LA DUPLICATION DU CARRÉ AVEC PLATON EN CM2 et en 6^e^

GAUTREAU* Alexis – HEGUIAPHAL** Dominique

Résumé – Nous présentons une expérimentation effectuée en cours de Mathématiques en CM2 et en 6ème. Les élèves ont étudié le problème de la duplication du carré à travers un extrait du *Ménon* de Platon. L'objectif est double : faire travailler les élèves sur ce problème de duplication mais également sur la compréhension de texte.

Mots-clefs : Texte historique, Didactique du français, Cycle 3, Aire, Agrandissement de figure, Lexique géométrique.

Abstract - We present an experiment carried out in grades 5 and 6, in France. Pupils studied the historical problem of the duplication of squares through an excerpt of Plato's *Meno*. Our aim is twofold: make pupils work on the problem of duplication of squares and, at the same time, on the understanding of texts.

Key-words : Historical text, Didactic of the French language, Primary education, Area, Enlargement, Geometric vocabulary.

I. PRÉSENTATION DE L'EXPÉRIMENTATION

Pendant l'année scolaire 2016/2017, dans le cadre d'un groupe de travail de l'IREM M.:A.T.H. cycle 3 de Paris, nous avons construit une séquence à destination de classes de CM2 et 6e sur le problème de la duplication du carré, étudié à travers un extrait du *Ménon* de Platon. Cet exercice s'inscrit dans un projet plus large du groupe IREM M.:A.T.H.[1] au niveau national sur l'usage de sources patrimoniales et historiques dans l'enseignement des Mathématiques au cycle 3.

L'expérimentation a duré trois séances d'une heure, mais pourrait prendre plus ou moins de temps avec d'éventuelles adaptations. Elle a été mise en œuvre dans un CM2 et une 6e du 13e arrondissement de Paris. Une version transformée de ce scénario sera de nouveau jouée en durant l'année scolaire 2018 dans des classes de cycle 3, ce qui enrichira l'expérimentation. Les séances en CM2 et en 6e ont été enregistrées puis retranscrites, et les productions d'élèves recueillies et conservées à des fins d'analyse. Ces documents nous ont permis de confirmer, compléter ou infirmer certaines de nos analyses a priori.

La séquence a été conçue et animée par des enseignants expérimentés : Dominique Héguiaphal (CM2), Alexis Gautreau (6e) et Renaud Chorlay (formateur ESPE et chercheur au LDAR). Hormis la présentation de la séquence, dans cet article nous tenterons de dégager l'intérêt et les limites de l'exercice, tant du point de vue de la compréhension du texte de Platon lui-même, que du point de vue de l'apport de ce texte à l'activité mathématique des élèves.

La seule notion mathématique nouvelle dans la séquence à l'étude se trouve être le cœur du texte : le fait que doubler la longueur d'un côté du carré ne donne pas un carré d'aire double. Pour le reste, cette séquence n'est pas conçue comme une situation visant la découverte ou la première rencontre de notions mathématiques : la caractérisation instrumentée du carré et la

* * Cité scolaire Rodin, Paris 13ème – France – alexisgautreau00@gmail.com
** ** École primaire Arago, Paris 13ème – France – dominique.heguiaphal@ac-paris.fr

[1] Ce projet a débouché sur l'écriture du livre : *Passerelles : enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3*, dirigé par M. Moyon et D. Tournès.

comparaison d'aires avec ou sans mesures seront l'occasion pour les élèves de réinvestir des connaissances anciennes ; la situation met régulièrement l'élève en position d'expert devant s'appuyer sur ses connaissances antérieures non seulement pour chercher à résoudre un problème géométrique, mais aussi pour reformuler, voire critiquer, des formulations parfois éloignées des nôtres. L'élève devra également évaluer la qualité des arguments proposés dans le texte et même justifier certaines affirmations.

