l'on nommera effet de contrat de rationalités, car celles-ci seraient artificielles et ne témoigneraient plus d'une rationalité propre de l'individu. Si dans le cadre d'une expérimentation exploratoire (ce qui est le cas de cette recherche), ces effets de contrat de rationalités sont exclus dans la mesure où ils sont ainsi de nature à invalider les connaissances exprimées, dans le cadre d'une ingénierie, la pression de la finalité d'apprentissage peut contraindre le médiateur à des effets de contrat de rationalités.

II. METHODOLOGIE DE LA RECHERCHE

1. *Contexte de l'expérimentation*

Cette recherche pose la question de la manifestation de phénomènes liés à l'infini dans un contexte social où le public, ayant suivi un cursus académique avancé en mathématiques, est confronté à une situation sur la notion de limite qui est déconnectée du cadre de l'Ecole et qui répond à au moins deux objectifs : 1) susciter des réflexions sur le calcul de grandeurs finies en utilisant des processus infinis ; 2) favoriser le travail des individus dans diverses rationalités et à travers divers aspects de l'activité mathématique. La situation que nous mobilisons dans cet article appelée « balle rebondissante » a fait l'objet de plusieurs expérimentations durant plusieurs années auprès de divers publics dont des enseignants de mathématiques du cycle secondaire. Dans chacune de ces expérimentations, le premier auteur de cet article joue le rôle de médiateur, il présente la situation, lance le débat et intervient occasionnellement pour encourager le public à continuer d'échanger sur leurs idées et à essayer de se convaincre mutuellement. Ses interventions sont dictées par la nécessité de recueillir un maximum de données susceptibles de faire avancer les analyses selon la problématique fixée. La durée moyenne des expérimentations est d'une heure, ce qui est suffisamment long pour que chaque public puisse s'engager profondément dans le débat. Les expérimentations sont enregistrées, certaines sont transcrites. Le script que nous étudions ici est réalisé avec un public comportant vingt-et-un docteurs et doctorants en sciences lors d'une manifestation scientifique à laquelle ils participaient durant l'été 2015. Cette expérimentation a été accompagnée de débats consistants du point de vue de l'objectif de recherche que nous lui avons assigné.

2. *Analyse a priori de la situation de la balle rebondissante*

Le calcul de grandeurs finies à partir de processus infinis constitue potentiellement un terrain idéal pour construire une situation qui permette d'interroger les connaissances réelles liées au traitement de l'infini et des infinitésimaux dans des contextes où le calcul de ces grandeurs renvoie à la convergence de suites ou de séries. En effet, dans une telle situation, surtout si elle est déconnectée du contexte institutionnel, deux types d'infinis peuvent être en jeu : infini potentiel quand le processus est appréhendé dans sa dimension constructive lorsque la situation n'est pas d'emblée mathématisée, et infini actuel quand le processus est appréhendé comme une globalité. La notion de limite finie en l'infini illustre cette articulation entre infini appréhendé comme potentiel, le processus est considéré comme n'ayant pas de fin, et infini actuel, on obtient une grandeur finie. Mais une telle situation devra aussi permettre d'analyser le travail du public, de permettre de le comprendre, en particulier dans son évolution. Elle devra donc favoriser le travail des individus dans diverses rationalités et à travers divers aspects de l'activité mathématique, autrement dit laisser un accès ouvert à la mobilisation de toute rationalité pour entrer dans un problème relatif au traitement de l'infini. La situation de la balle rebondissante correspond à l'un des paradoxes de Zénon d'Elée, elle a déjà fait l'objet d'autres études dans la littérature, notamment par Mamona-Downs (2001) qui l'a utilisée comme source de premières intuitions et compréhensions de la notion de limite.

