LA DETRANSPOSITION DES SAVOIRS D'ANALYSE MATHEMATIQUE AU SECONDAIRE

HATEGEKIMANA LUANDA* Emmanuel

Résumé – La présente étude se penche sur la didactique de l'analyse en partant de son histoire et de celle de ses concepts notamment celui de limite, un élément essentiel dans les études didactiques. L'analyse de l'évolution des notions mathématiques montre qu'à l'instar de la didactique de la géométrie, la pratique de l'enseignement de l'analyse devrait s'échelonner dans l'enseignement, du secondaire à l'université, en suivant quatre niveaux d'enseignement classés suivant quatre étapes de l'évolution des notions de l'analyse pour une bonne transformation des savoirs en connaissances durant l'apprentissage.

Mots clés : didactique de l'analyse, calcul infinitésimal, analyse, limites, détransposition.

Abstract: This study focuses on didactical analysis starting from his history and the history of limit concept, an essential element in didactic studies. The analysis of the evolution of mathematical concepts shows that, like the didactics of geometry, the practice of the analysis teaching should spread out to both secondary and university levels by following the four teaching levels ranged pursuant to the four stages of the evolution of the analysis notions for transformation of knowledge in the acquisition.

Key words: didactical analysis, infinitesimal calculi, analysis, boundary, detransposition

I. INTRODUCTION

En République Démocratique du Congo, et dans d'autres pays, l'analyse mathématique s'enseigne vers la fin du cycle secondaire en scientifique. Les contenus d'enseignement ne sont pas échelonnés sur plusieurs années mais s'enseignent en une année d'étude et pourtant l'analyse s'est formée durant une longue période. Le bas niveau de maitrise des notions d'analyse constaté au début de l'enseignement universitaire témoigne de difficultés de son apprentissage, un constat confirmé par le témoignage des professeurs du secondaire, les observations de leçons, les critiques des manuels (Hategekimana et Mbabare 2017) et les résultats d'autres recherches (Artigue 2001).

Il sied donc de penser une réorganisation et une progression des contenus pouvant permettre la construction progressive d'acquisitions des élèves. Ce serait une détransposition, c'est-à-dire un fonctionnement de la décontextualisation des savoirs enseignables pour déculturaliser et universaliser, en faisant évoluer les contenus scolaires par un enseignement hiérarchisé suivant les niveaux d'abstractions à travers la formation en spirale (Hategekimana 2016). En fait, cela se justifie puisque les mathématiques, caractérisées historiquement par une lente évolution, se sont construites à partir des problèmes de la vie pour se généraliser en des savoirs constituant l'objet d'enseignement actuel. A l'instar de l'enseignement de la géométrie (Houdement et Kouzniak 1998-1999) (Parzysz 2006), et selon la décontextualisation des savoirs mathématiques (Hategekimana 2015), de l'historique de l'analyse, des considérations d'Artigue (2011) et de Schneider (2011) notre objectif est de montrer que les contenus d'enseignement d'analyse peuvent être réorganisés dans une décontextualisation progressive dans les praxéologies de l'enseignement et de l'apprentissage scolaires.

Hypothétiquement, les contenus d'enseignement d'analyse mathématique peuvent être échelonnés sur plusieurs années dans le cursus de formation pour faciliter l'apprentissage par une décontextualisation des contenus d'enseignement en spirale. Ce qui permettrait

* Université de Goma – République Démocratique du Congo – hategekimana_emmanuel@yahoo.com

l'acquisition du sens des notions conceptuelles de manière progressive. Car selon Artigue (2011,5) :

> L'enseignement de l'analyse est resté simple « calculus », pour reprendre l'expression anglo-saxonne ou qu'il se soit donné des ambitions plus théoriques, force est de constater que, dans la plupart des pays, ce qui est réellement appris et ce qui est évalué, pour des raisons diverses, ne va guère au-delà d'une analyse algébrisée, enfermée dans un nombre limité de routines.

En outre, pour Schneider (2011, 96), il existe une bicéphalie d'un cours constitué de deux pôles correspondant à l'histoire de l'analyse à savoir le calcul infinitésimal dont les praxéologies sont du type ''modélisation'' et l'analyse formalisée dont les praxéologies sont du type ''déduction''. Ce bicéphalisme complique et rend difficile l'enseignement des limites en privilégiant l'aspect algorithmique au détriment de la construction du sens du concept ''limite'' et de la signification des propriétés. L'analyse des propos de Schneider et l'histoire de l'analyse nous conduisent à penser à hiérarchiser ces praxéologies à partir des situations didactiques pour faciliter et hiérarchiser l'apprentissage dans un contexte d'enseignement à spiral.

