

CAROLINE BULF

LE ROLE DE LA SYMETRIE DANS LA NATURE DU TRAVAIL GEOMETRIQUE DES TAILLEURS DE PIERRE ET DES EBENISTES

Résumé. Nous avons mené des entretiens-actions auprès de tailleurs de pierre et ébénistes afin de déterminer la nature de leur traitement du concept de symétrie. Cette étude montre que les symétries repérées orientent leurs gestes vers des répertoires de techniques relativement figés. Les gestes des artisans peuvent provenir de résidus d'enseignement, d'une adaptation au contexte, d'un savoir ou savoir-faire de référence. L'intrication de ces facteurs est telle que l'on peut accorder au concept de symétrie un statut qui rend compte de toutes ces influences, autrement dit un concept « naturalisé ».

Mots-clés. Géométrie euclidienne, transformations du plan, symétrie, espaces de travail géométrique, tailleurs de pierre, ébénistes.

Introduction : une problématique pratique chez les artisans

Cette recherche s'inscrit dans une recherche plus générale sur les effets de la symétrie axiale sur la conceptualisation des isométries planes et sur la nature du travail géométrique au collègue. D'après la théorie des champs conceptuels de Vergnaud (1991), l'étude d'un tel concept n'a du sens que si l'on s'intéresse à son processus de conceptualisation. Or, l'étude des processus de conceptualisation se réalise à partir de la conduite d'individus en situation (de référence). La recherche de l'observation d'un concept dans l'action est donc cohérente avec la recherche de situations professionnelles qui « référerait dans l'action » au concept de symétrie. La pratique professionnelle des artisans tailleurs de pierre et ébénistes se situe dans une problématique pratique soumise à des contraintes professionnelles (telles que l'efficacité, le temps, le coût, le matériel, etc.). Leur savoir de référence est malgré tout la géométrie euclidienne, mais il s'agit d'une géométrie de construction et non d'une géométrie pour la démonstration. Ainsi, le contexte de l'artisanat offre a priori un contexte privilégié pour observer le concept de symétrie dans une perspective non mathématique et dans l'action. Et ceci nous apportera donc a priori des éléments sur le concept de symétrie et sa conceptualisation. On peut même supposer qu'ils sont en quelque sorte des « experts » du concept de symétrie d'un point de vue du sens commun, car leur pratique concerne justement la réalisation de ces motifs symétriques qui ornent notre vie quotidienne. Historiquement, il est cohérent de s'intéresser à ce concept dans une problématique pratique car la symétrie a d'abord été reconnue comme un savoir (faire) pour l'art et l'architecture avant d'être reconnue comme un objet mathématique au XVIIIème siècle avec l'émergence de la géométrie analytique, puis des transformations. Keller (2004) montre même que la symétrie, dans une problématique pratique aux temps préhistoriques, fraie la voie aux prémices de la géométrie telle que nous la connaissons aujourd'hui.

Cadre théorique et questions de recherche

1. La théorie des champs conceptuels

Vergnaud place au cœur du processus de conceptualisation la notion de représentation du réel, dont l'étude est révélée à travers l'activité humaine. Il s'inspire de la notion de schème proposée par Piaget pour décrire l'organisation de la conduite d'un sujet dans une situation donnée. Vergnaud organise un concept selon trois critères (S, I, s) où S représente l'ensemble des situations qui donnent du sens au concept (la référence), I est l'ensemble des invariants

sur lesquels repose l'opérationnalité des schèmes (le signifié), et s est l'ensemble des formes langagières ou non qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement (le signifiant). Vergnaud enrichit la notion de schème et définit le schème comme « l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situation donnée. Le schème fonctionne comme un tout : c'est une totalité dynamique fonctionnelle, une sorte de module finalisé par l'intention du sujet et structuré par les moyens qu'il utilise pour atteindre son but » (Merri, 2007) (Vergnaud, 1991). Le couple {schème, situation} devient ainsi fondamental dans l'étude de l'activité observée. On distingue quatre sortes d'éléments organisateurs constitutifs du schème :

- le but et les anticipations
- les règles d'action
- les invariants opératoires dont en particulier :
 - les concepts-en-acte : éléments ou notions qui peuvent être pertinents ou non, qui sont mis en jeu et se révèlent naturellement lors de l'activité mathématique observée. Leur fonction est d'abord une fonction de sélection : retenir de la situation présentée ce qui est nécessaire et suffisant à l'atteinte du but.
 - les théorèmes-en-acte : propositions tenues pour vraies sur le réel, qui sont vraies ou fausses, mises en place instinctivement, et suite aux interactions avec le milieu.
- les inférences (ou raisonnements) qui permettent de calculer les règles et les anticipations à partir des informations et du système d'invariants opératoires dont dispose le sujet (Merri, 2007) (Vergnaud, 1991).

