MODELISATION MATHEMATIQUE DE PROBLEMES EXTRAMATHEMATIQUES AU LYCEE
VERS UNE PRAXEOLOGIE CONSISTANTE DE LA MODELISATION

PIERRE-FRANÇOIS BURGERMEISTER
DiMaGe, Université de Genève
pierre.burgermeister@edu.ge.ch

Résumé. Après avoir précisé la notion de modélisation critique, nous examinons, à travers un exemple de problème d'astronomie classique, comment il est possible, sur certaines situations concrètes employées en cours de mathématiques, de transformer une simple « illustration » destinée à mettre en scène et motiver le travail des techniques mathématiques enseignées, en un problème beaucoup plus consistant comprenant, outre le travail des techniques en question, des enjeux forts liés à l'apprentissage de compétence de modélisation par les élèves.

Mots-clés Modèle mathématique, modélisation critique, schéma herbartien, posture hypothético-déductive.

1. Problématique : une pratique exceptionnelle

Les situations extramathématiques apparaissant dans l'enseignement des mathématiques tel qu'il est habituellement organisé au sein de l'école secondaire genevoise[1] d'aujourd'hui s'apparentent essentiellement à des mises en scènes destinées à motiver le travail des techniques mathématiques enseignées, lesquelles ne sont d'ailleurs pas toujours explicitement motivées par les problèmes (intra ou extramathématiques) qu'elles permettent de résoudre. A l'inverse, un travail de modélisation mathématique consistant, dans lequel plusieurs modèles mathématiques possibles sont recherchés, mis en concurrence et discutés en vue de répondre à une question extramathématique explicite, reste une pratique exceptionnelle dans une institution qui affiche pourtant la volonté de la développer si l'on se réfère aux instructions officielles.

Nous nous proposons dans cette communication d'examiner et de discuter des exemples d'énoncés de problèmes scolaires présentés dans deux versions, l'une plutôt classique et l'autre nécessitant un véritable travail de modélisation, correspondant respectivement à ces deux types de pratiques. Il s'agit de problèmes d'astronomie (*a priori* extramathématiques) dont la résolution est liée à certains savoirs géométriques élémentaires étudiés dans l'enseignement secondaire des mathématiques. Nous comptons compléter cette analyse par des expérimentations dans des classes genevoises du secondaire de façon à pouvoir présenter quelques observations lors du colloque.

La section suivante précise notre définition de la "modélisation critique", en correspondance avec une organisation de l'étude suivant un "schéma herbartien". La section 3 présente et discute les deux versions de chaque problème en mettant en évidence à chaque fois l'absence ou la présence d'enjeux de modélisation critique. Et nous indiquons, dans une conclusion ouverte vers les expérimentations à suivre, les questions essentielles que soulèvent selon nous cette proposition.

[1] Cette communication s'enracine dans le contexte de l'école secondaire genevoise, mais les remarques qui suivent concernant les pratiques enseignantes usuelles gardent probablement toute leur pertinence dans bien d'autres contextes géographiques.

2. Cadrage théorique : la modélisation critique

2.1. Modélisation mathématique

Les tâches de modélisation mathématique prennent une importance croissante dans notre société. C'est ainsi par exemple que les *modèles climatiques* ont acquis une notoriété médiatique de premier ordre depuis que le phénomène du réchauffement climatique est devenu un enjeu sociétal majeur. Le météorologue Kandel (2002) montre que l'importance urgente et l'immense complexité de ce problème soulèvent avec acuité un défi nouveau : celui de la nécessité de rendre intelligible à des non-spécialistes – décideurs politiques en particulier, mais aussi, en dernier recours, ensemble des électeurs – les questions soulevées par la confrontation des différents modèles d'évolution du climat, questions dont la compréhension est nécessaire au moment de prendre des décisions politiques particulièrement lourdes de conséquences.