II. ÉVOLUTION HISTORIQUE DE L'ANALYSE

Entre 1590 et 1630, plusieurs mathématiciens comprirent que la démarche algébrique pour manipuler une donnée inconnue, afin d'obtenir une équation à résoudre, convenait à la résolution des problèmes arithmétiques et à l'étude des questions géométriques. Le fruit de leur réflexion en algèbre consista à accepter que lors de la mise en équation, toutes les grandeurs données, connues ou inconnues, qui interviennent dans le problème, soient représentées symboliquement. En géométrie, la méthode d'analyse algébrique concurrença l'utilisation de théorèmes démontrés par voie de synthèse. Alors, l'algèbre cessa d'être l'étude d'équations purement numériques pour devenir la manipulation de formules faisant intervenir plusieurs grandeurs indéterminées. Ce courant de recherche va atteindre la maturité en 1637 avec l'apparition de deux ouvrages marquant la naissance de la géométrie analytique de René Descartes et la circulation à Paris d'un manuscrit dénommé ''Introduction aux lieux plans et solides'' de Pierre de Fermat.

Au début du XVIIe siècle, l'attention des mathématiciens de l'Europe se pencha sur des problèmes non encore étudiés par les géomètres grecs de l'Antiquité notamment la détermination des tangentes à une courbe, les problèmes de rectification, de quadrature, de cubature et la recherche des centres de gravité des lignes, des surfaces et des solides ainsi que l'étude des questions de cinématique. Les Grecs de l'Antiquité s'étant déjà intéressés à ces questions, Archimède avait effectué la quadrature de plusieurs surfaces et la cubature de quelques volumes et avait déterminé les centres de gravité de ces figures et les tangentes à une figure plane dite « spirale d'Archimède » et Apollonius avait fait l'étude complète des tangentes aux coniques (Deug Mias 2004-2005, 109). En même temps ces mathématiciens examinèrent d'autres nouvelles figures géométriques, obtenues par des constructions variées. La géométrie analytique de Descartes et Fermat permit de définir de nombreuses nouvelles courbes sur lesquelles les méthodes des anciens Grecs montrèrent leurs limites. Par les ressources du calcul algébrique, ils résolurent les problèmes que ces nouvelles figures suggéraient.

Les premiers résultats furent obtenus par des raisonnements spécifiques aux problèmes étudiés et, de plus en plus, des méthodes générales furent mises au point. Intéressés par les problèmes de quadrature, ils ressentirent l'obligation de calquer leur manière de rédiger sur le modèle des anciens Grecs mais ils eurent l'idée d'utiliser librement des quantités infiniment petites. Les astronomes Kepler et Galilée furent parmi les premiers promoteurs de cette idée.

Dans son Dialogue concernant les deux grands systèmes du monde de 1632, Galilée proclama par exemple qu'il est vrai et nécessaire qu'une ligne soit constituée de points, et que le continuum soit constitué d'indivisibles. Faisant cela, il s'éloigna du point de vue des philosophes grecs stipulant que des points sans grandeur mis bout à bout ne pouvaient pas former une ligne. Cavalieri, élève de Galilée, transformera cette idée en une théorie plus systématique. Ses deux livres de Géométrie promues d'une nouvelle manière par les indivisibles du continuum (1635) et les Six exercices géométriques (1647), reçurent une large publicité et une forte influence au XVIIe siècle en devenant vite la source la plus citée sur les quadratures, sauf les traités d'Archimède.

Bien que le concept d'indivisible soit relativement naïf, Cavalieri développa des techniques puissantes pour séduire un grand nombre de mathématiciens. L'indivisible est historiquement très important et se place à un niveau supérieur de difficulté et d'abstraction mais continue de susciter l'inspiration des mathématiciens (Lehning 2017, 147-153) (Launay 2016, 95-96). Archimède (-287 à -212), le grand ancêtre des analystes allia la prudence d'Aristote à la témérité de Démocrite dans le calcul de la quadrature de la parabole ou de la détermination de l'aire délimitée par la parabole et un segment joignant deux de ses points (Deug Mias 2004-2005, 111), (Boudenot et Samueli 2014, 74-77). Les problèmes de la détermination des aires limités par des courbes conduiront à l'usage des notions de limites.