L'étude des concepts et théorèmes-en-acte se révèle cruciale dans la description d'un schème dans une classe de situation donnée. Leur organisation et leurs inférences décrivent les invariants opératoires qui constituent le schème.

2. Les paradigmes géométriques et ETG

Le cadre proposé par Houdement et Kuzniak (2006) nous offre un cadre théorique pour décrire le travail de l'artisan, mais cette fois d'un point de vue géométrique. Inspirés par la définition de paradigme selon Kuhn et des travaux de Gonseth sur les différents modes de pensée tels que l'intuition, l'expérience et le raisonnement déductif, Houdement et Kuzniak ont catégorisé ces modes de pensées selon des paradigmes dits géométriques, qui se caractérisent par leur rapport à la réalité.

« - **la géométrie I** ou « géométrie naturelle » a pour source de validation la réalité, le sensible. [...] la géométrie I correspond déjà à un effort d'abstraction du réel, dans la mesure où la pensée sélectionne pour s'exercer certains aspects des objets s'ils sont matériels ou les traduit en schémas, comme par exemple des figures simples (cercles, carrés...). L'intuition, l'expérience et le raisonnement déductif s'exercent sur des objets matériels, ou matérialisés, grâce à la perception ou la mise en œuvre d'expériences mécaniques réelles comme le pliage, le découpage ou leur pendant virtuel. En ce sens, la géométrie d'Euclide n'est pas de la géométrie I.

- **la géométrie II** ou « géométrie axiomatique naturelle » : dans cette géométrie, la source de validation se fonde sur les lois hypothético-déductives dans un système axiomatique aussi précis que possible. Mais le problème du choix des axiomes se pose. La relation avec la réalité subsiste encore dans cette géométrie, dans la mesure où elle s'est constituée pour organiser les connaissances géométriques issues de problèmes spatiaux. L'axiomatisation proposée est certes une formalisation, mais elle n'est pas formelle car ici la syntaxe n'est pas coupée de la sémantique qui renvoie à la réalité. D'où la conservation du qualificatif naturelle ». (Houdement et Kuzniak, 2006, pp. 180-181)

S'ajoute à cette catégorisation la notion d'Espace de Travail Géométrique (ETG) pour décrire plus finement l'activité géométrique, que la simple distinction GI-GII ne permet pas, en général, d'appréhender.

« Nous désignerons sous le terme d'espace de travail géométrique (ETG) l'environnement organisé par et pour le géomètre de façon à articuler, de façon idoine, les trois composants suivants:

- **un ensemble d'objets**, éventuellement matérialisés dans un espace réel et local,
- **un ensemble d'artefacts** qui seront les outils et instruments mis au sens du géomètre, et enfin
- **un référentiel théorique** éventuellement organisé en un modèle théorique ». (Ibidem, p. 184)

Les composants de l'ETG s'organisent et s'adaptent au statut du géomètre et donc au but que celui-ci s'est fixé. Nous parlerons également d'adaptation des schèmes d'action que l'on retrouve au cœur de l'organisation des trois pôles constitutifs de l'ETG dont on essaie de montrer qu'ils ne dépendent pas seulement du statut du géomètre ou de ses buts à atteindre. En effet, nous souhaitons regarder si le concept même de symétrie est un des facteurs dans l'adaptation des schèmes (et si oui, comment) et donc dans l'organisation même de l'ETG.

3. Question de recherche

Notre intérêt dans ce travail porte sur la place de la géométrie dans l'espace de travail des artisans, et sur la nature de cette géométrie à travers l'étude du concept de symétrie. Ces questions sont directement liées à des questions de recherche concernant la place de la dialectique GI-GII dans la progression du raisonnement en géométrie. Nous nous situons ici dans un paradigme a priori GI où le concept de symétrie n'est pas utilisé sous sa forme mathématique, c'est-à-dire en tant que transformation du plan. La question principale à laquelle nous tenterons de répondre est donc : quelle est la nature du concept de symétrie dans un paradigme a priori exclusivement GI, et quelle est sa place dans l'espace de travail géométrique personnel de l'artisan (ETG) ?