Dans le même ouvrage, Bouleau (2002) s'appuie sur quelques exemples, comme celui de la gestion du trafic automobile dans une agglomération ou celui du génie des matériaux, pour montrer la complexité croissante du travail de modélisation qui incombe à l'ingénieur :

> « Le développement prodigieux de l'informatique dans la seconde moitié du 20e siècle a apporté des modifications sociales plus profondes que celles, rabâchées, des facilités de communication, du rôle de l'image et du renforcement du pouvoir des médias. Elle a changé les rapports entre la science et la vie de la cité, et transmué le métier d'ingénieur. L'ingénieur n'est plus, comme au 19e siècle, celui qui sait. (…) Son action ne descend plus d'un savoir théorique vers une réalité soumise, elle remonte et fait émerger une configuration plus riche, plus complexe et plus vivifiante qu'une simple instanciation de règles générales. (…). Les *modèles* qu'il élabore sont donc des représentations partisanes, je dirais au bon sens du terme, c'est-à-dire le choix d'un meilleur parti au sein des possibilités d'expression multiples. » (op. cité, p 111)

Après avoir ainsi constaté ce nouveau rôle de l'ingénieur, Bouleau dénonce l'absence de formation idoine dans le système éducatif français actuel en incriminant en particulier les cloisonnements disciplinaires et la *culture de la certitude* qui y règnent :

> « Le métier de modélisation, quoique passionnant, n'est pas enseigné en tant que tel. Les professeurs, scientifiques, poussent en permanence les contenus disciplinaires. Seule la charge hebdomadaire des étudiants vient limiter leurs ambitions, de sorte que ceux-ci n'ont jamais le temps de s'exercer à utiliser comme langage les savoirs rencontrés. Dans aucune des quelque 200 formations d'ingénieurs en France n'est pratiquée véritablement à ce jour *la modélisation concurrente*. (…) On continue à former des spécialistes empreints de certitudes, alors que l'enjeu est de savoir dialoguer. Pourquoi cette crainte d'installer le doute dans l'esprit d'un élève ingénieur ? Peur confuse des nihilistes et des anarchistes issue du 19e siècle ? Nous formons des petits soldats de la connaissance alors qu'on a besoin de traducteurs, d'interprètes, de grammairiens des symboles scientifiques, d'artistes concepteurs de représentations, afin de s'attacher non pas tant à faire prévaloir la vérité mais à faire que des situations collectives complexes enfantent des solutions[2]. » (*ibid*., pp. 118-119, c'est nous qui soulignons)

Dans le cadre des cours de mathématiques de l'école secondaire, la distinction entre un enseignement *des modèles* mathématiques et un enseignement *de la modélisatio*n a été pointée depuis longtemps par Chevallard (1989a). Il observait alors que l'organisation de réelles activités de modélisation dans les cours de mathématiques se heurte à une contrainte relevant du niveau de l'institution scolaire, celle du cloisonnement disciplinaire des savoirs :

[2] Il est intéressant de rapprocher ce passage d'une remarque de Chevallard à propos du manque de reconnaissance sociale des activités de modélisation de l'ingénieur : « (…) la fabrication sociale de modèles aussi bien que leur mise en œuvre dans des pratiques sociales spécifiques sont des faits socialement "cachés''. Hormis en ce qui concerne les "grands modèles'' (ceux de la physique, etc.), les pratiques correspondantes manquent en général de dignité scientifique et (donc) sociale, puisque ce sont le plus souvent des ingénieurs, des techniciens ou des chercheurs non mathématiciens (…) qui en sont les agents » (Chevallard, 1989a, p. 147).

Dans tous les cas cependant, il y a une propension à enseigner des modèles – éléments de savoir bien définis et dont l'enseignement peut donc faire l'objet d'une négociation sociale explicite –, plutôt que "la modélisation'', activité plus floue, sur laquelle le contrôle social et administratif manque de prise. (…) bien qu'acceptable dans son principe, cette activité, se référant nécessairement à une réalité extramathématique, pose problème aux mathématiciens, dans la mesure où elle introduit donc *du non-mathématique dans un enseignement de mathématique*. En fait, il y a là une difficulté qui n'est pas liée à l'humeur des mathématiciens (elle est ressentie aussi bien par les enseignants et par les élèves), mais, plus profondément, à l'état du champ scolaire du savoir et à son découpage entre les disciplines enseignées. (p.147, c'est l'auteur qui souligne)

Que recouvre au juste le terme de modélisation ? Chevallard nous donne une première réponse dans un autre texte de la même année (1989b) :

« Le processus de modélisation comporte, schématiquement, trois étapes.