Conformément aux objectifs que nous lui avons assignés, la question posée ici ne doit pas expliciter la nature des grandeurs en jeu afin de laisser davantage de possibilités d'accès au problème, mais également laisser la possibilité de réponses contradictoires et de confrontations de points de vue en fonction des choix de ces grandeurs. C'est pourquoi nous avons ouvert le questionnement de la manière suivante : une balle rebondit systématiquement exactement à la moitié de sa hauteur de chute ; quand on lâche cette balle d'une hauteur non nulle, s'arrête-t-elle de rebondir ? L'étude de cette question renvoie à l'étude d'une question implicite qui est au cœur de notre problématique : dans quelle mesure une balle peut-elle s'arrêter de rebondir alors qu'elle rebondit une infinité de fois ? Plus précisément, la question posée devrait déclencher des discussions qui porteront dans un premier temps sur le caractère physique (ou concret) du phénomène, puis progressivement vont s'enrichir de considérations mathématiques en modélisant le phénomène avec des suites indexées par le nombre de rebonds. Ceci suppose qu'à un moment du débat, il a été décidé de se placer dans un modèle mathématique où : 1) la balle devient un point qui a un mouvement rectiligne de hauteur chaque fois divisée exactement par deux (suite géométrique de raison *0.5*), dans tous les cas ce mouvement correspond à un phénomène amorti dû aux frottements ou à toute autre raison ; 2) le déplacement de ce point est attesté par la continuité des grandeurs (l'espace et le temps), qui sont divisibles à l'infini, et le nombre de rebonds est un moyen de matérialiser ce découpage.

A côté du nombre de rebonds (n), nous distinguons trois grandeurs susceptibles d'être prises en compte dans la modélisation du phénomène, donnant lieu chacune à une suite distincte (on suppose ici que la hauteur initiale de la balle est égale à 1) : la hauteur du rebond ($H_n = (0.5)^n$), la longueur parcourue par la balle depuis le lâcher ($L_n = 2(1-(0.5)^n)$), la durée des rebonds[4] depuis le lâcher ($T_n = T_0 + 2T_0 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$), où T_0est la durée de la première chute et T_n calculé selon les lois de la gravité universelle ; nous n'avons pas la place dans cet article d'établir cette formule). Dans cette situation, la modélisation mathématique du phénomène est basée sur les règles théoriques de la physique qui en relèvent. Ces règles fondent en partie la rationalité théorique, cette dernière ne peut donc pas se limiter aux aspects mathématiques du problème. Cette coexistence théorique peut se résumer en quatre points :1) choix de la grandeur physique à évaluer, 2) modélisation mathématique de cette grandeur, 3) résolution du modèle et 4) interprétation du résultat. Du point de vue des caractéristiques des rationalités, les deux premiers points renvoient au type de définition choisi tandis que les deux

4 Cf http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/rebonds.html

derniers relèvent des types de validation et de logique utilisés. Théoriquement, au moins trois grandeurs peuvent être invoquées pour répondre à la question : H_n, L_n, T_n à partir des modélisations par les suites données précédemment. Dans ces conditions, le calcul de la limite de la suite considérée permet de conclure que la balle s'arrête. On pourrait par ailleurs s'attendre à l'émergence de conflits intra-rationalité au sein de cette rationalité théorique dès qu'on évoque la cohérence intrinsèque des résultats obtenus avec la question du temps, dans le cas où les suites utilisées sont $H_n et L_n$. Cette question pointe l'enjeu de la coexistence mathématiques/physique au sein de la rationalité théorique, et ne peut être éludée à moins d'avoir les connaissances de physiques requises pour la modéliser.

On pourrait, entres autres, s'interroger sur la possibilité que la durée totale des rebonds soit infinie : peut-on dire alors que la balle s'arrête ? Nous parions sur ces cas potentiels de contradictions au sein de la rationalité théorique pour transiter vers un travail d'exploration empirique, voire pragmatique, des phénomènes physiques, où le temps a une signification plus tangible et où les balles ont indéniablement l'habitude de s'arrêter. Dans les rationalités pragmatique et empirique, nous attendons surtout des définitions en acte ou matérielles, qui pourront être précisées à travers les arguments mobilisés pour valider les réponses ; le travail dans ces rationalités permet de mettre en évidence des questionnements sur la nature de l'infini, notamment s'il est question d'évaluer le mouvement de la balle à partir du nombre de rebonds qui, lui, est infini. La présence de ces contradictions induit la recherche d'une stabilité autre qu'empirique ou pragmatique, donc d'un retour vers le théorique. Nous soutenons que ceci ne peut être accompli sans que la signification donnée à l'infini et aux infinitésimaux ne soit appréhendée à travers la définition de limite. Autrement dit, pour échapper aux paradoxes associés au découpage infini d'une grandeur finie, il est essentiel de relier, dans la définition formelle de la limite, les nombres ε-N aux infinitésimaux-infini. Si la limite existe et n'est pas explicite (ce cas pourrait se présenter notamment en l'absence de modélisation qui débouche sur une prise de décision), alors l'axiome d'Archimède autorise le développement d'un raisonnement à ε-près « *fondé sur un critère d'égalité entre nombres par la petitesse arbitraire de leur écart, et avec l'analogue pour les inégalités* » (Rogalski, 2016, p.135). Cette démarche est en général tronquée par le physicien qui se suffit à des résultats approximatifs et choisit un epsilon a priori en invoquant un domaine de non pertinence des longueurs infinitésimales (Cf. Burn, 2005, pour plus de détails sur les assises mathématiques de cette démarche).