Méthodologie

1. Inspirée par les travaux antérieurs sur le rôle des mathématiques en voie professionnelle

Ces dernières années, de nombreux travaux se sont intéressés aux mathématiques dans l'enseignement professionnel (Bessot & Laborde, 2005) (Laborde & Pastré, 2005) (Straesser, 2000, 2007) ou sur les mathématiques dans l'activité professionnelle (Noss, Hoyles & Pozzi, 2000) (Williams & Wake, 2007). Bessot et Laborde ont analysé les activités de lecture-tracé du bâtiment, en particulier les activités de contrôle. Les auteurs ont observé cette situation dans une institution de formation professionnelle avec des élèves de BEP en atelier. Les auteurs ont dans un premier temps décrit l'activité observée en termes de procédures, puis à partir de leurs observations et des formulations des élèves, elles ont dégagé certains invariants dans l'activité observée « dans les termes d'une géométrie en acte en se référant à la géométrie euclidienne ». Elles mettent ainsi en évidence l'existence d'objets géométriques analogues à ceux de la géométrie euclidienne, que l'on peut exprimer en termes de concepts-en-acte et théorèmes-en-acte et définissent ainsi une véritable « géométrie en acte des tracés, instrumentée et contrainte par le système de cotes ». Noss et al. ont analysé les mathématiques impliquées dans des contextes professionnels très différents : ceux des employés de banque, des infirmières et des pilotes. Leur activité mathématique commune consiste à minimiser la marge d'erreur. Les auteurs nous rapportent alors que les savoirs mathématiques repérés par les professionnels portent sur des savoirs relativement élémentaires. Ils fonctionnent de façon locale, contextualisée, avec un fort niveau d'implicite des modèles utilisés et ayant une connexion étroite avec les outils. Les savoirs mathématiques visibles dans les pratiques sont ceux dérivés des savoirs scolaires. Ils utilisent le symbolisme mathématique conventionnel et les représentations usuelles tels que : nombres, représentations graphiques, tables, formules, etc. ainsi que des concepts, méthodes et techniques scolaires qui ont été quelquefois adaptées

à la contingence ou routinisées par la pratique. D'autres recherches montrent que les mathématiques dans la pratique fonctionnent comme des « boîtes noires » (Straesser, 2000) ou comme des « mathématiques cristallisées » (Williams & Wake, 2007) : « les concepts et procédures mathématiques sont si intégrés dans la pratique et le fonctionnement du monde du travail qu'ils ne sont plus perçus comme quelque chose de spécifique par rapport aux mathématiques ». Elles ne surgissent qu'en cas de difficulté : « breakdown », qui signifie que le professionnel se retrouve en difficulté (voire régresse) lorsque la situation est légèrement différente de celle qu'il a l'habitude de résoudre.

2. Entretiens-actions dans les ateliers des artisans

Nous avons rencontré quatre tailleurs de pierre (nous noterons TP) et trois ébénistes (TB pour Tailleur de Bois) dans leurs ateliers. Nous avons mené des entretiens exploratoires semi-directifs à partir de photos de motifs de la Cathédrale Notre Dame de Paris et des cas de figures courants en taille de bois tels qu'une volute, révélant différents cas de symétries (tableau 1). Les questions portent principalement sur le tracé du motif et sa réalisation, en essayant d'insister sur la justification des techniques, des instruments et des moyens de contrôle. Il s'agit d'une situation d'action dans laquelle on retrouve une phase de communication et de validation afin de faire parler et réfléchir les artisans sur leurs propres actions. Comme Bessot et Laborde le rappellent : « moins une tâche est problématique, plus les actions pour la réaliser sont transparentes et donc difficiles à expliciter » (Bessot & Laborde, 2005). D'où l'intérêt que l'entretien se déroule dans leurs ateliers, où ils se retrouvent dans leur environnement familier et peuvent alors appuyer leur discours par de courtes démonstrations avec leurs propres outils.

Le corpus regroupe les retranscriptions de tous les entretiens dont certains extraits sont donnés dans le développement de ce papier, quelques photos et vidéos, ainsi que le recueil des dessins et figures réalisés lors des entretiens.

3. Les tâches observées

Nous avons demandé aux artisans comment ils s'y prendraient pour reproduire chaque motif présenté (tableau 1). La question est volontairement exposée sous peu de contraintes afin de laisser l'artisan libre de choisir ses propres contraintes. Ces types de motif sont courants dans des situations de restauration, de création, ou encore de simple copie. Les situations étudiées ici sont des situations de communication sur une « possible » reproduction d'un motif photographié qui présente des symétries (on entend ici le sens commun de symétrie, c'est-à-dire des éléments semblables) dans le plan. Ainsi, l'artisan se situe dans les situations (et donc contraintes) qui lui sont les plus familières. Le motif dit le plus « simple » est celui de la fleur de Lys (fig. 1) et a été présenté en premier. L'unique axe de symétrie est vertical dans le sens de la gravité. L'analyse des tâches donnée ici porte principalement sur la reconnaissance des transformations laissant invariante la figure donnée car l'enjeu des entretiens porte sur le rôle joué par la symétrie axiale et les concepts qui la caractérisent. Rappelons que nous nous intéressons à la nature de l'Espace de Travail Géométrique de l'artisan, organisé par la nature du concept de symétrie en jeu et l'organisation des tracés, ainsi que l'instrumentation sollicitée.