1. On définit le système que l'on entend étudier, en en précisant les « aspects » pertinents par rapport à l'étude que l'on veut faire de ce système, soit l'ensemble des variables par lesquelles on le découpe dans le domaine de réalité où il nous apparaît. (…)

2. On construit alors le modèle à proprement parler en établissant un certain nombre de relations, *R*, *R'*, *R''*, etc., entre les variables prises en compte dans la première étape, le modèle du système à étudier étant l'ensemble de ces relations.

3. On « travaille » le modèle ainsi obtenu, dans le but de produire des connaissances relatives au système étudié, connaissances qui prennent la forme de nouvelles relations entre les variables du système. » p. 53)

Tenons-nous en pour l'instant à cette première définition qui sera bientôt complétée. Le processus de modélisation ainsi défini, il reste à préciser comment il pourrait être mis en œuvre dans les classes, c'est-à-dire comment l'étude devrait y être organisée pour rendre ce processus viable.

2.2. Organisation de l'étude

Chevallard a introduit le « schéma herbartien » pour symboliser le travail praxéologique effectué par une « communauté d'étude » X, encadrée par un « groupe d'aides à l'étude » Y (réduite à un professeur y dans le cadre scolaire usuel de la classe) en vue de répondre à une question Q :

$$(S(X, Y, Q) \to R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, ..., R_n^\lozenge, O_{n+1}, ..., O_m) \to R^*.$$

La recherche d'une réponse R^* (qui est apparentée à une praxéologie) à la question Q s'appuie sur les réponses institutionnellement acceptées – $R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, ..., R_n^\lozenge$ – lesquelles se trouvent dans les œuvres $O_{n+1}, \dots, O_m$.

La démarche ainsi décrite suppose que l'examen et la comparaison des réponses $R^\lozenge$ ne sont pas joués à l'avance, la communauté d'étude ne disposant pas *a priori* d'une réponse considérée comme *la* bonne réponse en vertu de considérations sortant du domaine de la rationalité scientifique (dans la classe de mathématiques ordinaire, de telles considérations, par exemple de type contractuel, ne manquent pas). Cependant, dans les contextes didactiques usuels de l'école, l'organisation de l'étude tend à se réduire à un « recopiage culturel » non critique, c'est-à-dire à l'enseignement par le professeur y de la bonne réponse R^*, sans que la recherche et la confrontation de différentes réponses $R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, ..., R_n^\lozenge$ n'ait été entreprise, voire sans même qu'une question Q n'ait été posée. Le schéma de cette organisation réduite est alors le suivant : $S(X, y, Q) \to R^*$, voire $S(X, y) \to R^*$.

Le type de tâches qui nous intéresse ici consiste à chercher et confronter les modèles mathématiques pertinents pour explorer une question extramathématique et y proposer une réponse la mieux appropriée possible. Dans ce contexte, le "schéma herbartien" exposé ci-dessus nous semble pouvoir caractériser une organisation didactique de "modélisation concurrente", pour reprendre l'expression de Bouleau, à condition de considérer comme œuvres O_{n+1}, … , O_m les différents modèles mathématiques possibles[3] qu'il s'agit de comparer sur le plan de leur adéquation au système extramathématique étudié et sur celui de la pertinence des réponses $R_1^\lozenge, R_2^\lozenge, ..., R_n^\lozenge$ que ces modèles apportent à la question Q.