Nous synthétisons dans ce qui suit les diverses formes et éléments de la caractéristique *type de validation* selon les rationalités : 1) rationalité pragmatique (« ça se voit » ; « elle devient immobile » ; « on ne peut pas le voir mais la balle continue », etc.) ; 2) rationalité empirique (« mon expérience » ; « chaque fois que je lance » ; « ça n'existe pas une balle qui rebondit exactement » ; etc.) ; 3) rationalité théorique (calculs ; majoration ; théorie de la gravité ; etc.). Pour ce qui est du type de logique, la situation peut surtout faire apparaître des éléments concernant la quantification universelle et sa négation dans les différents niveaux de rationalités, c'est-à-dire sous forme naturalisée en rationalité pragmatique avec des expressions telles que « à chaque fois », et des formes plus formalisées en rationalité théorique.

3. *Description des données*

Parmi les vingt-et-un participants, treize prennent la parole pendant l'expérimentation. Le médiateur tient sa neutralité et conduit les participants à discuter les termes du problème selon toutes les rationalités. L'arrêt de la balle n'est jamais défini explicitement, mais les validations utilisées montrent l'éventail des rationalités mobilisées pour le mode d'existence des objets : certains se fondent sur le nombre de rebonds, d'autres font référence à leur expérience des balles et enfin d'autres encore envisagent le temps de rebond. La longueur parcourue par la balle n'est pas du tout mobilisée, ni la limite de la suite des hauteurs de rebonds pour conclure sur l'arrêt. Comme prévu, les contradictions liées à un nombre infini de rebonds et à une durée totale des rebonds possiblement finie, provoquent des doutes et des conflits de rationalités mais peu de transitions de rationalités. Dans les résultats, nous ne reviendrons pas sur ce que l'analyse des transcriptions a montré comme étant conforme à l'analyse a priori, nous nous focalisons plutôt sur ce qui n'était pas prévu et qui nous a permis d'avancer dans le cadre de notre problématique. Nos résultats mettront en évidence les causes de stagnation dans les niveaux de rationalités, ce qui empêche, par exemple, la durée des rebonds d'être adoptée comme un critère décisif.

III. RESULTATS

Trois résultats fondamentaux émergent à l'issue de l'analyse de la situation expérimentale : 1) la difficulté d'investir la rationalité théorique pour résoudre un paradoxe sur l'infini et les infinitésimaux dont la notion de limite est la clef ; 2) la neutralité du médiateur n'est pas suffisante pour définir son rôle ; 3) le besoin de revenir sur la question du raisonnement à epsilon près pour introduire les phénomènes impliquant la limite. Nous exposons dans ce qui suit certains éléments révélateurs de chacun de ces résultats.

1. Le défi de la rationalité théorique pour la notion de limite

Contrairement à ce qui a été prévu, nous assistons essentiellement à une stagnation dans les rationalités pragmatiques et empiriques. Les participants ont soit mobilisé leur expérience des balles réelles, soit tablé sur le nombre infini de rebonds. Et même lorsque les suites modélisant l'espace et le temps, indexées par ce nombre de rebonds, sont évoquées, leurs limites ne sont pas identifiées comme décisives pour le problème posé :

> [>R1] : Du coup la réponse est non (elle ne s'arrête pas). Du coup la distance sol-bas de la balle diminue à chaque fois donc on a la distance qui tend vers zéro mais qui ne fait jamais zéro à chaque fois.