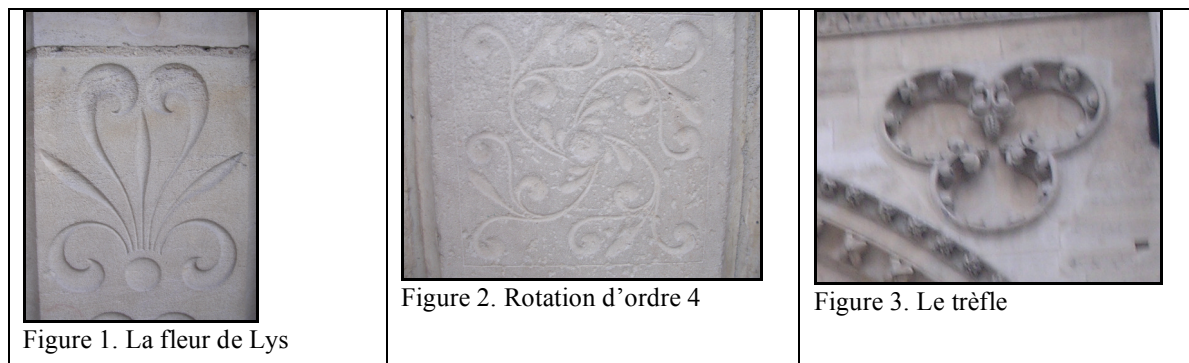


Tableau 1. Extrait des figures proposées aux artisans.

Dans la figure 1, l'axe est suggéré par la tige et le centre du cercle situé à la base. On suppose cette figure comme un cas simple de reproduction. Si l'artisan suppose avoir à disposition une moitié du motif et à une échelle accessible, on suppose la technique du calque ou du gabarit la plus sollicitée. Si l'artisan suppose n'avoir à disposition que cette photo comme modèle, on peut supposer qu'il va rechercher à tracer la moitié et dispose alors de techniques propres à son métier pour retrouver des motifs tels que celui de la fleur de Lys, plutôt commun, mais dont les arcs de cercle semblent impliquer des techniques plus complexes. La figure 2 n'est pas un motif symétrique sous une symétrie axiale. Nous qualifions cette figure de complexe car elle suggère tout de même des parties superposables. On peut cependant imaginer des pliages successifs pour obtenir un modèle à partir d'un quart de la figure (en tant que composées de symétries axiales). Il s'agit d'une figure invariante sous :

- symétrie centrale de centre le centre de la figure
- rotation de centre le centre de la figure et d'angle $\pi/2$ [π].

Cette figure se compose de plusieurs volutes, qui sont des motifs fréquents en taille de pierre ou de bois, et qui sont symétriques par symétrie centrale.

La figure 3 est une figure globalement invariante sous :

- rotation de centre le centre de la figure et d'angle $2\pi/3$ [π]
- symétrie axiale (3 axes possibles).

Cette figure, évoquée après la fleur de Lys, est une figure complexe mais très courante dans la taille de pierre. De même, selon les contraintes que se donne l'artisan, le modèle est a priori reconstitué directement par tracé à partir de techniques routinières chez l'artisan.

La symétrie : Concept naturalisé, organisateur de la conduite

1. Structuration de l'espace et déconstruction de la figure

Ce paragraphe décrit la mise en place de l'Espace de Travail Géométrique de l'artisan. Nous avons développé une approche similaire à celle de Bessot et Laborde, c'est-à-dire qu'à partir de nos observations et de leurs formulations, nous avons dégagé certains invariants dans l'activité observée « dans les termes d'une géométrie en acte en se référant à la géométrie euclidienne » (Bessot et Laborde, 2005).

L'artisan « prépare » son espace personnel en déterminant les repères extra-figure (le support et le cadre de la figure sont indépendants de la figure) qui supporteront la figure. Les repères intra-figure (dépendants de la figure) « structurent » la figure de manière la plus adaptée, d'après l'artisan, au problème pratique posé. Le tailleur de pierre ou l'ébéniste s'approprie la situation en construisant oralement et dans la pratique son ETG personnel, qui décrit le rapport particulier entre :

- la figure donnée
- l'environnement dont l'artisan dispose

- et l'artisan.