Il faut bien dire que nous ne sommes pas les premiers, loin de là, à nous attaquer à ce texte ; le problème du Ménon est un classique. Une expérimentation a déjà fait l'objet d'un article dans la revue Repère Irem (Kosyvas & Baralis, 2010). Cependant, nous avons choisi un autre chemin que celui emprunté par Kosyvas & Baralis. Ce problème peut être l'occasion d'un travail dans le cadre numérique, avec en ligne de mire la détermination par les élèves d'une valeur approchée ou d'un encadrement de la longueur de la diagonale du carré d'aire double. Nous avons choisi, en suivant Socrate, de privilégier le travail sur les grandeurs géométriques. Les mesures d'aires et de longueur données dans le texte ne serviront aux élèves qu'à contrôler leurs résultats obtenus par découpage et recollement. Nos élèves ont cherché, aux côtés de l'esclave, la "ligne" sur laquelle ce carré d'aire double est constructible. Il est notable que, lorsque nos élèves ont eu à choisir entre calculer l'aire du carré final à partir de mesures ou effectuer des pliages, découpages et recollements, ils aient tous choisi la seconde méthode, ne souhaitant pas s'engager dans le cadre numérique. C'était pourtant la méthode numérique que nous avions pensé majoritaire dans notre analyse a priori pour les élèves de 6e.

Par ailleurs, en examinant avec les élèves, dans un texte du patrimoine, une question mathématique, nous espérons lui conférer une dimension historique et culturelle, et partant, dévoiler aux élèves son aspect essentiel ou classique pour le monde intellectuel de l'époque classique de l'antiquité grecque ; en espérant que cela instille aux yeux des élèves de la valeur au problème mathématique. Aussi, notre parti-pris dans la construction de la séquence a été de faire travailler les élèves non seulement sur le problème du Ménon – doubler (en aire) un carré donné – mais sur le texte du Ménon (Platon, 1967). Notre motivation était donc double.

II. TRAVAILLER SUR UN TEXTE AUX ABORDS DIFFICILES EN CYCLE 3

Choisir de faire travailler les élèves sur le texte du Ménon c'est choisir de se confronter, en tant qu'enseignant, à cette difficulté du texte. Il ne s'agit pas là d'un caprice de notre part. Nous y sommes incités aussi bien par les programmes de français que par les travaux de didactique du français ; par ceux, en particulier, portant sur la compréhension de texte.

Nous avons cherché à concevoir la séquence en nous appuyant sur l'analyse des enjeux cognitifs et didactiques de la compréhension de texte tels qu'ils sont décrits par l'équipe des rédacteurs des manuels Lector & Lectrix (Cèbe & Goigoux, 2009). Ils rappellent que « comprendre un texte » englobe plusieurs familles de savoir-faire : décodage du code écrit (le sens usuel de « savoir lire »), mise en œuvre de compétences linguistiques et textuelles (syntaxe, lexique, ponctuation, connecteurs etc.), de compétences référentielles (ici le texte porte – en grande partie – sur des objets mathématiques), enfin, de compétences stratégiques (régulation, contrôle et évaluation, par l'élève, de son activité de lecture). Cèbe et Goigoux soulignent :

> S'il veut comprendre un texte, le lecteur doit mobiliser simultanément toutes ces compétences pour opérer deux grands types de traitement : des traitements locaux – qui lui permettent d'accéder à la signification des groupes de mots et des phrases – et des traitements plus globaux qui l'amènent à construire une représentation mentale cohérente de l'ensemble. (…) Ce dernier processus, appelé intégration sémantique, est cyclique : chaque ensemble d'informations nouvelles amène le lecteur à réorganiser la

> représentation qu'il construit pas à pas (…) Cela suppose qu'il soit suffisamment flexible pour accepter que ses premières représentations soient provisoires donc révisables. (Cèbe & Goigoux 2009, 7)

Les caractéristiques du Ménon nous ont conduits à construire la séquence de manière à accompagner l'élève – et l'ensemble de la classe – dans ce processus d'intégration sémantique. Nous reprenons de Lector & Lectrix des pistes pédagogiques permettant cet étayage ; citons en particulier (adapté de (Cèbe & Goigoux, 2009, 17-20)) :