Dans cette intervention, l'infini évoqué dans une rationalité pragmatique (appelé infini potentiel dans certains travaux) freine l'exploitation de la limite de la suite des hauteurs, pourtant justement calculée, pour avancer dans la résolution du problème donné. Ceci s'applique aussi à la suite modélisant le temps de rebonds :

> [>R2] : Oui mais ce que je dis c'est qu'il y a infinité de rebonds, ça ne me dit pas que ça va rebondir pendant une infinité de temps, parce que je sais que je peux additionner une infinité d'intervalles de temps, si ces intervalles de temps sont deux fois plus petits que le précédent, je sais qu'il y a un temps que je ne vais jamais dépasser, et peut-être qu'elle va rebondir une infinité de fois dans un laps de temps fini...théoriquement...dans le modèle théorique...

> [>R12] : Le temps peut avoir une limite ?? C'est à dire ne pas dépasser une certaine valeur mais continuer à croître tout le temps ??? Non ? Je ne suis pas certaine de bien comprendre : le temps peut ne pas dépasser une certaine valeur mais ça peut quand même toujours augmenter ?

L'intervention de R2, pourtant révélatrice des potentialités théoriques de l'infini, ne trouve pas consensus et demeure sans suite :

> [>R1]: Du coup tout le ...c'est des jeux sur les termes, parce que moi l'ambiguïté elle est sûr de s'arrêter parce que ce que tu dis c'est que quelque part elle ne s'arrête jamais de rebondir mais à un moment elle a arrêté de rebondir.

> [>R7]: C'est ça qui est exceptionnel...

> [>R1]: Alors moi je ne sais pas comment c'est possible... (Rires)

Dans ce passage, on voit que la notion de découpage infini d'une grandeur finie, qui, à travers le choix de epsilon, est au cœur de la définition formelle, n’est pas disponible pour rendre rationnel l’argument de R2 aux yeux de R1 ou de R7. La persistance, au niveau du groupe, de la conviction d’une balle qui ne s’arrête pas, après l’explication de R2, laisse penser qu’elle n’est pas disponible non plus au niveau collectif. D’ailleurs R2 en doute lui-même :

> [>R2]: Je n'ai pas dit que j'étais complètement cohérent... (Rires)

Le besoin de retourner sur la signification de la définition formelle de convergence semble absent. Cette définition, supposée largement investie par les participants, porte en elle à travers les différentes valeurs d’epsilon le sens des restes infinitésimaux dans le calcul d’une grandeur finie découpée à l’infini auxquels renvoient le choix de N et des rangs qui lui sont supérieurs. Le paradoxe de Xénon d’Elée, dans sa version modifiée via la balle rebondissante, n’est pas résolu par le public expérimenté en dépit de la disponibilité présumée de l’arsenal de savoirs qui faisait défaut à l’époque de sa formulation. On ne peut donc prétendre mettre en œuvre l’objet limite à travers la rationalité théorique lorsque l’infini, étroitement lié à sa raison intrinsèque, est abordé dans une toute autre rationalité.

2. Le rôle du médiateur

Le médiateur initie un échange fourni des participants en observant une stricte neutralité, il se contente le plus souvent de reformuler les propos et demande un complément d’explication lorsque cela est nécessaire. Mais cette neutralité le prive de mettre en relief les arguments qui correspondent particulièrement à la problématique de l’infini, et de souligner les désaccords. Par exemple, lorsque R7 met en évidence un paradoxe, le médiateur n’en profite pas pour renforcer le conflit apparent :

> [>R7]: Ah non moi j’ai répondu par rapport à la formulation de la question. C’est par rapport à mes conceptions si la balle...je sais que la balle va s’arrêter...Si je tiens compte de mon expérience personnelle je sais que la balle va s’arrêter. Mais eu égard à la formulation de la question, la balle, elle ne s’arrêtera pas.
>
> [>Le médiateur]: Donc tu dis: avec ton expérience, ça s’arrête...
>
> [>R7]: Voilà...

La stimulation du débat autour des enjeux forts de la situation, dans ce cas de figure liés à la notion de limite et d’infini, et la mise en évidence de contradictions permettent de centrer davantage le débat afin de déclencher un questionnement sur les notions fondamentales en jeu au niveau de la rationalité théorique. Cela pose évidemment deux difficultés au médiateur : identifier instantanément l’importance des arguments par rapport à la problématique alors que ceux-ci n’arrivent jamais dans l’ordre ni la forme prévue, et parvenir à contraster les arguments sans pour autant recourir aux effets de contrats. Cette expérimentation montre qu’en dépit du principe d’autonomie, souligné par le modèle des rationalités, dans les interactions intra-groupe des participants, la dimension socioculturelle que ce modèle porte s’incarne aussi à travers la posture méta du médiateur et sa capacité à s’en saisir en temps réel.

