L'ADAPTATION DES SIGNES ET TECHNIQUES DANS LA TRANSITION SECONDAIRE/SUPÉRIEUR

La modélisation est-elle une aide ? Analyse des difficultés des étudiants

BLOCH* Isabelle

Résumé – Au début de l'enseignement supérieur, le statut des objets mathématiques et les outils de validation se trouvent profondément bouleversés. Nous avions étudié ce basculement épistémologique selon le statut des variables macro-didactiques de cette transition ; avec un outil d'analyse des signes et des milieux, nous analysons la production de solutions d'étudiants de licence sur le traitement d'une courbe paramétrée dans un problème de mouvement. Nous montrons que le fait d'avoir recours à une modélisation physique ne suffit pas à aider les étudiants dans leur appréhension du problème.

Mots-clefs : statut des concepts, outils du travail mathématique, signes et milieux dans un problème de modélisation.

Abstract – At the beginning of University studies, the status of mathematical objects and validation tools experience great changes. We had previously studies this epistemological shift according to the status of the macro-didactic variables of this transition. Using an analysis tool of signs and milieu, we analyse undergraduate students' productions in a problem concerning a parametric curve in a movement problem. We show that the modelling of a physical situation reveals to be ineffective in helping students to solve the problem.

Keywords: status of the concepts, tools of mathematical work, signs and milieu in a modelling problem.

I. INTRODUCTION

Dans Bloch (2012) nous avions pointé les principales variables macro-didactiques dans la transition secondaire/supérieur. Dans la poursuite de nos recherches sur la façon dont les étudiants se saisissent des situations proposées en licence, nous avons enquêté sur de nouvelles questions : à l'UPPA[1] une unité d'enseignement de licence tente d'articuler mathématiques et physique et se nomme 'Mathématiques du mouvement'. Cette articulation permet-elle aux étudiants de mieux saisir les outils mathématiques en jeu ? Tenter de contextualiser les connaissances mathématiques dans des situations relatives à la mécanique des corps permet-il aux étudiants de mieux comprendre les savoirs sous-jacents ? Et cette contextualisation s'avère-t-elle effective dans le cours proposé ?

En effet, à ce niveau certains concepts mathématiques subissent une transformation telle que leur statut et leur mode de fonctionnement s'en trouvent complètement bouleversés. Dans la transition secondaire/supérieur, ce décalage épistémologique est accentué par la configuration actuelle des contenus des programmes du secondaire : nous avons montré (Bloch, 2018) que les objets y sont étudiés de façon descriptive et non relativement à leur nécessité et leur rôle d'outil dans la construction de situations mathématiques ; c'est aussi le cas pour la fonction exponentielle par exemple, ou les équations différentielles. De plus, les procédures de résolution visées au supérieur sont beaucoup plus complexes et peuvent faire appel à des techniques de divers champs mathématiques ; les étudiants doivent identifier ces changements de cadres de façon autonome et savoir s'extraire du champ initial, ainsi que nous l'avions exposé dans Bloch & Gibel (2016).

Dans ce texte nous rappelons d'abord les variables macro-didactiques identifiées et le changement massif de leurs valeurs à l'entrée à l'université ; nous en donnons quelques

* Lab-E3D, Université de Bordeaux – France – isabelle.bloch@u-bordeaux.fr

[1] Université de Pau et des Pays de l'Adour.

exemples. Nous explicitons ensuite le modèle d'analyse permettant d'identifier le niveau de conceptualisation auquel les étudiants parviennent dans la résolution d'un problème. Enfin nous appliquons ce modèle à la résolution par des étudiants en fin de première année de Licence d'un problème de courbe paramétrée, et nous regardons si le contexte « mécanique du mouvement » les aide à concevoir la courbe attendue.