Dans tous les cas, le premier rapport est celui de la perception « d'un œil entraîné ». Puis, les artisans cherchent un référentiel pour situer le motif dans un autre ensemble :

TP1 : « Il faut que j'aie les dimensions, pour pouvoir me dire dans quel cadre ça rentre et dans quel bloc capable, j'entends par là les dimensions maximales de l'ouvrage, une fois que j'ai les dimensions par rapport à un axe ou des cotes. (...) Il est inscrit dans une surface plane. (...) Pour vérifier que le motif est bien cadré sur cet axe et que j'ai le bon axe. (...) C'est-à-dire on trace un trait droit, qui sera l'axe, on prend les dimensions capables, on prend les contours, ensuite on reprend les cotes déterminantes, et ça va nous déterminer l'emplacement du motif (...) donc l'axe vertical me permet de faire une symétrie correcte, en fait, c'est une croix, ça cale quelque chose, je ne sais pas comment vous expliquer ça, c'est une cible en fait. Si je trace la même croix sur un morceau de pierre et que je la fixe au calque à cet endroit, ça me permet de caler les choses. »

La symétrie axiale apparaît comme un repère topographique essentiel dans la réalisation de ce « cadre » qui détermine la surface travaillée. L'axe de symétrie sert de repère de mesure (et constitue l'origine de ce repère) et se comporte comme un véritable outil puisqu'il « cale quelque chose ». La contrainte réelle de l'espace (en 3D) est permanente, et l'épaisseur nécessaire du bloc de pierre et la nature de celle-ci sont des éléments importants qui conditionnent le reste du travail. Le motif doit être situé « par rapport » à un autre ensemble et non pas aléatoirement, et doit être « bien » situé. Cet espace détermine alors le support de l'ETG réel et personnel de l'artisan. Ce dernier peut ensuite s'appliquer à la déstructuration du motif (à partir des éléments intra-figure). Les artisans effectuent alors un travail de reconnaissance des objets connus (cercle, carré...). Et plus généralement, ils recherchent « des rythmes, des régularités » mesurables. A propos de la figure 3, TP2 : « Il y a un point central, il y a des lignes de convergence, il y a un cercle par ici. (...) Il suffit de partir d'un carré comme ceci ». La reconnaissance d'éléments symétriques et d'axes de symétrie apparaît comme systématique et consciente chez l'artisan, TP4 : « C'est simple, tout motif a un axe ». On retrouve la volonté de reconnaître une esquisse de système de coordonnées de type cartésien. Ils recherchent des axes dits « cibles », qui sont orthogonaux (paire d'axe horizontal et vertical) et sont clairement utilisés comme repères de mesures. Finalement, ils mettent en évidence les caractéristiques, les « régularités » qui révèlent les invariances de la figure d'abord par symétrie axiale. C'est une préparation souvent nécessaire à la construction du calque, outil prépondérant chez les tailleurs de pierre, et qui amène donc l'artisan à certains invariants opératoires propres à cette préparation. L'ETG s'habille progressivement dans le but de devenir l'ETG personnel de l'artisan. Mais quels sont les moyens mis en œuvre pour réaliser cette structure ?

2. Mise en œuvre de l'ETG : répertoire d'objets de référence et de postulats

- **Le point** est cité dans la pratique par les tailleurs de pierre ou ébénistes en tant que repère de mesure (« cote », « épure »), ou en tant que support de construction (point d'intersection d'arcs de cercle), ou encore est reconnu comme un point particulier (« le point de centre » d'un cercle). Dans les ouvrages de référence (Chanson, 1988) (Ricaud, 1999) (ces deux ouvrages ont été les principaux cités en référence lors des entretiens), la définition proposée, « le point n'a pas de dimension, il n'est pas mesurable », est une définition proche de celle des Éléments d'Euclide : « un point est ce qui n'a pas de partie (indivisible) ».

- **La droite** est citée en tant que « ligne », « trait » ou « axe » et sera support de mesure (pour mesurer le milieu par exemple), support de position (repère visuel en donnant une «

structure » comme explicité précédemment) ou encore support de construction (construire un angle droit par exemple). Dans le tracé des artisans, une droite est définie par deux points, ils admettent donc tout naturellement le postulat 1 du livre premier d'Euclide : « de tout point à tout point on peut tracer une ligne droite ». Il y a également toutes les déclinaisons : parallèles, perpendiculaires, tangentes, sécantes et confondues, qui sont remarquées, recherchées et construites par les artisans. Dans les ouvrages de référence : la droite est « une succession de points se déplaçant dans une même direction » (et le plan est « engendré par le déplacement ininterrompu d'une droite ») (Ricaud, 1999) définition basée sur le mouvement, considération naturellement très prégnante chez les artisans.

- **Le cercle** est également cité par les artisans en tant que « rond », « courbe » ou « arc ». Il est utilisé en tant que support de construction (les points sont des « croisés d'arc »), ou comme repère de mesure via le compas (report de distance par petits arcs de cercle). Il est également support de structure d'un autre motif ou figure (cercle inscrit ou circonscrit : fig. 3) ou simple ornementation. D'après leur tracé et le discours associé, il suffit :

- **d'un centre et d'un rayon pour définir un cercle**, TP4 : « Toujours un axe et un point de centre dans un cercle ». Ce théorème-en-acte dont la formulation langagière des artisans correspond au postulat 3 du livre premier d'Euclide : « avec tout point comme centre et tout rayon, on peut tracer une circonférence ».