3. La définition formelle de limite

Deux critères importants ont été pris en considération pour la mise en place de cette expérimentation : 1) les participants doivent être avancés en mathématiques (docteurs ou doctorants es-sciences), 2) le choix de la situation doit tabler sur la construction de grandeurs finies à partir d’une infinité de calculs, une signification fondamentale de la limite qui est étroitement liée à l’axiome d’Archimède. La réalisation effective a montré un manque au niveau des connaissances de l’analyse réelle liées à la formalisation via la définition en ε-N de l'adage infini-infinitésimaux au niveau de la rationalité théorique. Or ces connaissances correspondent précisément au raisonnement à ε-près qui distingue l'analyse de l'algèbre par la manière dont elle fonde l'égalité à partir d'une infinité d'inégalités. Conduire les étudiants à mobiliser des raisonnements en epsilon même lorsque ceux-ci ne sont pas explicitement désignés, leur permettre de mobiliser une rationalité théorique dès lors que la dialectique infini/fini est questionnée, constitue manifestement un défi encore actuel pour l'enseignement.

CONCLUSION

L'usage du modèle des rationalités pour investiguer le problème posé par cette recherche a d'abord permis de mettre en évidence ses potentialités à rendre compte des phénomènes de conceptualisation des objets mathématiques, dans ce cas celui de la limite, à travers les rationalités. Plus précisément, le paradoxe, lié au calcul de grandeurs finies divisibles à l'infini, que devrait résoudre le concept de limite, n'est pas résolu. Le modèle utilisé a montré que ce qui a entravé la résolution de ce paradoxe provient de la difficulté à mobiliser dans la rationalité théorique ce qui est au cœur de la formalisation de la limite : la signification mixant infinitésimaux et infini. Les résultats de l'expérimentation nous ont de plus incité à réinterroger les fondements théoriques du modèle et ont conduit à la nécessité de préciser davantage d'abord le rôle du médiateur à travers l'identification a priori de ce qui est à sa charge et qui relève du méta, ainsi que le rapport qu'on pourrait établir en termes de rationalités entre le champ des mathématiques et celui de la physique par le biais de la modélisation mathématique des phénomènes physiques. Le modèle des rationalités permet de penser ce rapport et la possibilité de faire coexister ces deux champs scientifiques à travers tous les types de rationalités. Enfin, les résultats de cette recherche soulignent le besoin de repenser l'introduction de la limite en prenant en compte le rôle d'epsilon, non seulement du point de vue formel, mais fondamentalement comme un moyen d'établir un pont entre les enjeux théoriques de la définition de limite et l'idée essentielle qui induit la forme que cette définition a aujourd'hui. Ceci ne peut être fait sans qu'un questionnement approfondi sur l'essence du raisonnement à epsilon près en analyse ne soit posé à travers une démarche qui, tout en préservant l'édifice mathématique, concilie l'analyse réelle et ses applications.

REFERENCES

Bloch, I. (2005) *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques*. Note de synthèse à l'Habilitation à Diriger des Recherches. Paris : Université Paris-Diderot - Paris VII.

Brousseau, G. (1998b) *Théorie des situations didactiques : didactique des mathématiques 1970-1990*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Burn, B. (2005) The Vice: Some Historically Inspired and Proof-Generated Steps to Limits of Sequences. *Educational Studies in Mathematics* 60(3), 269-295.

Lecorre, T. (2016) *Des conditions de conception d'une ingénierie relative à la définition de limite – Un cadre basé sur un modèle de rationalité*. Thèse de doctorat. Grenoble : Université Grenoble-Alpes.

Mamona-Downs, J. (2001) Letting the intuitive bear on the formal; a didactical approach for the understanding of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics* 48, 259–288.

Przenioslo, M. (2004) Images of the limit of function formed in the course of mathematical studies at the university. *Educational Studies in Mathematics* 55(1/3), 103-132.

Robert, A. (1982). L'acquisition de la notion de convergence des suites numériques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 3, 307–341.

Rogalski, M. (2016). Revenir au sens de la notion de limite par certains de ses raisons d'être. In Nardi et al. (Eds.), *Proceedings of the First Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* (INDRUM 2016) (pp. 133-143). Montpellier: Université de Montpellier & INDRUM.