- Rendre les élèves actifs et capables de réguler leur lecture. (…) Nous les invitons à évaluer leur degré de compréhension (« je suis sûr », « presque sûr », « pas sûr du tout »)
- Inviter à suppléer aux blancs du texte : on doit coopérer avec le texte pour aller un peu au-delà de ce qu'il dit explicitement, tout en respectant les « droits du texte ».
- Conduire à s'interroger sur les pensées des personnages : (…) leurs buts (pour le futur) et leurs raisons d'agir (en référence au passé) ; leurs sentiments ou leurs émotions ; leurs connaissances et leurs raisonnements.
- Faire rappeler et reformuler pour apprendre à mémoriser : nous multiplions les tâches de paraphrase et de reformulation.
- Faire du lexique un objectif permanent : explication par l'enseignant en amont ou en cours de lecture ; mais aussi, prise de conscience de la possibilité pour le lecteur de faire des hypothèses sur le sens d'un mot inconnu.

Ces éléments de didactique du Français nous ont permis d'analyser plus efficacement ce texte aux abords rugueux. Cela étant, il nous a paru naturel de découper le texte selon les trois parties de la résolution du problème de Ménon par l'esclave.

La séquence a été partagée en trois séances d'une heure :

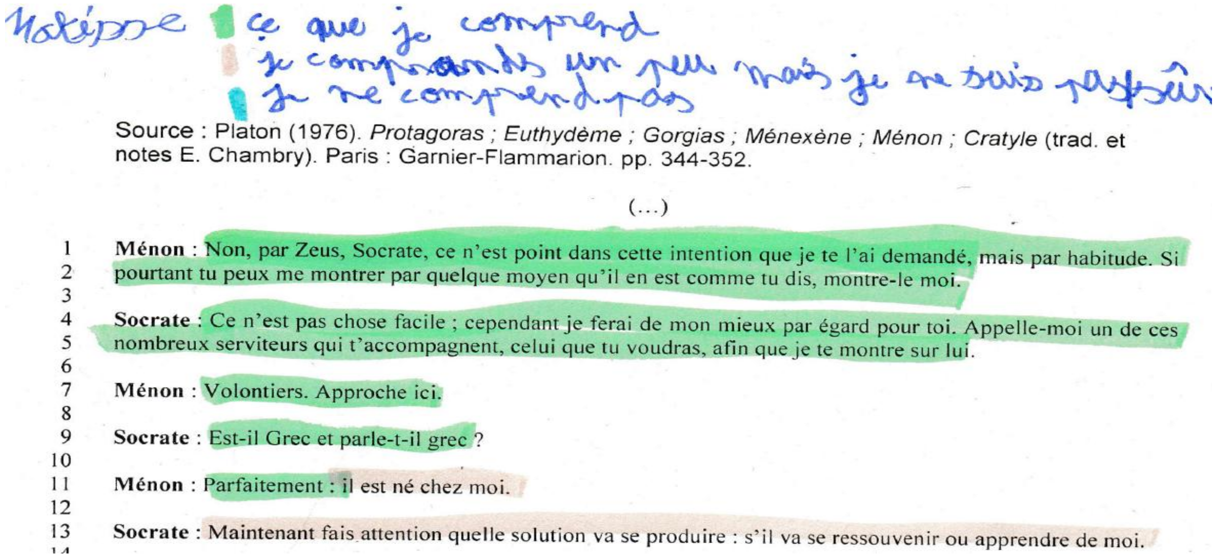
1re séance : Découverte du texte, présentation du contexte et pose du problème de la duplication du carré par le texte.

2e séance : Comparaison des réponses des élèves et de celle de l'esclave. Invalidation de la réponse par doublement du côté.

3e séance : découverte de la réponse de Socrate. Validation ou invalidation par les élèves de cette réponse. Bilan sur la construction générale du texte et son sens philosophique.