- **ou de trois points**, TP1 : « Si on prend trois points, il n'y a qu'un arc qui passe par ces trois points ». De même, ce théorème-en-acte correspond au théorème de géométrie : « par trois points non en ligne droite on peut faire passer une circonférence et une seule » (Hadamard, 1988). On retrouve ces définitions du cercle dans les ouvrages de référence.

Les artisans « disposent » ainsi d'un certain nombre de « postulats » du type d'Euclide définissant des objets de référence géométriques et les relations entre eux. Etant donné que les éléments sont visibles dans le discours des artisans - les formulations étant proches de celles relevées dans les ouvrages de référence -, on peut supposer que ces connaissances en acte sont soit des résidus d'un enseignement antérieur, soit le fruit d'une conception spontanée et intuitive. En effet, certains énoncés sont tenus pour vrais par l'artisan car ils se vérifient par perception ou construction immédiate. Par exemple, à propos de l'existence et de l'unicité d'un cercle à partir de trois points :

« TP1 : « C'est logique... j'arrive pas... j'ai pas de théorie, je perçois.

C : Il ne peut pas y avoir un deuxième arc ?

TP1 : Ben ça sera le même !

C : Il ne peut pas y en avoir un autre ?

TP1 : Ben par superposition, il peut y avoir autant d'arcs que vous voulez, mais comment dire, il ne peut pas y avoir, passant par ces trois points, un autre... Si le rayon qui passe par ces trois points est de 10, on pourra pas faire passer un arc avec un rayon de 2. »

3. Mise en œuvre de l'ETG : techniques routinisées

L'ETG personnel de l'artisan se construit à partir de son « œil entraîné », la mise en œuvre d'une instrumentation spécifique (fil à plomb, réglé (1), perroquet (2), compas, calque, etc.) et l'application de certaines techniques géométriques, comme par exemple la technique de la médiatrice.

« C : Comment vous tracez ce deuxième axe ?

TP1 : Alors soit je prends une équerre et un réglé qui va remplir entre les deux colonnes, soit même chose, je reprends à l'endroit où les axes vont se croiser et je reprends le milieu

d'un segment compris sur l'axe vertical de symétrie et je reprends un coup de compas à *égale distance des deux côtés*, j'écarte le compas *un peu plus grand que le centre*. »

Il obtient ainsi deux axes orthogonaux pour « caler » sa figure de manière instrumentée : soit en mesurant avec un réglé, soit avec le compas tout en appliquant la technique de construction de la médiatrice. Il s'agit de « mathématiques visibles » (Noss et al., 2000) car certains des artisans me confirment qu'il s'agissait d'une technique de l'école (certains me prenaient même en témoin : « vous savez... ») que l'on retrouve dans leur ouvrage de référence : « tracer une perpendiculaire au milieu AB. Avec une ouverture de compas un peu plus grande que la moitié de AB et en prenant successivement comme centre A et B, tracer les deux arcs mn et nm. La corde des deux arcs mn coïncide avec la perpendiculaire cherchée » (Chanson, 1988). La technique de la médiatrice permet de répondre à plusieurs tâches, comme par exemple :

- trouver le milieu d'un segment
- tracer un couple de droites perpendiculaires
- retrouver le centre d'un cercle.

Cette technique reprise par presque tous les artisans pour répondre au moins à l'une de ces tâches est clairement une routine, mais semble avoir été éloignée de son sens mathématique. En effet, dans le cas des techniques disponibles pour retrouver un centre de cercle, un même artisan se souvient de la technique de la médiatrice pour tracer un milieu ou un angle droit mais ne va pas jusqu'au bout de la technique pour en déduire le tracé du centre d'un bout de cercle donné alors qu'il commence par tracer la médiatrice à partir de deux points de ce cercle, TP1 : « Je vais prendre un segment [la corde], je vais trouver son milieu, soit par cote soit par croisé d'arc avec le compas [technique de la médiatrice]. Je prends la pointe de mon compas sur un côté que j'aurai déterminé, *j'envoie à l'œil plus loin que la moitié*, je trace un arc de cercle, la même chose sur l'autre point et je rejoins forcément, clac. (...) Et là-dessus je peux retrouver mon rayon... *mais je ne me souviens plus très bien...* »