II. LES VARIABLES MACRO-DIDACTIQUES DE LA TRANSITION

1. Les variables et leur fonction

Le travail de Ghedamsi (2008) a mis en évidence des variables macro-didactiques dans la transition lycée/université, relativement à une organisation globale de l'enseignement (et non une situation locale d'enseignement d'un nouveau savoir). Pour analyser la dimension locale, nous utiliserons le modèle de signes et milieux que nous avons introduit (Bloch & Gibel, 2011, nous donnons des précisions au §III ci-dessous). Remarquons que ce modèle de variables macro-didactiques permet de voir la nature épistémologique de l'enseignement donné, au niveau secondaire ou universitaire, et l'adéquation du travail des étudiants aux spécificités de ce niveau.

Les variables finalement retenues sont au nombre de onze ; les six premières variables (VD0 à VD5) concernent le statut des savoirs ; les variables VD6 à VD10 s'attachent à mesurer la façon dont les savoirs interviennent dans les pratiques mathématiques institutionnelles.

	Secondaire	***Début de Université***
Nature des objets		
0. Introduction d'un concept	Métaphore	Définition
1. Degré de formalisation	Faible	Elevé
2. Registre de validation	Algèbre	Analyse
3. Degré de généralisation	Aucun	Elevé
4. Introduction de notions nouvelles	Importante (*sans* outils spécifiques de validation)	Importante (*avec* des outils de validation)
5. Type de tâches	Algorithmes, graphiques	Démonstration
Travail mathématique		
6. Choix des techniques	Transparent, une seule technique en jeu	Amalgame de techniques
7. Degré d'autonomie sollicité	Routines	Peu de routine
8. Identification d'une notion	Processus	Objet
9. Conversions entre registres	Algébrique/Graphique – un seul registre indiqué dans la tâche	Alg/Analytique – et appel autonome à différents registres
10. Statut des énoncés d'exercices	Application, instanciation	Théorème, énoncé général

Tableau 1 *– Variables macro-didactiques*

La première variable VD0 définit le mode d'introduction des notions : ainsi la notion de continuité est introduite en fin de secondaire par des représentations graphiques et un appel à l'intuition, de même par exemple que le théorème des accroissements finis (comment doit se comporter la fonction pour que l'on soit sûr que la valeur zéro est atteinte ?).

Les autres variables de 1 à 5 quantifient les modalités sous lesquelles apparaissent les objets mathématiques, et les variables suivantes de 6 à 10 visent à paramétrer la façon dont les notions sont travaillées en classe, du point de vue des techniques, de l'autonomie requise des étudiants, et de leur degré de responsabilité dans le savoir.

On peut considérer que ces variables décrivent de façon pertinente les modifications des praxéologies entre les institutions secondaire et supérieur ; même si ce cadre d'analyse est également applicable dans d'autres contextes, le fait de le coupler avec le modèle des signes et des milieux (explicité ci-dessous) permet de bien cibler les connaissances des étudiants. Remarquons que nos constatations sur les décalages entre le secondaire et le supérieur rejoignent les observations de Bosch, Fonseca et Gascon (2004). Vandebrouck (2011) a aussi pointé le saut existant entre l'étude des fonctions au secondaire et à l'université : les élèves du secondaire ne savent manipuler que des fonctions définies par une formule algébrique, et manquent d'outils pour traiter d'autres fonctions – exponentielles, logarithmes, fonctions trigonométriques même – qui exigent d'autres méthodes, par exemple des encadrements et approximations. Il s'ensuit également que les étudiants ne prennent que peu en compte le fait que l'étude des fonctions implique des calculs et raisonnements à différents niveaux, soit ponctuel, global, local, ce dernier point de vue étant celui qui se trouve le moins investi. De ce fait l'étude locale des tangentes, notamment, est un exercice nouveau pour les étudiants.

On peut aussi remarquer que l'absence quasi systématique de validation formelle au secondaire rend les étudiants peu aptes à envisager ces validations dans des problèmes plus complexes ; ils se bornent donc à tenter une solution dans un modèle iconique[2], que l'on pourrait par exemple se représenter comme : « J'ai rencontré des fonctions de tel type (croissante, continue, etc.) donc je vais répondre en référence à ces exemples ».