Toujours en suivant Chevallard (2001), nous pouvons alors distinguer *cinq temps* dans l'étude de la question Q lorsqu'elle se déroule conformément au « schéma herbartien » :

> « observation de réponses $R^\lozenge$ déposées dans les œuvres ; analyse, expérimentale et théorique, des réponses $R^\lozenge$; évaluation de ces mêmes réponses $R^\lozenge$; développement d'une réponse R^* ; enfin défense et illustration de la réponse R^* ainsi produite. »

2.3. Modélisation critique

Nous pouvons maintenant décrire, en enrichissant la première définition de la modélisation donnée plus haut, ce que nous intitulerons *processus de modélisation critique*. Ce processus, qui correspond au "schéma herbartien" d'une étude visant à répondre à une question Q, doit comprendre les six étapes suivantes :

1. On définit le système que l'on entend étudier, en en précisant les aspects pertinents par rapport à la question Q, soit l'ensemble des variables pertinentes par lesquelles on le découpe dans le domaine de réalité où il nous apparait.
2. On recherche alors des modèles M_1, M_2, ... , M_n, chacun de ces modèles étant fondé sur certaines hypothèses complémentaires (à définir), puis construit en établissant un certain nombre de relations entre les variables prises en compte dans la première étape, un modèle du système à étudier étant constitué d'un ensemble de telles relations.
3. On cherche les réponses R_1, R_2, ... , R_n que les modèles M_1, M_2, ... , M_n fournissent à la question Q.
4. On analyse comparativement l'adéquation de ces modèles au système étudié et la pertinence des réponses obtenues.
5. On développe une réponse R^* (qui pourra s'appuyer soit sur un des modèles examinés soit sur une synthèse de différents modèles).
6. On défend le choix du modèle proposé et la réponse obtenue.

Les six étapes du processus de modélisation critique.

L'étude réalisée en suivant ce processus peut alors se schématiser ainsi :

$$(S(X, Y, Q) \rightarrow R_1, R_2, ..., R_n, M_1, M_2 ..., M_n) \rightarrow R^*.$$

Dans le cadre de la classe de mathématique usuelle, (où le groupe d'aide à l'étude Y se réduit au professeur y), une telle organisation de l'étude est-elle viable ? Et d'abord, comment modifier les pratiques usuelles pour lui donner une chance de se développer ?

[3] Si les modèles mathématiques *a priori* possibles sont considérés comme des *outils de travail* à disposition de la communauté d'étude, il nous semble raisonnable de les ranger dans la catégorie des *œuvres* ; les *réponses* étant quant à elles les produits du travail effectués à l'aide des différents modèles .

Nous proposons dans la section suivante certaines modifications à apporter à des énoncés de problèmes scolaires plus ou moins classiques, au schémas d'étude réduits, dans l'intention de fournir des éléments de réponse à ces questions. Il s'agit là de la première étape d'une démarche plus large d'étude de problèmes scolaires à contextes extramathématiques afin de déterminer dans quelle mesure il serait possible de les modifier de façon à intégrer de véritables enjeux de modélisation dans les tâches dévolues aux élèves.

3. Un problème ancien pour une pratique enseignante renouvelée

Dans cette section nous nous inspirons des résolutions données dans l'antiquité grecque à un problème astronomique élémentaire : la mesure de la circonférence de la terre par Eratosthène. Nous mettons en regard deux traitements scolaires possibles de cette situation dans l'enseignement secondaire des mathématiques : un traitement de type classique développant une organisation mathématique réduite, et une proposition de traitement didactique visant à organiser l'étude selon le "schéma herbartien" ci-dessus, c'est-à-dire en y incluant une perspective de modélisation critique.

C'est autour de 225 avant JC qu'Eratosthène de Cyrène aurait entreprit de mesurer la circonférence de la terre (Aujac, 2001). Il partait des données suivantes :

D1 : Syène (actuellement Assouan) et Alexandrie, où il vivait, sont situées sur le même méridien (ce qui est exact à environ 2° près) à 5000 stades de distance (un stade = 300 coudées royales d'Egypte = 157,5 mètres) ;

D2 : au jour du solstice d'été, à midi, le soleil se trouve exactement au zénith à Syène ;

D3 : au même moment les rayons du soleil font à Alexandrie un angle de 1/50 cercle avec la verticale du lieu.