Il finit par chercher à « tâtons » avec le compas le centre sur la médiatrice. On assiste à ce que Noss et Hoyles qualifient de *breakdown*, lorsqu'on tente d'ouvrir les boîtes noires, c'est-à-dire que l'artisan se retrouve dans une situation difficile car il cherche à expliquer la technologie d'une technique routinisée (en terme de Chevallard) et finalement va se contenter de la méthode « essais-erreurs », autrement dit à « tâtons ». Il s'agit de *mathématiques visibles* mais la raison mathématique semble opaque car l'artisan tente de nous faire comprendre que « le centre appartient toujours à la médiatrice d'une corde » qui fait écho à une forme d'axiome cristallisé que l'on retrouve dans le manuel de référence (Chanson, 1988), théorème 23 : « la perpendiculaire élevée au milieu d'une corde passe par le centre », puis « tracer deux cordes quelconques et élever les perpendiculaires au milieu de ces cordes. L'intersection des perpendiculaires nous donne le centre recherché. C'est une application du théorème 23 ». L'enchaînement ne se fait pas toujours mais l'origine de son utilisation dans la pratique vient d'un enseignement antérieur. Dans des situations plus complexes comme le cas des rotations d'ordres 3 et 4 (fig. 2 et 3), les artisans s'adaptent et reconstruisent la figure proposée afin de retrouver une situation connue. Ils reconstruisent la situation pour exhiber un (ou des) cas simple(s) de symétrie axiale. Ils procèdent donc à la reconnaissance et la mise en place des repères intra- et extra- figures, à la reconnaissance d'objets de référence inscrits ou circonscrits à la figure, au tracé d'axes (de symétrie, ou autres axes particuliers) et vérifient la conservation par superposition.

TP1 : « Alors vu que c'est symétrique, enfin *pas symétrique*, mais *régulier*, c'est un rythme régulier, en fait si *mon point de centre* est ici, je vais hop *prendre ce rayon* et *tracer un cercle* » (...) Bon imaginons je vais appeler 1, 2, 3 et 4, et puis a, b, c et d. Par exemple 1

devient a et b, donc l'autre ainsi de suite. (...) Il y a un *rythme carré en décalé*. Je vais chercher cet angle, je trace donc *mes perpendiculaires sur mon premier rythme puis le deuxième* (...) s'il est à reproduire *par rapport à un point de centre*, il suffit que je reproduise cette première partie par rapport à un axe. C'est *toujours par rapport à un axe*. Enfin moi je travaille toujours par rapport à un axe, enfin sur deux perpendiculaires. (...) Ça tourne par rapport à un point de centre, je vais tracer toutes les *lignes nécessaires* pour faire tourner toutes les structures du motif ».

4. Des théorèmes-en-acte intéressants pour décrire la symétrie centrale (volute simple)

- **la composée de deux symétries orthogonales**, TB1 : « On est *obligé de développer une première fois puis d'inverser* pour qu'il se retrouve complètement à l'opposé. »

La symétrie centrale est interprétée (et mimée) comme composée de deux symétries axiales dont les axes sont : un horizontal puis un vertical dans un même plan. On retrouve le rôle prépondérant de cette paire d'axes, signifiants de la composée de deux symétries axiales. On « développe » en deux temps : il s'agit de la succession de deux « dépliages ». Ce schème met en relation les concepts-en-acte de conservation, d'invariance globale et d'orientation. On peut faire l'hypothèse que l'origine de cette conception vient d'une technique propre à l'ébénisterie : la marqueterie. En effet, cette technique consiste à reproduire un motif issu d'une fine tranche de bois par « développement » en 3D (puisqu'on plie et déplie une feuille de bois) en suivant des composées de symétries axiales d'axe horizontal ou vertical, ou des composées de translation (développement 2D), ou encore des composées de symétries axiales et translations, autrement dit des symétries glissées. Ainsi, dans le cas de la volute simple, on retrouve les gestes quotidiens et routiniers associés à ceux de la marqueterie, d'où la mise en œuvre naturelle de composées de symétries axiales. L'ébéniste est partie intégrante du système et nous décrit une géométrie qui s'anime autour de lui.

- le demi-tour autour d'un axe normal au plan

TB3 : « Ah oui. Elle est pas symétrique. Ah ben il faut *tourner autour de l'axe*, c'est tout. Pas besoin de faire l'autre côté. A ce moment-là, pas besoin de faire l'autre côté, je prends ça et je tourne comme ça et je la fais ici, c'est une histoire de pivotage, ça reste un axe comme celui du compas.

C : [en me parlant à moi-même en prenant des notes] : Retournement du calque...

TB3 : Euh non j'appellerai pas ça un retournement, c'est un pivotement. Pour moi un retournement c'est ça : [il mime le retournement d'une feuille comme pour la symétrie axiale]. Et j'ai fait la figure à l'envers. Pivotement, ça ne fait pas très français, je ne sais pas quel mot il faudrait employer... rotation autour de l'axe, rotation de la feuille ou rotation en opposition.