2. *Exemples de décalage entre le secondaire et le supérieur : les réponses 'iconiques'*

Dans Bloch (2012) nous avions ainsi donné l'exemple d'une question sur la continuité. Un professeur en classe préparatoire demande l'étude de la fonction définie par :

Si $x \neq 0$, $f(x) = \frac{|x|}{x}\sqrt{|x|}$, *et* $f(0) = 0$

Sont demandés sa continuité, son sens de variations, et une fonction réciproque. Les étudiants considèrent majoritairement que *f* est définie en zéro donc continue en zéro (contrat didactique de l'enseignement secondaire). De plus la formule donnant la fonction pose manifestement problème à certains étudiants : si $x > 0$, les étudiants pensent que $f(x)$ est égal à $\sqrt{x}$, mais si $x < 0$, ils l'écrivent $-\sqrt{x}$. Pour ces étudiants, comme l'exprime l'un d'eux : "$|x|$ ça ne peut pas être $-x$". Le professeur rectifie en $-\sqrt{-x}$ mais manifestement certains des étudiants utilisent encore le signe 'moins' arithmétique : 'moins' signifiant 'négatif' et non 'opposé'. Les étudiants pensent ensuite que *f* est continue en zéro car sûrement dérivable, si bien que le professeur est amené à prendre position sur le fait qu'une fonction de ce type n'est pas, ou du moins pas de façon certaine, dérivable. Il s'agit là encore d'une réponse que l'on peut qualifier d'iconique : l'étudiant a déjà vu des fonctions dérivables et donc continues…

Le professeur propose en tant qu'aide de regarder la question suivante : on demande de montrer que la fonction est monotone sur $\mathbb{R}$. Des étudiants annoncent alors que *f* est décroissante sur $]-\infty, 0[$, car $x \longmapsto -x$ est décroissante et racine carrée croissante ; à quoi le professeur répond que c'est ennuyeux, car, vue la formulation de la question, *f* doit être

[2] Iconique est utilisé au sens de la sémiotique de Peirce (voir Bloch & Gibel 2011), i.e. c'est une réponse qui réfère à une image, ici par exemple une représentation graphique de fonction continue et dérivable.

monotone, et *f* est croissante sur]0, +∞[! Le professeur aura beaucoup de mal à dévoluer la question de la continuité de *f* en zéro. Les étudiants affirment ensuite que, si une fonction est continue sur une réunion d'intervalles, alors elle est continue sur l'intervalle entier… Les icônes de fonctions rencontrées au secondaire ne comportaient pas de discontinuités ! Dans le bref extrait qui est ici présenté, on peut faire l'hypothèse que le professeur chemine vers la résolution de son exercice par réfutations successives de propositions incorrectes basées sur les conceptions antérieures des étudiants, et contre lesquelles il peine à construire un milieu efficace, qui amorcerait une modification du statut des objets.

Les étudiants montrent ici une conception « iconique algébrique » de la continuité, conception liée à leur perception des fonctions comme ne présentant pas d'« accidents de parcours ». Rappelons que l'interprétation iconique des signes mathématiques est celle qui se borne à considérer une image – ici une image de fonction continue rencontrée dans l'enseignement secondaire, comme une parabole par exemple. L'étudiant qui privilégie cette façon de raisonner ne construit pas de nouveau savoir en lien avec les ostensifs, il se réfère à des connaissances antérieures inappropriées.

On peut aussi voir dans cet épisode un passage délicat de la pensée algébrique à la pensée analytique, avec également une remise en jeu problématique des connaissances sur les nombres (Bloch 2018).

III. OUTILS D'ANALYSE DES PRODUCTIONS D'ETUDIANTS SELON LES SIGNES ET LES MILIEUX

Face à ces enjeux, nous utilisons le modèle décrit dans Bloch & Gibel (2011) pour mieux analyser ces difficultés, et pour proposer des outils – des situations – permettant de faire accéder les étudiants aux techniques et technologies du supérieur.