Vers 1660, les mathématiciens clarifièrent les liens entre les différents problèmes et s'aperçurent qu'on peut transformer un problème de rectification en un problème de quadrature et obtenir la relation de réciprocité entre les questions de tangentes et les problèmes de quadrature car la quadrature et la rectification sont des cas particuliers des problèmes inverses des tangentes. Apparurent alors le besoin d'inventer des méthodes plus générales d'abord pour contourner les obstacles dans plusieurs problèmes, causés par exemple par la présence de racines carrées dans les équations. Ensuite pour comprendre le fonctionnement des règles donnant les tangentes à une courbe et chercher une stratégie générale pour systématiser des liens entre les différents problèmes inverses des tangentes, de les classifier et les résoudre. La découverte de réponses à ces questions attribuées indépendamment à Newton et à Leibniz, entre 1665 et 1685, permettra d'organiser en une théorie unifiée, les méthodes inventées par leurs prédécesseurs pour l'étude des lignes courbes et à transcrire les arguments géométriques utilisés en des règles de calcul. Ils ont développé des concepts (fluentes et fluxions pour Newton, différentielles et intégrales pour Leibniz) pour manipuler les variations infinitésimales des grandeurs liées aux courbes puis des notations et des règles de calcul pour manier ces concepts. Ensuite, ils ont utilisé ces concepts pour traiter les questions de détermination de tangentes, d'effectuer des rectifications et des quadratures, et d'obtenir d'autres résultats inédits.

Newton rejetant les indivisibles, introduisit la notion de quantités évanouissantes, suites décroissantes convergeant vers zéro. Utilisant le système de notation de Leibniz, ses successeurs, les frères Jacob et Johann Bernoulli, donnèrent à la théorie ses premiers grands succès, en montrant que le calcul de Leibniz permet de résoudre et de relier entre eux, un grand nombre de problèmes inverses des tangentes. Les principaux progrès des mathématiques au XVIIIe siècle proviendront de l'exploration des possibilités de ce nouvel outil, le calcul infinitésimal de Newton et Leibniz. Deux phénomènes verront le jour à savoir la manipulation algébrique des formules qui remplaça progressivement l'étude des problèmes géométriques et la ramification du calcul infinitésimal en de nombreuses sous-disciplines.

Comme le calcul infinitésimal de 1700 porte sur des « variables », objets intuitifs sans définition précise représentant des grandeurs géométriques (coordonnées d'un point sur une courbe, longueur d'arc, aire sous une courbe, etc.), on a étendu ces variables aux variables d'une fonction à une ou plusieurs variables réelles, objets qui n'ont pas de rapport direct avec la géométrie et qui constituent l'analyse moderne. La différentielle d'une variable ordinaire fut étendue à une variable infiniment petite et la fluxion d'une grandeur, vitesse d'accroissement, à la dérivée d'une fonction qui est le pendant moderne de la fluxion d'une grandeur ou de la différentielle d'une variable. Ce changement de cadre s'accompagna d'une simplification car la dérivée d'une fonction est une fonction et la différentielle d'une variable est un nombre. Enfin, le calcul de Newton reposant sur l'idée intuitive de « vitesse d'accroissement » et celui de Leibniz utilisant explicitement le concept non défini de « variable infiniment petite », devinrent l'analyse moderne qui propose une définition précise de la dérivée d'une fonction à partir de la notion de limite et permis d'atteindre la même précision dans les raisonnements que celle offerte par la géométrie d'Euclide. Bref, la transformation du calcul infinitésimal en analyse englobe l'adoption de la notion de fonction, de fonction dérivée au XVIIIe siècle et l'introduction de définitions précises basées sur la notion de limite au XIXe siècle.