D'après les travaux d'élèves examinés, du point de vue du rapport qu'ils entretiennent avec la compréhension du texte, les élèves se partagent en deux groupes distincts. Par exemple, la première phrase du texte, qui n'est compliquée ni par son lexique ni par sa syntaxe, fait référence à une discussion antérieure entre Socrate et Ménon inconnue de nos élèves. Statistiquement, les élèves de bon niveau scolaire ont jugé ne pas avoir compris cette phrase en la soulignant d'une certaine couleur (cf. figure 1) ; les élèves de faible niveau scolaire ont exprimé qu'il la comprenait de façon sûre. De fait, les premiers cherchent à suppléer aux blancs du texte quand les seconds traite le texte de façon locale sans chercher à construire une représentation mentale cohérente de l'ensemble, selon les catégories exposées par Cèbe & Goigoux.

Ce point que les collègues qui enseignent le français connaissent bien, est, nous semble-t-il, important à considérer dès lors que l'on souhaite introduire des textes patrimoniaux en cours de Mathématiques ; mettre en œuvre ce type de séance demande de prendre en considération ces deux types de rapport à la compréhension d'un texte afin de trouver des moyens pour que le traitement global soit compris comme un attendu explicite de l'activité de compréhension par l'ensemble des élèves.



ce que je comprend
je comprends un peu mais je ne suis pas sûr
je ne comprend pas

Source : Platon (1976). *Protagoras ; Euthydème ; Gorgias ; Ménexène ; Ménon ; Cratyle* (trad. et notes E. Chambry). Paris : Garnier-Flammarion. pp. 344-352.

(…)

Ménon : Non, par Zeus, Socrate, ce n'est point dans cette intention que je te l'ai demandé, mais par habitude. Si pourtant tu peux me montrer par quelque moyen qu'il en est comme tu dis, montre-le moi.

Socrate : Ce n'est pas chose facile ; cependant je ferai de mon mieux par égard pour toi. Appelle-moi un de ces nombreux serviteurs qui t'accompagnent, celui que tu voudras, afin que je te montre sur lui.

Ménon : Volontiers. Approche ici.

Socrate : Est-il Grec et parle-t-il grec ?

Ménon : Parfaitement : il est né chez moi.

Socrate : Maintenant fais attention quelle solution va se produire : s'il va se ressouvenir ou apprendre de moi.

***Figure 1** – Compréhension et surlignage en trois couleurs*

III. QUELQUES ENSEIGNEMENTS SUR L'ACTIVITÉ MATHÉMATIQUE DES ÉLÈVES

Cette séquence nous semble favoriser l'entrée dans le travail d'argumentation en géométrie, dans un contexte où l'on ne vise pas de « démonstration » au sens que ce terme prendra au cycle 4 : d'une part, le texte est un texte de nature argumentative ; il présente des échanges d'arguments – entre Socrate et l'esclave – à propos de figures et de grandeurs. D'autre part, le travail confié aux élèves va consister non seulement à chercher la réponse au problème posé, mais aussi à s'approprier et évaluer les arguments échangés dans le texte.

1. Présentation du problème et obstacles épistémologiques

Dans ce livre, Socrate cherche à prouver au citoyen grec Ménon que toute connaissance est disponible en l'homme si ce dernier se questionne suffisamment pour s'en *ressouvenir*. Pour appuyer sa thèse, Socrate convoque un esclave de Ménon et lui fait « redécouvrir » devant son maître la célèbre méthode de duplication de la surface d'un carré. L'esclave, à l'instar de nos élèves, pense initialement qu'il suffit de doubler la longueur du côté. Mais, aiguillé par Socrate, l'esclave finit par comprendre que le carré *penché* (*cf.* figure 2.D), qui a pour côtés les diagonales des quatre petits carrés, mesure en aire le double du carré initial.