	Milieu M-2	**Milieu M-1**	**Milieu M0**
Fonctions des raisonnements	R1.1 SEM - Intuition sur un dessin - Décision de calcul - Moyen heuristique - Exhibition d'un exemple ou d'un contre-exemple	R1.2 SYNT/SEM - Calculs génériques - Formulation de conjectures étayées - Décision sur un objet math.	R1.3 SYNT - Formalisation des preuves dans la théorie mathématique requise (avec aide du professeur éventuellement)
Niveaux d'utilisation des symboles	R2.1 SEM Icônes ou indices dépendant du contexte (schémas, intuitions…)	R2.2 SYNT/SEM Arguments 'locaux' ou génériques : indices, calculs	R2.3 SYNT Arguments formels spécifiques
Niveau d'actualisation du répertoire	R3.1 SYNT/SEM - Utilisation ponctuelle de connaissances anciennes - Enrichissement au niveau heuristique : calculs, conjectures ponctuelles	R3.2 SYNT/SEM Enrichissement au niveau argumentaire : - des énoncés - du système organisateur	R3.3 SYNT - Formalisation des preuves - Ostensifs organisés - Intégration des éléments théoriques
Nature du raisonnement	Abductif Inductif, Déductif	Inductif Déductif	Déductif

***Tableau 2** – Le modèle milieux/répertoire/symboles*

Afin de pouvoir analyser les dimensions locales du travail des étudiants (utilisation de techniques appropriées et maîtrise de ces outils, recours à des connaissances d'autres domaines, accès au savoir formalisé, etc.), nous avons produit ce modèle, qui permet de situer le travail observé à un niveau de milieu adapté, en analysant les signes produits par les étudiants et leur adéquation à la preuve cherchée. Le modèle a été complété par Lalaude-Labayle (2016), qui a ajouté au tableau initial une ligne sur le mode de raisonnement : abductif, inductif ou déductif. Rappelons que SYNT signifie ‘syntaxique’ et SEM ‘sémantique’. On peut voir dans le tableau la cohérence des milieux, des signes et des raisonnements : ainsi un raisonnement uniquement intuitif, dans M-2, sera associé à des signes iconiques et des calculs ponctuels, ainsi qu'à un raisonnement par exemple inductif ; lorsque l'étudiant progresse dans la validation, il utilisera des signes plus génériques (des formules générales vérifiées par exemple) et son raisonnement se rapprochera du déductif.

Dans des situations qui ne sont pas nécessairement adidactiques, ou seulement partiellement, il est fondamental de savoir si les concepts en jeu ont été compris, sont accessibles, et si les signes les représentant sont acquis – ou si les étudiants sont restés au niveau iconique, comme exemplifié pour les fonctions et la continuité dans l’extrait de la section I. Ainsi que nous le disions dans Bloch (2016) :

> Les signes mathématiques sont utilisés avec des règles qui peuvent être nouvelles pour les étudiants car cela comporte un protocole strict de validité ; et ils vont donc prendre, à ce niveau, une importance considérable. Une difficulté majeure de l'apprentissage des mathématiques au niveau supérieur est la traduction du *sens* des propriétés, théorèmes… en énoncés formels, autrement dit, l'articulation sémantique/syntaxique, comme cela a été pointé dans les travaux notamment de Barrier (2008). Il s’ensuit que la transformation inverse – partir d’un énoncé formel et l’associer aux objets concernés – pose aussi fortement problème.

L’articulation des dimensions syntaxique et sémantique est essentielle pour la conceptualisation des objets mathématiques, et elle est trop rarement prise en compte, notamment dans l’enseignement supérieur. Les enseignants de l’université de Pau ont tenté d’introduire cette dimension sémantique par un lien entre problèmes de mouvement – en mécanique donc – et le cours sur les équations différentielles et courbes paramétrées. Nous pouvons noter que Rogalski (2008) prône aussi ce rapprochement afin de faire travailler sur le sens des objets en jeu. Notre questionnement porte sur l’efficacité de ce dispositif, via l’analyse de productions d’étudiants.