Tout le XVIIIème siècle s'acharna à clarifier la pensée de Leibniz en faisant disparaître les quantités évanouissantes et surtout avec Cauchy jusqu'à Weierstrass, la notion de limite sera le fondement de tout l'édifice de l'analyse (Dhombres 1978, 173). Bref, le calcul infinitésimal est devenu, à la fin du XVIIIème siècle, une branche autonome des mathématiques appelée ''analyse'' (Deug Mias 2004-2005,154), et s'est fondée sur des notions algébriques des structures d'ensembles numériques et de géométrie et étudie les fonctions, les limites, les dérivées et les primitives. Ainsi, l'analyse mathématique se définit comme le prolongement moderne du calcul infinitésimal et est l'étude des fonctions, d'ensembles muni des structures topologiques et de leurs liens. Ses concepts de base sont les limites et fonctions continues. (Bouvier et al. 2009, 36).

Le terme fonction a été pour la première fois employé dans un sens mathématique par Leibniz à la fin du XVIIème siècle non dans un sens qu'on lui reconnait aujourd'hui, mais dans un contexte géométrique où il considérait divers segments liés à une courbe plane par exemple le segment horizontal la reliant à l'axe vertical ou la sous-tangente en un point courant et il écrivait métaphoriquement que ces segments répondaient à une certaine fonction pour la courbe. Pour lui l'important n'était pas les segments mais les relations entre eux. Le mot fonction eut alors un sens nouveau à savoir la dépendance d'une grandeur par rapport à une autre et Bernoulli utilisa alors la notation Φx pour dire que Φ est fonction de x et on postula qu'une fonction d'une variable est une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette variable et de constantes (Busser 2015, 8-9). Cette notion fut reprise par Dirichlet pour avoir le sens et la définition actuelle d'une fonction.

III. LA DIDACTIQUE DE L'ANALYSE

Au regard de cette évolution de l'analyse, on déduit quatre périodes de son développement :

- La période des résolutions géométriques des problèmes de quadrature et de cubature ainsi que ceux liés aux nouvelles figures non encore examinées, et qui sont notamment des grandeurs incommensurables, problèmes qui exigeait une autre façon de résolution.
- La période du calcul infinitésimal avec approche algébrique des grandeurs incommensurables par des indivisibles ou les suites évanouissantes et des infiniment petits, les variables étant ces grandeurs (le calcul de longueur d'une courbe, la détermination de cubature, de quadrature, problème de cinématique).

- La période de la mise sur point de l'analyse par le passage des variables des grandeurs aux variables de fonctions avec la notion de dépendance et la formalisation de la notion de limites permettant de passer de la différentielle d'une variable aux fonctions dérivées et aux intégrales et primitives des fonctions.
- La période du développement abstrait et de l'essor de l'analyse mathématiques entre les milieux du XIX^{ème} siècle et du XX^{ème} siècle par Cauchy et Weierstrass jusqu'à Lebesgue, Fréchet et Schwartz et qui se développe actuellement dans plusieurs directions notamment l'analyse complexe et fonctionnelle, le calcul différentiel, intégral, la théorie de la mesure.

L'analyse mathématique présente deux facettes dans le développement de toutes les mathématiques car étant le fruit de modélisation algébrique de situations issues du monde réel, ses savoirs sont issus des réalités du monde physique. Son enseignement doit partir donc des faits de la réalité du monde physique traduits en des situations didactiques à partir desquelles les élèves vont construire leurs connaissances. Aussi, puisqu'elle s'appuie sur des objets de nature géométrique (les courbes ou les aires) ou algébrique (écriture en équation, les nombres), son enseignement devrait articuler ses connaissances et celles de la géométrie et de l'algèbre en tenant compte de son orientation dans des situations didactiques.

Nous considérons les étapes de la détransposition des savoirs mathématiques enseignables (Hategekimana 2015), l'évolution historique et la diversité des reconstructions des concepts marquant l'entrée dans le champ de l'analyse, nouveau monde mathématique avec de nouveaux problèmes, objets, techniques et modes de pensée (Artigue 2001). Alors, entrer en analyse est au sens de la connaissance, la construire à partir des objets connus de géométrie et des considérations algébriques pouvant y prendre un sens différent. En effet, la connaissance, rapport de l'individu à l'objet de connaissance, peut changer selon les individus et les lunettes disciplinaires par lesquelles elle est considérée. Les faits engendrant les concepts de l'analyse constituent l'analyse AN0 où les praxéologies sont celles des grandeurs non définies constituant une sorte de reconstruit (Schneider 2011, 78). AN0 n'est pas de l'analyse proprement dite et correspond à la période de résolution des problèmes liés aux nouvelles figures non encore examinées, avec le problème de cubature et de quadrature, première phase dans l'évolution des savoirs de l'analyse. Elle permet de faire des interprétations issues de la géométrie, du calcul arithmétique et du monde réel, avec quelques implicites. C'est l'analyse arithmético-géométrique (AG) à partir de laquelle se fera la reconstruction intuitive de savoirs scolaires assurant l'entrée en analyse par la modélisation de l'arithmétique et la géométrie qui constituent la phase AN0.