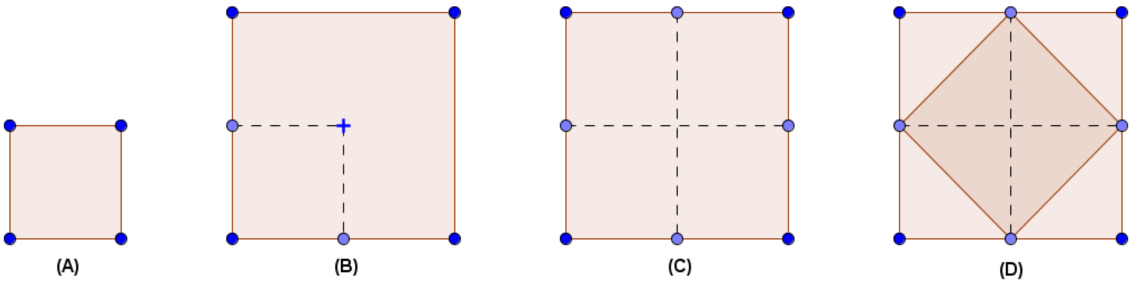


***Figure 2**. Construction du carré d'aire double.*

Le problème porte sur des notions fondamentales au cycle 3 : utilisation d'un vocabulaire précis pour décrire des figures géométriques assez complexes, caractérisation des quadrilatères usuels (en particulier, pour vérifier que le quadrilatère « penché » est bien un carré), comparaison d'aires avec et sans mesure, jeu entre les unités de longueur et les unités d'aire. En outre, l'erreur de l'esclave permet de travailler sur deux obstacles épistémologiques : difficulté à distinguer dans une même figure plane deux grandeurs différentes (la longueur du contour, l'aire de la surface), non proportionnalité des longueurs et des aires dans les situations d'agrandissement/réduction.

La séquence fournit l'occasion de confronter les élèves à des obstacles épistémologiques bien repérés dans la littérature didactique : difficulté à distinguer les deux grandeurs associées à une même surface (longueur du contour, aire) ; prégnance du modèle linéaire, pourtant en défaut dans les situations d'agrandissement /réduction (ici : doubler le côté du carré ne double pas l'aire). Contrairement aux connaissances sur les quadrilatères et les comparaisons d'aires – sur lesquelles on attend une certaine familiarité des élèves – la séquence ne peut supposer une quelconque expertise de l'élève sur ces points délicats. Cela étant, la construction de séquence vise non pas à esquiver ces difficultés, mais au contraire à amener les élèves à s'y confronter pour en prendre conscience.

Les deux obstacles ne jouent pas exactement le même rôle. Pour ce qui est de la distinction longueur/aire, la question est travaillée dès le début de l'enseignement des aires, au cycle 3. Notre séquence étant conçue pour le CM2 et la 6e, nous comptons sur une certaine familiarité des élèves avec cette distinction. La connaissance étant en cours de construction, les différents élèves d'une même classe n'en sont sans doute pas tous au même point, d'où l'importance des échanges d'arguments et de formulations entre élèves – et avec l'enseignant – lors des phases collectives. Pour ce qui est du caractère quadratique – donc non linéaire – de la dépendance de l'aire envers le périmètre (ou envers une longueur caractéristique, comme celle du côté du carré) dans les agrandissements/réductions, le phénomène est en général peu rencontré au cycle 3, et l'on ne peut viser le dépassement d'un obstacle en une seule confrontation. Nos objectifs sont ici modestes : nous aimerions qu'à la fin de la séquence les élèves puissent dire qu'en doublant le côté d'un carré on ne double pas son aire, en le justifiant par l'exhibition d'un contre-exemple.

2. Gros plan : au sujet de la distinction longueur/aire

Socrate parle dans le texte d'un carré de « deux pieds de côté », et fait observer à l'esclave que l'« espace » du carré est de « quatre pieds ». Nous demandons alors aux élèves (en binômes) :

La phrase « L'espace est donc deux fois deux pieds » (20) est très importante. Prenez quelques minutes pour réfléchir, et préparer par écrit vos réponses aux deux questions :

- Pouvez-vous expliquer de quoi parle Socrate ?
- Êtes-vous d'accord avec lui ?

Vous pouvez faire des phrases, ou bien des figures à main levée ; vous pouvez colorier ; tout est autorisé.