IV. LA MODELISATION DE SITUATIONS DE MOUVEMENT, UNE AIDE POUR COMPRENDRE LES COURBES PARAMETREES ?

La licence de mathématiques à l’UPPA comporte en 2014, 2015 et 2016 une unité d’enseignement de Licence 1 intitulée : *Mathématiques du mouvement*. Le programme de cette unité inclut les équations différentielles, les courbes paramétrées, et de façon générale, des connaissances sur les fonctions, les dérivées, les intégrales, les séries… appliquées à des problèmes de modélisation du mouvement, avec une variable t supposée représenter le temps.

1. Le cours "Mathématiques du mouvement"

Le cours introduit les notions de coordonnées polaires et coordonnées sphériques, puis les notions cinématiques fondamentales : vitesse, mouvement rectiligne, mouvement plan, mouvement central. Les sujets traités sont ensuite les courbes paramétrées, l'abscisse curviligne, le repère de Frenet. Il est à noter que la notion de repère de Frenet pour étudier les courbes paramétrées a été au moins abordée en physique en Terminale S. Le cours traite ensuite les notions de vitesse et accélération dans le repère de Frenet, les points d'inflexion, les points de rebroussement de 1ère et 2ème espèce. Les points de rebroussement sont notamment caractérisés en fonction de la parité de la première dérivée non nulle[3].

Notons que l'ensemble du cours est très bien structuré, mais deux obstacles nous semblent devoir être pointés ;

- les situations 'réelles' de physique sont peu présentes et il nous semble peu probable que les étudiants soient en mesure de faire le lien avec des situations de mouvement déjà rencontrées, voire avec les concepts de trajectoire, de vitesse, d'accélération, etc.
- les horaires de cette UE de Licence 1 ne laissent que peu de place à la possibilité de mettre les étudiants en situation de recherche de problèmes – ce qui leur permettrait certainement de mieux saisir les concepts en jeu. Le cours comporte d'ailleurs des définitions et théorèmes, mais peu d'exemples d'étude de mouvements dans un contexte de sciences physiques. En nous référant au modèle des variables macro-didactiques, on peut dire que ce cours cible des définitions (VD0), un degré élevé de formalisation (VD1), une introduction formelle de nouvelles notions (VD4) mais propose peu de mise en activité des étudiants sur ces niveaux de variables.

2. Analyse a priori du problème ‘courbe paramétrée’

Une notion importante de ce cours est celle de courbe paramétrée. Une courbe paramétrée fait intervenir deux fonctions $x = f(t)$ et $y = g(t)$ à étudier. Les étudiants doivent comprendre que l’objectif final est de trouver une courbe rendant compte des variations de y par rapport à x, donc de la trajectoire du mobile concerné. Et donc l’étude des fonctions f et g (et le calcul de leurs dérivées) n’est qu’une étape – de type R1.2 en se référant au tableau 2 – pour aboutir à cette courbe. Le tracé de la courbe nécessite cependant de donner des valeurs à t, afin d’être sûr d’avoir la totalité de la trajectoire ; on peut aussi chercher à éliminer t, mais cela risque parfois de ne pas être simple. Il semble, d'après ce que notre lecture du cours final distribué aux étudiants a pu nous révéler, que ce cours n'insiste que peu sur le lien à faire entre courbe paramétrée et trajectoire du mobile. En clair, ceci est laissé en grande partie à la responsabilité des étudiants.

Une difficulté vient aussi de la nature des tangentes : contrairement aux courbes algébriques, les courbes paramétrées peuvent avoir deux tangentes au même point, lequel est dans ce cas un point singulier – or les étudiants n’en ont pas rencontré dans le secondaire. Certes ils ont étudié la fonction valeur absolue, qui a bien deux tangentes au point zéro… mais cette propriété fait rarement l'objet d'une définition spécifique par les professeurs du niveau secondaire.