L'introduction de la méthode algébrique conduit à l'analyse AN1 qui correspond, avec l'évolution des concepts à la phase historique du calcul infinitésimal à partir de laquelle les premiers concepts doivent être construits par des situations de AN0 donnant du sens analytique aux concepts. Ce sont des notions préliminaires de l'analyse standard (AS) dans laquelle s'inscrit l'analyse réelle enseignée contenant de définitions précises appuyées sur l'ensemble IR des réels car l'analyse réelle a été incorporée dans les programmes d'enseignement secondaire de la plupart des nations (Kuzniak et al. 2016), (Beke 1914 cité par Artigue 2001). L'analyse AN1 est le calcul infinitésimal fondé sur les problèmes des quadratures et cubatures pour des figures exprimées par des équations algébriques et représentées par des variables. Les situations didactiques doivent servir de cadre pour son enseignement se servant des variables de grandeurs pour asseoir les concepts d'indivisibles, des infiniment petits et en manipulant les grandeurs incommensurables. Les suites des variables et leurs limites, les différentielles des variables, etc. seront enseignés à ce niveau comme prélude aux notions propres dites d'analyse. Cette phase correspond logiquement à l'analyse calculatoire (AC), dans laquelle des propriétés algébriques se dégagent des interprétations géométriques, conduisant aux calculs algébriques de l'analyse comme calcul généralisé avec des règles définies, plus ou moins explicites et appliquées indépendamment d'une réflexion sur l'existence et la nature des objets introduits. Le passage de la première phase à la deuxième est assuré par des interprétations géométriques induisant les propriétés pour justifier les calculs.

L'analyse AN2 doit correspondre, en comparaison à l'évolution de l'analyse, aux notions élémentaires de l'analyse proprement dite. Elle généralise le calcul infinitésimal, en passant des variables des grandeurs aux variables des fonctions. C'est un changement de cadre de variables d'objets connus aux variables des fonctions sans relation aucune avec la réalité qui renvoie à la praxéologie de la modélisation fonctionnelle (Schneider 2011, 81). Elle correspond au paradigme de l'analyse (AI), fondée sur les propriétés des nombres constituant les ensembles de départ et d'arrivée des fonctions. Cette troisième phase AN2 correspond à l'axiomatique abstraite car le contenu conceptuel du calcul infinitésimal est bien précisé, la praxéologie étant l'analyse formalisée (Schneider 2011, 80). Par exemple, on passerait de l'enseignement des suites d'une variable aux suites des fonctions ou du nombre dérivé à la dérivée d'une fonction ou alors de l'intégrale d'une fonction sur un segment à la primitive d'une fonction. On passe donc de la variation d'une variable et on l'associe à une relation qui la fait varier et donc à une fonction.

L'analyse AN3 est celle où les notions à enseigner sont les savoirs savants s'appuyant sur des ensembles dont les éléments sont quelconques. On passe de l'analyse réelle qu'on généralise à l'analyse de plusieurs variables par l'introduction des notions topologiques puis à l'analyse complexe et l'analyse définie sur n'importe quel ensemble. C'est l'analyse enseignée à l'université pour former les mathématiciens. Cette phase correspond ainsi, dans le processus de l'axiomatisation des savoirs mathématiques, à l'axiomatique formelle pur, toute référence aux situations concrètes étant gommée. Le passage de AN2 à AN3 est la généralisation de l'analyse réelle car toutes les mathématiques avancées se conçoivent comme généralisation des mathématiques élémentaires qui peuvent être qualifiées de réelles, l'ensemble constituant la référence concrète de l'espace qui nous entoure. A ce niveau, un travail spécifique et formel s'appuie sur l'approximation et la localité : bornes, inégalités, voisinages, négligeabilité ... C'est la phase correspondant à l'axiomatique formelle, le contenu étant formalisé de manière logique et leur validation se faisant par des démonstrations logiques et des déductions rigoureuses.