Partant de ces données, et en ajoutant les deux hypothèses suivantes :

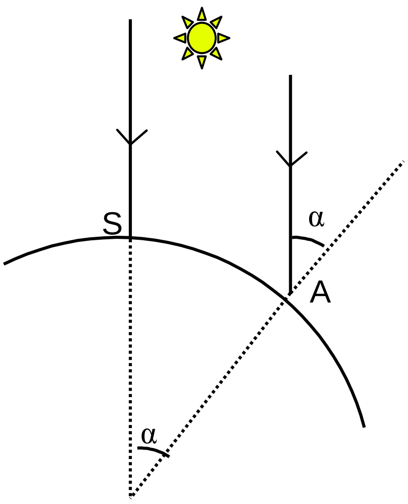
H1 : La terre a la forme d'une sphère ;

H2 : les rayons du soleil tombent tous parallèlement sur n'importe quel point de cette sphère,

il calcula que la circonférence de la terre est de 250'000 stades (39'375 km).

Le raisonnement d'Erastothène s'appuyait, en conformité avec les hypothèses H1 et H2, sur le modèle schématisé ci-contre.

Lorsque cette situation est traitée en classe de mathématiques, c'est usuellement sous cette forme, c'est-à-dire en incluant H1 et H2 parmi les données du problème. L'organisation de l'étude est alors ramenée à sa forme réduite, $S(X, y, Q) \rightarrow R^{*}$, puisqu'elle induit, toute erreur de raisonnement mise à part, un unique modèle possible, conduisant à une unique réponse acceptable.



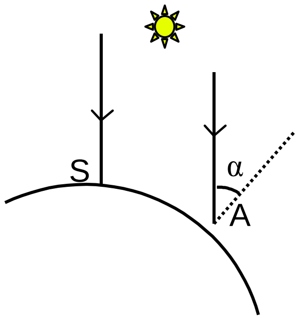
Plus précisément, le problème posé aux élèves peut se formuler de la manière suivante :

Problème 1

Au 3e siècle avant notre Ère, Eratosthène de Cyrène a réussi à calculer la circonférence de la terre avec une remarquable précision.

Il savait que la terre a la forme d'une sphère et que les rayons du soleil tombent tous parallèlement sur n'importe quel point de cette sphère.

Il savait aussi que les villes de Syène (actuellement Assouan) et d'Alexandrie sont situées sur le même méridien terrestre à 5000 stades* de distance l'une de l'autre.



Or, il avait remarqué que, le jour du solstice d'été à midi, le soleil se trouve exactement au zénith à Syène mais que ce n'est pas le cas à Alexandrie. Il mesura alors à l'aide d'un gnomon, le jour du solstice d'été à midi, l'angle α que les rayons du soleil font avec la verticale à Alexandrie. Et il trouva que cet angle équivaut à un cinquantième de cercle.

En utilisant les données ci-dessus, calculer la circonférence de la terre.

* : un stade est une unité de longueur utilisée à l'époque d'Eratosthène qui correspond à 157,5 mètres.

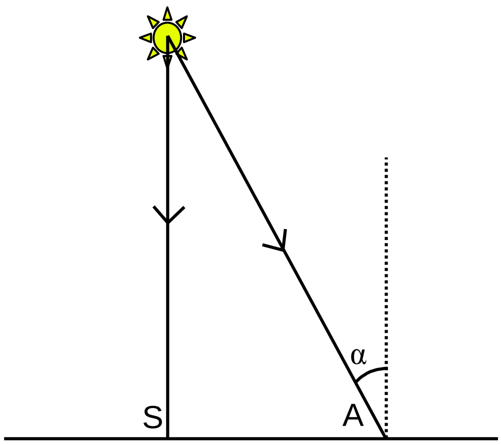
Dans ce cas de figure, la tâche dévolue aux élèves se caractérise essentiellement par un travail des techniques à disposition (angles correspondants, calcul d'une quatrième proportionnelle). Selon qu'un croquis soit fourni avec le texte du problème ou non, et selon le contenu de ce croquis, les élèves ont en outre sous leur responsabilité le travail consistant à repérer que l'angle α se retrouve au centre de la terre entre les prolongements du rayon tombant au point S et de la verticale au point A. Mais il n'y a pas lieu d'identifier une grandeur pouvant être déduite des données (l'inconnue apparait explicitement dans l'énoncé) ni d'analyser comparativement différents modèles et différentes réponses également possibles.