Ils sont supposés cependant identifier la nature de ce point, par exemple un point de rebroussement. Ceci suppose de constater d’abord que $x'(t) = 0$ et $y'(t) = 0$, puis de calculer les dérivées successives : ceci est du niveau R2.3 ou R3.2 au moins, car cela implique des interprétations spécifiques sur le résultat des calculs et donc le passage à un niveau argumentaire. On peut voir aussi dans cette étape la mise en œuvre des variables macro-didactiques VD4, VD5 et VD6 : introduction de nouvelles notions, avec nécessité de démonstration ; sont aussi sollicitéesVD8 et VD9, avec l’identification des objets et le recours à différents registres de façon autonome.

Nous avons étudié les copies d'un examen de 2014 comportant quatre exercices : deux sur les courbes paramétrées, un sur des coordonnées polaires et un sur une équation différentielle

[3] Pour plus de détails, on peut consulter le site http://serge.mehl.free.fr/anx/Rebroussement.html

linéaire du premier ordre. L'énoncé du premier exercice sur les courbes paramétrées (dont nous donnons ici les résultats) était le suivant :

> Etudier la courbe paramétrée définie par : $x(t) = a\, t^2/(1+t^2)$, $y(t) = a\, t^3/(1+t^2)$ avec $t \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il suffit de l'étudier pour $t \geq 0$; comment obtient-on ensuite la courbe sur $]-\infty, 0[$? Déterminer ses variations et prouver que la courbe possède une asymptote et un point singulier pour $t = 0$. Montrer que l'équation cartésienne de la courbe est $y^2 = x^3/(a - x)$.

Les étudiants devaient donc calculer $x(-t)$ et $y(-t)$ et conclure sur la symétrie ; calculer les dérivées, faire le tableau de variations et ne pas oublier les limites ; il fallait ensuite interpréter ces calculs. La courbe a un point singulier, il faut déterminer ses coordonnées et sa nature (point de rebroussement) : le cours a traité la façon de procéder dans ce cas. L'asymptote peut aussi donner lieu à des erreurs, car quand $t \to +\infty$ alors $x \to a$ et $y \to +\infty$; donc elle est verticale, mais $t \to +\infty$ ce qui peut troubler car, dans le cas d'une courbe algébrique, lorsque la variable tend vers l'infini l'asymptote est horizontale. Ceci met donc en jeu les variables macro-didactiques répertoriées plus haut : VD5, VD6, VD7.

3. *Analyse des productions des étudiants*

Nous avons classé les productions des étudiants par ordre décroissant de réussite de S1 à S14. Les trois premières copies réussissent complètement l'examen (notes de 19 à 20). Sept étudiants ont la moyenne, et les sept dernières productions sont insuffisantes, les notes allant de 8, à 2 pour S14. Ainsi S11 confond le signe de t et ceux de x et y ; la moitié des étudiants ont un problème avec la symétrie et ne savent pas l'identifier ; on observe de nombreuses erreurs de signes dans les calculs, et des erreurs dans le calcul de la dérivée d'une fonction – bien que ceci ait été traité au lycée. Sur les quatorze copies on a le bilan suivant, qui atteste du peu de réussite globale des quatorze étudiants concernés, et du contraste très fort entre les meilleurs étudiants, qui réussissent la majeure partie du problème, et ceux qui ne maîtrisent que très peu les concepts et techniques en jeu :

Dérivées	***Symétrie correcte***	***Asymptote x = a***	***Point singulier***	***Courbe***
Calcul correct 12	7	Limites : 6 $x = a$: 4	Dérivées nulles : 6 Nature : 4	7 - en accord avec la symétrie

Tableau 3 *– Bilan des difficultés des étudiants*

Seule l'étudiante S1 résout complètement l'exercice : elle calcule les dérivées, décode l'aspect de la courbe, trace le graphe avec l'asymptote et détermine le point singulier – ce qui nécessite de calculer $x^{(3)}(t)$ et $y^{(3)}(t)$ pour $t = 0$. S1 atteint le niveau R2.3 : elle formalise les preuves attendues dans la théorie. L'étudiant S14 ne réussit aucun calcul ni conclusion. Cinq autres étudiants rencontrent des difficultés pour calculer les dérivées et interpréter le sens de variations, la symétrie et le point singulier. Un étudiant dit que a doit être un paramètre, mais il ne précise pas de quoi. Une étudiante déclare que l'équation de la courbe doit être $x(t)+y(t)$, où l'on peut voir une difficulté manifeste à envisager qu'une courbe n'a pas *une* équation.