IV. EXEMPLE DE L'ENSEIGNEMENT DES LIMITES

La limite, notion centrale de l'analyse, fut formalisée très tard comme les nombres réels et la continuité. Malgré le beau texte de d'Alembert « Sur les principes métaphysiques du calcul infinitésimal » (l768), rejetant toute considération d'indivisible et exposant avec clarté le concept de limite et la façon dont s'en déduit le nombre dérivé, c'est au XIXème siècle que la limite est mise au premier plan, et les idées infinitésimales sont discréditées. L'analyse a reposé longtemps sur l'intuition et son évolution a été lente de sorte qu'elle ne peut être enseignée en une seule année scolaire sans construction des concepts en situation faisant évoluer l'intuition comme ce fut pour son évolution historique. L'idée de l'infiniment petit, liée au départ aux indivisibles et aux particules évanouissantes, puis à celle de limites permet de contextualiser le sens d'une limite et le faire progresser (Hategekimana, 2014). Analysant les pratiques enseignantes, Bosch et al. (2003) (cité par (Schneider 2011, 96)), soulignent l'existence de deux organisations mathématiques juxtaposées rendant bicéphale l'enseignement de l'analyse : l'une axée sur ''l'algèbre des limites'' dont les tâches sont les calculs des limites d'un point de vue axiomatique des propriétés et l'autre orientée vers la topologie des limites dont les tâches consistent à prouver les propriétés de cette algèbre ou l'existence des limites.

Pour Hategekimana (2014) et Le Thai Bao (2007), l'enseignement des limites pourrait, par une meilleure détransposition, se faire par des situations basées sur les suites des valeurs approchées par défaut ou par excès, pour introduire le concept d'infiniment petit et jusqu'à la définition, les opérations et les propriétés élémentaires d'une limite. Les professeurs des mathématiques ayant assistés à l'expérimentation d'une situation de l'enseignement des limites en deuxième année secondaire en RDC ont affirmé avec satisfaction que les limites introduites dans la classe de deuxième ont été comprises dans leur sens et leur signification par les élèves (Hategekimana 2014, 146). Les concepts ''limites'' étant compris dans leur signification et leur sens à partir des exemples donnés, notions encore assez intuitives, et les élèves n'ayant pas une base solide pour comprendre la détermination de la convergence des suites, le calcul de la convergence des limites qui est la partie calculatoire doit intervenir après une interprétation géométrique et le dégagement des propriétés.

Le passage de AN0 à AN1 permet donc aux élèves de construire leurs connaissances sur les limites des suites en partant des situations didactiques fondées sur des aspects géométriques et le passage de AN1 à AN2 serait utile pour que les élèves dégagent et s'accoutument aux propriétés et aux calculs sur les limites des suites et enfin le passage de AN2 à AN3 doit aider les élèves à construire les limites des fonctions en généralisant celles des suites qui a été expérimentée après l'enseignement des nombres rationnels avant celui des irrationnels à partir des suites de Cauchy (Hategekimana 2014, 127-129). Sa mise en œuvre s'appuie sur des considérations géométriques et les intervalles puis les limites jouant le rôle de permettre la construction des nombres irrationnels comme limites non rationnelles des suites de Cauchy à termes rationnels devient utile et incontournable à ce niveau de scolarité.

V. CONCLUSION

Dans la logique de la détransposition des savoirs scolaires, l'enseignement de l'analyse, à l'instar de celui de la géométrie, peut s'échelonner suivant les niveaux d'acquisition scolaire, en partant de AN0, analyse arithmético-géométrique pour passer à AN1 analyse calculatoire ou calcul infinitésimal, puis à AN2 analyse réelle avec variables des fonctions où on formalise les notions de l'analyse réelle et enfin à AN3, analyse abstraite où l'analyse réelle est généralisée. Ces étapes s'appliquent au cas des limites comme nous l'avons montré, à l'expérimentation du passage de la première phase à la deuxième ayant déjà eu lieu. Au regard des relations historiques entre les différents concepts du calcul infinitésimal à l'analyse, cette didactique permettra une bonne assimilation progressive des notions des suites, limites, fonctions, séries, dérivées, intégrales et équations différentielles et une facilitation de l'acquisition des nombres réels. On peut donc conjecturer que l'enseignement des limites et autres concepts de l'analyse peut suivre le processus de détransposition et d'évolution des connaissances mathématique afin de permettre leur bonne acquisition en milieu scolaire dans un programme cyclique. Une affirmation à expérimenter et dont la première phase pour les limites a été faite. Cette réflexion sur la décontextualisation peut permettre de bien résoudre le problème de la réorganisation des contenus d'enseignement en assurant une bonne progression curriculaire par année d'études et par cycle de formation afin de faire grandir scientifiquement le long du parcours scolaire une croissance en connaissances pour arriver à une maturité disciplinaire.