Le déroulement dans les classes montre que les élèves identifient bien le fait que l'on parle de l'aire du carré. Nous reproduisons des extraits de trois copies de CM2 :

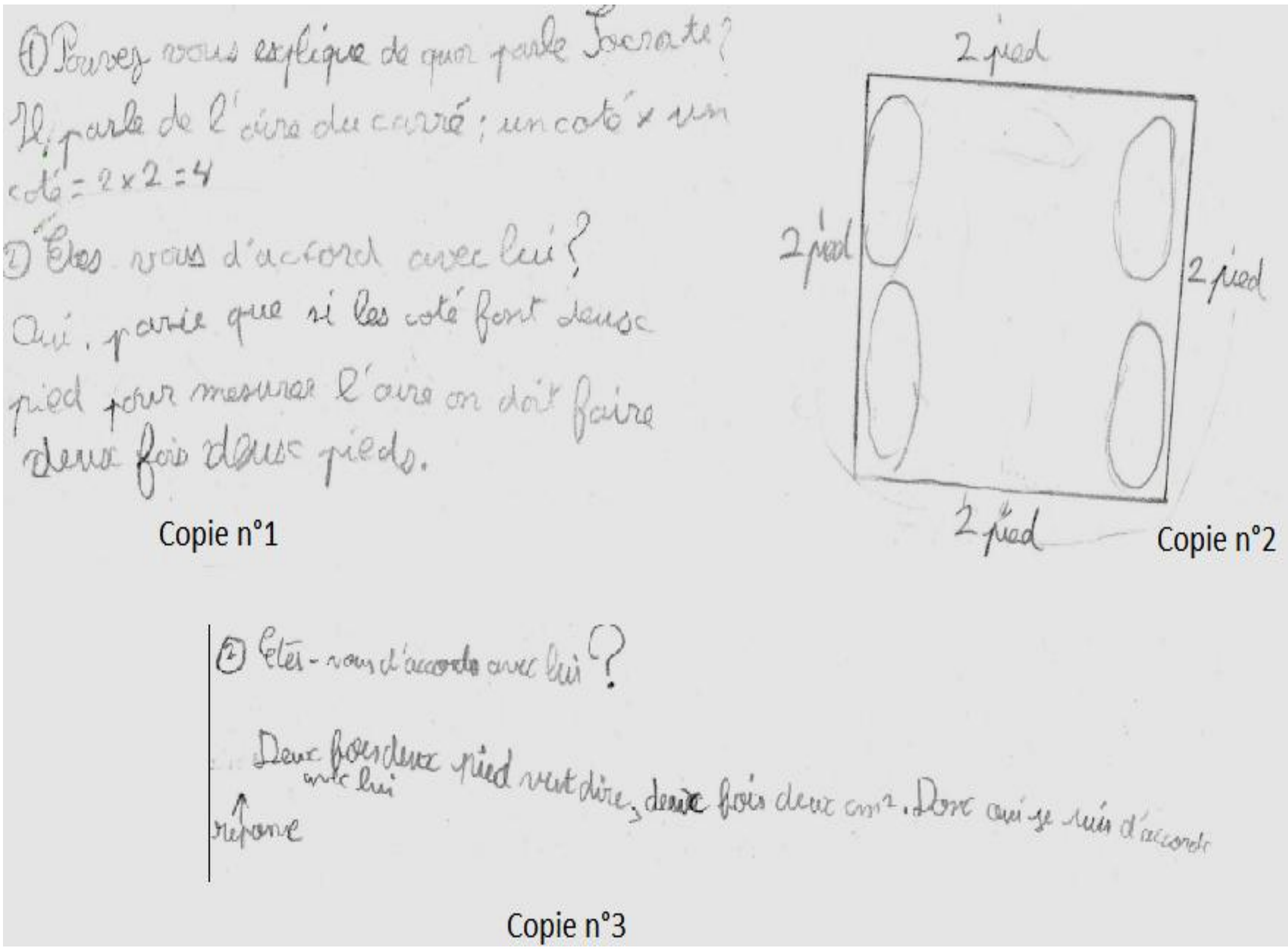


Figure 3 *– Trois copies d'élèves de CM2*

La copie n°1 est représentative de la réponse majoritaire ; beaucoup d'élèves, de façon laconique, valident par « oui, car 2×2 = 4 ». La copie n°2 montre même un cas de représentation permettant d'accommoder l'ambiguïté du texte : les pieds dessinés désignent à la fois les longueurs (par leur côté le plus long) et – vraisemblablement – les pieds d'aire (par la partie de la surface sur laquelle ils sont dessinés). La copie n°3 montre un cas, rare, où l'élève rappelle le rôle du carré pour désigner l'unité d'aire. On voit que le bilan collectif est nécessaire pour montrer le caractère problématique de l'usage par Socrate d'un même terme pour désigner l'unité de longueur et l'unité d'aire associée. L'introduction du terme « pied carré » pour l'unité d'aire ne choque pas les élèves ; elle peut être proposée par certains. On peut aussi choisir de distinguer les « pieds de long » et les « pieds d'aire ».

Figure 4. 3 copies d'élèves de CM2

3. *Reformuler afin de préciser le lexique géométrique en jeu*

Platon n'utilisait pas un vocabulaire géométrique aussi précis que celui que l'on utilise aujourd'hui en cours de Mathématiques en CM2 et 6ème. Pendant qu'il décrit la figure à l'esclave, Socrate la construit, mais le lecteur ne la voit pas. Le texte est de surcroît riche en ambigüité lexicale. Outre celle entre les unités de longueur et d'aire, le mot « espace » signifie aussi bien « surface » qu'« aire », et le mot « lignes » signifie « côtés » ou « diagonales ». Le texte commence par la construction d'une première figure dont on ne sait si, par « lignes », Socrate entend « côtés » ou « diagonales », ce qui génère la possibilité de construire plusieurs figures différentes. Nous avons laissé d'abord les élèves interpréter