Ainsi nous voyons que même au niveau M-2 (en référence au tableau 2 des milieux et signes), certains étudiants ne se montrent pas aptes à entreprendre les calculs pertinents, ou à les interpréter – car certains ne réalisent pas que le problème n'est pas celui d'une fonction d'une variable. Seulement six étudiants calculent les limites et concluent sur la nature de l'asymptote, atteignant ainsi le niveau R2.2 ; mais parmi ces six, deux écrivent y = a pour l'équation de l'asymptote… Certains étudiants font aussi des erreurs dans le calcul des dérivées et primitives ; de nombreux étudiants sont déstabilisés par la recherche du point singulier et ne réussissent pas à trouver sa tangente. Par exemple S6 essaie de le déterminer en calculant $x(t) = 0$ et $y(t) = 0$ au lieu des dérivées. S2, qui par ailleurs réussit assez bien l'ensemble du devoir, écrit : « si $t = 0$, tout vecteur non colinéaire à la courbe est tangent à la courbe » (?).

V. CONCLUSION

L'étude que nous avons menée dans le cadre de cette Unité d'Enseignement fait donc apparaître de nombreuses difficultés : confusions sur ce qu'est un paramètre, échecs dans la recherche d'une asymptote. Trouver un point singulier et identifier sa nature, et sa ou ses tangentes, se révèle également très problématique, et ceci même si les étudiants maîtrisent le calcul des dérivées successives : certains peinent à appliquer la règle $x'(t)=0$, $y'(t)=0$, et d'autres à se retrouver ensuite dans le calcul des dérivées successives pour trouver la tangente. Nous pouvons voir que certains étudiants calculent correctement (dérivées, limites…) mais ne réussissent pas à interpréter ces calculs, restant bloqués aux niveaux R2.1 ou R2.2. Nous observons aussi les changements de nature – attendus – des variables macro-didactiques dans la transition.

De cette analyse des solutions rendues par les étudiants nous concluons que la référence au mouvement ne semble pas les avoir aidés à comprendre le 'fonctionnement' d'une courbe paramétrée ; nous pensons qu'un travail dans ce cadre peut être productif, mais à la condition d'inclure des allers-retours nombreux entre calculs mathématiques et interprétations dans le modèle physique, et en travaillant les techniques et leur explication de façon plus soutenue. Il serait aussi important que les étudiants aient des moments de recherche sur des situations articulant mathématiques et phénomènes physiques.

Les enseignants de cette UE ont-ils cru qu'une simple évocation du contexte « mouvement » suffirait à aider les étudiants à comprendre les courbes paramétrées, et n'ont-ils pas eu assez de temps pour travailler des techniques qui s'avèrent nouvelles et déstabilisantes pour leurs étudiants ? C'est une hypothèse assez vraisemblable, au vu des résultats. Néanmoins, sur les sept étudiants ayant validé l'UE en question, trois étudiants réussissent très bien l'examen, et deux autres ont une note satisfaisante à l'exercice sur les courbes paramétrées ; on peut penser aussi que des dispositifs d'aide au travail personnel, tels que ceux détaillés par Jaworski (2016), seraient nécessaires pour aider ceux qui en ont le plus besoin. Les considérations développées par Rogalski (2008) nous paraissent également complètement adaptées à ces problèmes de transition. Un dispositif du type de l'unité "Mathématiques du mouvement" pourrait être prometteur du point de vue épistémologique : il consisterait à articuler mathématiques et sciences physiques pour mieux comprendre les mathématiques, mais ne pourrait s'avérer productif qu'avec une analyse didactique préalable, menée rigoureusement, qui établirait les liens précis entre les difficultés mathématiques et la possibilité du contexte physique d'éclairer ces difficultés spécifiques, et de poser la question de *la raison d'être* des savoirs mathématiques. Il faudrait donc inclure dans l'enseignement des situations élaborées dans ce but, et aussi afin de travailler l'articulation sémantique/ syntaxique, articulation qui est l'une des clés de la compréhension des concepts mathématiques en jeu, et à laquelle la physique peut contribuer, par exemple en introduisant l'usage de logiciels permettant de visualiser le mouvement.