REFERENCES

Artigue M. (2001) L'entrée dans le champ conceptuel de l'analyse : réformes curriculaires, recherches didactiques, où en est-on ? In T. Assude et B. Grugeon (Eds.), *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques, année 2000* (pp. 277-301). irem paris 7.

Artigue M. (2003) Évolutions et perspectives de l'enseignement de l'analyse au lycée. *L'Ouvert* 107, 1-18. http://numerisation.univ-irem.fr/ST/IST03008/IST03008.pdf

Boudenot J.-C., Samueli J.-J. (2014) T*rente livres de mathématiques qui ont changé le monde*. Paris : Ellipses.

Bourbaki N. (1972) É*léments d'histoire des mathématiques*. Paris : Hermann.

Bouvier A. et al. (2009) D*ictionnaire des mathématiques*. Paris : PUF, quadrige.

Busser E. (2015) *Histoire des mathématiques de l'antiquité à l'an mil*. *Tangentes* hors-série 30.

Deug Mias 1ère année (2004-2005) *Histoire des mathématiques*. Université Louis Pasteur.

Dhombres J. (1978) N*ombre, mesure et continu. Épistémologie et histoire*. Paris : Fernand Nathan.

Hategekimana L-E. (2014) *Sur l'enseignement des nombres rationnels et irrationnels*, thèse de doctorat. Kinshasa : Université Pédagogique Nationale.

Hategekimana L-E. (2015) De la transposition des savoirs mathématiques à leur détransposition dans l'enseignement secondaire. In L. Theis (Ed.) *Actes du colloque EMF 2015* (pp. 119-128). Alger : Université d'Alger.

Hategekimana L-E. (2017) Réciprocité entre les problématiques de l'enseignement des limites et des nombres réels. *Annales de l'UNIGOM* VII.2, 317-328.

Hategekimana L-E. (2016) *Les problèmes de l'enseignement des nombres rationnels et irrationnels*. Paris : Edilivres.

Hategekimana L-E. (2017) Problématique de l'enseignement des limites : diagnostique des insuffisances didactiques. *CERIGO* 16, 7-18.

Hategekimana L-E. et Banwitiya Y. (2014) La problématique des contenus d'enseignement sur les relations et les fonctions dans l'éducation mathématique au secondaire. Bukavu : *Cahiers du CERUKI*, nouvelle série n°44, 255-263.

Houdement C. et Kuzniak A. (1998-1999) *Réflexion sur l'enseignement de la géométrie pour formation des maîtres. Grand N* 64, 65-78.

Kuzniak A., Montoya Delgadillo E., Vandebrouck F, & Vivier L (2016) Le travail mathématique en analyse de la fin du secondaire au début du supérieur : identification et construction. In Y. Mathero, G. Geudet et al. (Eds), *Enjeux et débats en didactique des mathématiques* (pp.47-77). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Launay M. (2016) Le *grand roman des maths. De la préhistoire à nos jours*. Paris : Flammarion.

Lehning H. (2017) *Toutes les mathématiques du monde*. Paris : Flammarion.

Le Thai Bao (2007) *Étude didactique des relations entre enseignement de la 'notion de limite' au lycée et décimalisation des nombres réels dans un environnement 'calculatrice'. une étude de cas au Vietnam*. Thèse de doctorat. Grenoble : Université Joseph Fourier.

Parzysz B. (2006) La géométrie dans l'enseignement au secondaire et en formation des professeurs des écoles : de quoi s'agit-il ? *Quaderni di Ricerca in Didactica* 17, 128-161.

Schneider M. (2011) *Traité de didactique des mathématiques. La didactique par des exemples et contre-exemples*. Liège : Éditions de l'Université de Liège.