Parmi les 6 étapes du processus de modélisation critique définie plus haut, seule la troisième (recherche de la réponse correspondant au modèle donné) est parcourue. Le travail est donc purement intramathématique ; la tâche n'inclut aucun aspect de modélisation.

Il existe cependant un second modèle permettant de rendre compte des données D1 à D3 et de les interpréter tout autrement (voir le schéma ci-contre). Il suffit pour cela de remplacer H1 et H2 par :

H1' : La terre est plate ;

H2' : Les rayons du soleil tombent sous des angles différents en différents points de la terre.



Le travail dans ce second modèle conduirait à déterminer, non plus la circonférence de la terre, mais la distance la séparant du soleil.

La prise en compte de cette interprétation alternative ouvre alors la possibilité d'un traitement en classe très différent du premier, un traitement "modélisant". Dans ce cas, le problème posé aux élèves pourrait se formuler ainsi :

> **Problème 2**
> Au 3^e siècle avant notre Ère, Eratosthène de Cyrène s'intéressait à l'astronomie : il voulait en particulier déterminer la forme et les dimensions de la Terre ainsi que la distance qui la sépare du soleil.
>
> Il avait remarqué que, le jour du solstice d'été à midi, le soleil se trouve exactement au zénith à Syène mais que ce n'est pas le cas à Alexandrie. Il mesura alors à l'aide d'un gnomon, le jour du solstice d'été à midi, l'angle que les rayons du soleil font avec la verticale à Alexandrie. Et il trouva que cet angle équivaut à un cinquantième de cercle.
>
> Or, il savait que les villes de Syène (actuellement Assouan) et d'Alexandrie sont situées sur le même méridien terrestre à 5000 stades de distance l'une de l'autre (un stade correspond à 157,5 mètres).
>
> <u>Question 1</u> : Comment Eratosthène pouvait-il interpréter cette observation et que pouvait-il en déduire ? Imaginer plusieurs interprétations possibles en illustrant chacune par un croquis et calculer dans chaque cas les grandeurs qui peuvent se déduire.
>
> <u>Question 2</u> : A la place d'Eratosthène, quelle interprétation auriez-vous choisie et pourquoi ?

La tâche ici dévolue aux élèves consiste à construire les deux modèles possibles (2ème étape du processus de modélisation critique) et à les travailler (3ème étape), puis à les discuter : sont-ils bien compatibles avec les données ? Eratosthène pouvait-il disposer d'autres données lui permettant de trancher ? (4ème étape). Il s'agit alors de prendre parti pour l'un des deux modèles (5ème étape), en se fondant non pas sur les connaissances communes (les élèves actuels savent généralement que la terre est ronde) mais sur celles dont pouvait vraisemblablement disposer Eratosthène (observé depuis le rivage, un bateau qui s'éloigne vers le large semble s'enfoncer dans l'eau ; certains voyageurs ont observé loin au Sud des constellations qui n'apparaissent pas à Alexandrie ; etc.). Finalement, il reste à développer une argumentation permettant de défendre scientifiquement le choix effectué (6ème étape).

Seule la première étape de notre processus de modélisation critique a été en partie court-circuitée, les données pertinentes pour la construction des modèles étant explicitement fournies dans l'énoncé du problème 2. Cependant, la tâche liée à la 5ème étape se rapproche de celle correspondant à la première : il s'agit dans les deux cas de déterminer des données pertinentes pour la recherche en cours.