Notre travail de recherche s'oriente vers cette construction d'ingénieries. Des propositions existent déjà, voir par exemple la commission université sur le portail des IREM (notamment Brochure limites, 2017, sur les notions d'analyse). Actuellement nous travaillons avec des collègues du département de mathématiques de l'UPPA sur un dispositif méthodologique d'aide aux étudiants de Licence première année, afin d'aider ces étudiants à saisir le sens des concepts mathématiques en jeu dans l'étude des fonctions (continuité, dérivée, intégrale, etc.). L'articulation des concepts avec des situations de physique fait partie de nos pistes de recherche.

REFERENCES

Bloch I. (2012) Rôle et statut des savoirs dans la pratique mathématique : l'exemple d'un basculement épistémologique dans l'enseignement de l'analyse. In J.-L. Dorier & S. Coutat (Eds.) *Enseignement des mathématiques et contrat social : enjeux et défis pour le 21e siècle – Actes du colloque EMF2012* (pp. 392–403). Disponible sur : http://www.emf2012.unige.ch/index.php/actes-emf-2012

Bloch I. (2016) L'enseignement de l'analyse, de la limite a la dérivée et aux équations différentielles : questions épistémologiques et didactiques. In Y. Matheron et al. (Eds.), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques* (67-92). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bloch I. (2018) Connaissances sur les nombres des élèves de fin de secondaire et adaptation à l'université. *Petit x*, 106, 65-77.

Bloch I., & Gibel P. (2011). Un modèle d'analyse des raisonnements dans les situations didactiques: étude des niveaux de preuves dans une situation d'enseignement de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 31*(2), 191-227.

Bloch I., & Gibel P. (2016) A model to analyse the complexity of calculus knowledge at the beginning of University course. In E. Nardi, C. Winsløw & T. Hausberger (Eds.), *Proceedings of the First Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2016)* (pp. 43-52). Montpellier, France: University of Montpellier and INDRUM.

Bosch M., Fonseca C., & Gascon J. (2004) Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 24*(2.3), 205-250.

Brochure limites (2017) : Bloch I., Bridoux S., Durand-Guerrier V., Grenier D., Frétigné P., Mac Aleese J., Madec G., Menini C., Rogalski M., Sénéchaud P., Vandebrouck F. *Limites de suites réelles et de fonctions numériques d'une variable réelle : constats, pistes pour les enseigner*. Commission Inter-IREM Université, IREM de Paris. 160 pages. Documents en ligne sur : www.univ-irem.fr/spip.php?rubrique26

Ghedamsi I. (2008) *Enseignement du début de l'analyse réelle à l'entrée à l'université.* Thèse, Université Bordeaux 2.

Jaworski B. (2016) Supporting students in learning mathematics at University level: practices and issues. *Séminaire ARDM*, Université Paris Diderot. *http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/articles/videos_du_colloquium_cfem-ardm/*

Lalaude-Labayle M. (2016) *L'enseignement de l'algèbre linéaire au niveau universitaire. Analyse didactique et épistémologique.* Thèse, Université de Pau et des Pays de l'Adour.

Rogalski M. (2008) *Faut-il proposer un socle commun pour la licence de mathématiques des universités françaises ?* educmath.ens-lyon.fr/Educmath/en-debat/math-universite/reponse-de-marc-rogalski

Vandebrouck F. (2011) Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives, 16*, 149-185.