seuls les consignes de construction de Platon. C'est par le contexte, et grâce à la lecture de la suite du texte que les élèves vont pouvoir choisir la bonne figure. De fait, la première partie du texte est un véritable programme de construction que le lecteur doit constamment reformuler afin de lever les ambigüités lexicales et de réviser la représentation initiale qu'il s'était faite de la figure.

Parmi les objectifs prescrits dans les textes institutionnels de France au cycle 3, il y a notamment celui de savoir identifier les objets géométriques élémentaires dans des figures complexes et celui d'utiliser les notations géométriques académiques pour nommer ces objets. Le texte de Platon permet d'une part de montrer l'intérêt, voire la nécessité, de l'usage d'un vocabulaire précis et non ambigu, et d'autre part, il rend possible un travail sur cet usage du lexique à travers une activité de traduction du texte en un programme de construction d'un type attendu en CM2 et 6ème. Les travaux des élèves et enregistrements prouvent d'ailleurs que, bien loin d'embrouiller ou de conforter les élèves dans des usages ambigus du lexique géométrique, la compréhension du texte a imposé à tous de reformuler le vocabulaire géométrique pas à pas afin de construire la figure en suivant la chronologie du texte historique.

RÉFÉRENCES

Cèbe, S., Goigoux, R. (2009). *Lector & Lectrix. Apprendre à comprendre les textes narratifs. CM1-CM2-6^{e}-Segpa*. Paris : Retz.

Chorlay & al. (2018). Doubler le carré avec Platon. In M. Moyon & D. Tournès (Éds.), Passerelles : Enseigner les mathématiques par leur histoire au cycle 3 (pp. 122-147). Ressources et formation, ARPEME.

Kosyvas, G., Baralis, G. (2010). *Les stratégies des élèves d'aujourd'hui sur le problème de la duplication du carré*. Repères IREM 78, 13-36.

Platon (1967). *Protagoras ; Euthydème ; Gorgias ; Ménexène ; Ménon ; Cratyle* (trad. et notes E. Chambry). Paris : Garnier-Flammarion, 344-352. Disponible en ligne sur http://gallica.bnf.fr