Par rapport au problème 1 discuté plus haut, la résolution du problème 2 s'enrichit donc de tous les aspects spécifiquement liés à la modélisation critique. Mais nous relevons que ces nouveaux aspects ne se substituent pas aux aspects plus techniques (et intramathématiques) puisque la tâche de cette deuxième version inclut comme sous-tâche celle de la première version (travail du modèle sphérique).

La réponse à la question 2 du problème 2 nécessite d'autre part une mise à distance des connaissances communes (la terre est sphérique). Elle présuppose ainsi la capacité de mettre à l'épreuve du raisonnement des hypothèses dont le statut de vérité usuel est volontairement ignoré *a priori*. Cette capacité, essentielle pour rentrer dans la démarche hypothéticodéductive fondatrice du raisonnement mathématique (voir par exemple Duval, 1991), pourrait selon nous trouver dans le type de problèmes que nous proposons un terrain propice à son développement. Il reste cependant à imaginer une organisation didactique capable d'amener les élèves à entrer dans ce jeu. Et nos premières expérimentations, que nous allons maintenant brièvement évoquer, nous font pressentir que ce défi est de taille.

4. Premières expérimentations : un écart de posture

Dans les semaines qui ont précèdé le colloque, nous avons eu l'occasion de réaliser deux expérimentations informelles de notre problème 2 – dans des formulations proches de celle exposée ici – auprès d'élèves du collège de Genève (secondaire supérieur). Pour ce faire, nous avons soumis aux enseignants concernés une version légèrement allégée de la section 3 de ce texte (les références au processus de modélisation critique décrit en section 2 ayant été retirées) en leur proposant, si le problème leur paraissait pouvoir s'inscrire dans le travail qu'ils menaient avec leurs élèves, de l'adapter à la manière qui leur convenait, puis de nous inviter à observer dans leur classe la séance qu'ils y consacreraient.

Nous avons ainsi pu suivre une séance de deux périodes dans une classe d'IDS (introduction à la démarche scientifique) de 1ère année (élèves de 15-16 ans) dont l'enseignant était physicien de formation, et une séance de deux périodes dans une classe de mathématique niveau fort de 2ième année (élèves de 16-17 ans). Les deux enseignants étaient très expérimentés (plus de 10 ans de pratique).

Sans entrer dans les détails, la méthodologie de recherche étant trop informelle pour permettre de recueillir des observations fines, nous donnons ci-dessous les constats saillants qui ont émergé de ces deux séances.

Du côté des deux enseignants d'abord : avant la séance, tous deux avaient exprimé des doutes quant à la valeur de la situation proposée, le problème leur paraissant « trop ouvert » pour que leurs élèves puissent l'attaquer de manière autonome. Ils ont néanmoins joué le jeu que nous leur proposions, c'est-à-dire celui de l'ouverture à la modélisation concurrente, en soumettant à leurs élèves une version très proche de notre problème 2. Et ils se sont déclarés « surpris en bien », après la séance, par la capacité de leurs élèves à entrer dans cette démarche.

Deux remarques du côté des élèves maintenant : il nous est premièrement apparu que le modèle « Terre sphérique, soleil très éloigné » était beaucoup plus mal-aisé à mettre en oeuvre que nous ne l'avions anticipé, l'hypothèse simplificatrice « rayons du soleil parallèles » n'ayant jamais émergé parmi les élèves ou groupes d'élèves en recherche.

La deuxième remarque concerne la démarche de modélisation critique de manière plus globale. Selon notre conception, cette démarche passe par la formulation d'hypothèses de travail (2ième étape de notre schématisation en 6 étapes), puis par le travail des modèles correspondants aux différentes hypothèses (étape 3), sans émettre à ce stade de jugement de validité. Ensuite seulement vient l'analyse comparative et le choix d'une réponse jugée appropriée (étape 4 et 5). Or, les élèves observés ont tous adopté une démarche finalement très différente, même si des modèles distincts ont été élaborés ou esquissés. Ils ont – pour la plupart – commencé à résoudre le problème dans un modèle « Terre plate, soleil proche », mais sans conférer à ce modèle un statut hypothétique. Au contraire, ils ont travaillé selon ce qui leur semblait être, à ce premier moment de leur recherche, LA bonne voie pour traiter la situation. Puis, après avoir travaillé dans ce modèle implicite et déduit un calcul de la distance Terre-Soleil, ils ont trouvé cette distance beaucoup trop petite (en fonction de leurs connaissances antérieures sur le système solaire) et ont en conséquence réfuté ce premier modèle. Et ils se sont alors tourné vers un modèle alternatif, en essayant de prendre en compte la sphéricité de la Terre.

La pratique de la modélisation critique telle que nous l'avons définie correspond à une posture hypothético-déductive : *Je ne sais pas si mes hypothèses de départ sont conformes à la* *vérité mais je fais comme si c'était le cas et j'explore le terrain où ces hypothèses m'entrainent*. Or il nous semble, au vu de ces premières expérimentations, que cette posture est probablement très peu familière aux élèves des classes observées, leur posture habituelle consistant plutôt à ne construire des raisonnements que sur des fondements qu'ils assument comme vrais sans fondamentalement les interroger.

5. En conclusion : des questions en suspens

Nous avons cherché à montrer, à travers l'exemple de la mesure de la Terre par Eratosthène, comment il pourrait être possible, sur certaines situations concrètes employées en cours de mathématiques, de transformer une simple « illustration » destinée à mettre en scène et motiver le travail des techniques mathématiques enseignées, en une activité beaucoup plus large comprenant, outre le travail des techniques en question, des enjeux liés à l'apprentissage de toutes les compétences de modélisation critique par les élèves.

A ce stade, cependant, cet essai soulève beaucoup plus de questions qu'il n'apporte de réponses. Il convient en effet de déterminer dans quelle mesure et selon quelles modalités il est possible de faire entrer les élèves, sous les contraintes usuelles du cours de mathématiques, dans une telle démarche. Puis à savoir à quelles conditions les enseignants de mathématiques seraient, pour leur part, prêts à jouer ce jeu. En vue de pouvoir apporter des éléments de réponse à ces questions, nous comptons développer de manière plus systématique, dans des classes du Collège genevois, l'étude expérimentale déjà ébauchée.

Bibliographie

AUJAC, G. (2001) *Eratosthène de Cyrène, le pionnier de la géographie*, Paris : Éditions du CTHS.

ASSUDE, T. (1996) De l'écologie et de l'économie d'un système didactique : une étude de cas, *Recherche en didactique des mathématiques* **16/1**, 47-70.

BOULEAU, N. (2002) La modélisation et les sciences de l'ingénieur, *In* NOUVEL, P. *Enquête sur le concept de modèle*, Paris : PUF, 101-119.

CHEVALLARD, Y. (1989a) *Arithmétique, algèbre, modélisation, étapes d'une recherche*, Publication de l'IREM d'Aix-Marseille.

CHEVALLARD, Y. (1989b) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au Collège, 2ème partie, perspectives curriculaires : la notion de modélisation, *Petit x* **19**, 43-72.

CHEVALLARD, Y. (1999) L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherche en didactique des mathématiques* **19/2**, 221-266.

CHEVALLARD, Y. (2001) *Les TPE comme problème didactique*, communication au séminaire national de didactique des mathématiques.

COULANGE, L. (1998) Les problèmes "concrets'' à "mettre en équation'' dans l'enseignement, *Petit x* **47**, 33-58.

Duval, R. (1991) Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration, *Educational Studies in Mathematics*, 22/3, 233-261.

GUILLAUME, D. (2008) *Astronomie et mécanique céleste*, Unité Formation-Enseignement de l'Observatoire de Paris : http://media4.obspm.fr/public/AMC/

KANDEL, R. (2002) Les modèles météorologiques et climatiques, *In* NOUVEL, P. *Enquête sur le concept de modèle*, Paris : PUF, 67-98.

PIERRE-FRANÇOIS BURGERMEISTER
DiMaGe, Université de Genève
pierre.burgermeister@edu.ge.ch