Pour lui, cette transformation n'est pas symétrique. Il conçoit la symétrie centrale comme une rotation de centre le « centre » de la volute et d'angle π , mais non pas explicitement autour du point de centre, mais autour d'un axe, perpendiculaire au plan de la volute, « comme le compas ». Il situe son ETG en 3D (de la même manière qu'un tailleur de pierre passe en 3D avec le fil à plomb pour repérer la verticale normale au plan). TB3 associe une fois de plus ses gestes à la transformation (tout comme TB2 et la technique de la marqueterie). On peut faire l'hypothèse que cela vient d'une « mémoire gestuelle ». Cet artisan dispose en fait d'un répertoire de tâches et de techniques routinisées mais aussi des « gestes routinisés », notamment avec le compas, qu'il adapte selon le type de tâches, car il est sculpteur de bois, et ne réalise pas autant de marqueterie que TB2, qui lui est ébéniste.

Conclusion : une géométrie en acte organisée mais figée

1. Vers une théorie de l'approximation dans la pratique

La mise en pratique de connaissances géométriques acquises au cours d'un enseignement antérieur et les connaissances acquises au cours de l'expérience propre de l'artisan sont fortement intriquées. Autrement dit, les liaisons existantes entre les deux ont été polies par la pratique. On ne peut définir l'origine de certains postulats tirés de leurs discours qui accompagnent leur geste : comme par exemple « par trois points passe un unique cercle » ou « un point de centre et un rayon suffisent pour définir un cercle ». On retrouve une formulation semblable à celle de leurs ouvrages de référence de géométrie, mais ils l'expliquent de manière pragmatique. Leurs techniques de tracé, pour construire une droite orthogonale (verticale) ou un milieu ou un centre, sont dérivées de techniques de constructions géométriques telles que celle de la médiatrice, de la bissectrice ou encore certains théorèmes de projection de droites, d'intersection des médiatrices de cordes, etc. Ces techniques se retrouvent dans leurs ouvrages de référence mais ont été tellement routinisées dans leur pratique qu'elles ne sont pas adaptables à d'autres situations un peu différentes.

L'Espace de Travail Géométrique personnel de l'artisan se décrit comme l'interaction entre l'espace réel, les modèles théoriques et les artefacts. L'ensemble des objets de référence, des tâches et des techniques semble figé et est sollicité quel que soit l'espace local en jeu. Cet espace est décomposé et déstructuré. L'ensemble des outils permettant cette réalisation est dense et très spécifique au corps du métier. Cette très forte instrumentalisation semble accentuer alors le phénomène de cristallisation et condamne l'existence « des boîtes noires ».

L'ETG personnel est centré sur l'artisan. Son point de vue est une autre composante importante qui oriente ses gestes. Il évolue dans une géométrie intuitive, mesurable, manipulable, en mouvement, dans un paradigme GI « sophistiqué ». Il ne semble se détacher du système uniquement en situation de breakdown. Les artisans mettent alors au point des « stratégies d'ajustement ». Ils approchent le résultat recherché par des techniques qui leur sont familières et qui leur donnent un résultat satisfaisant dans la pratique. On assiste à une volonté de « théoriser » leur Espace de Travail Géométrique pour le rendre le plus efficace possible et le plus proche de la solution exacte possible, d'où le détournement de certaines techniques mathématiques à des fins pratiques.

2. Le concept de symétrie comme principe organisateur dans l'action

Les invariants opératoires propres à la symétrie axiale se retrouvent dans tous les répertoires d'objets géométriques, de tâches et de techniques. Le schème de bidécomposabilité se révèle être le plus prégnant. La déstructuration des figures rencontrées ici a impliqué un vaste réseau de droites largement dominé par la recherche d'axes de symétrie dont le statut est variable (origine de mesure, repère de position, pli, frontière...). La recherche des « rythmes réguliers » est le moteur organisateur de l'ETG des artisans. Le concept de conservation étant induit, leur moyen de contrôle repose sur le principe de superposition des parties « semblables ». Ces invariants opératoires, caractéristiques de la symétrie axiale (bidécomposabilité et axes) se retrouvent alors adaptés dans les situations des rotations d'ordre 3, 4 et même dans le cas de la symétrie centrale, mais peuvent conduire à un retour à des méthodes plus « naïves » (« essais-erreurs »). Dans tous les cas, il s'agit d'une géométrie dynamique animée par une mémoire gestuelle dont les invariants opératoires laissent présager une *théorie de l'ajustement*. L'intrication des objets de référence, des postulats et des techniques tirés des apprentissages précédents des artisans ou de leurs propres conceptions nous incite à penser que le concept de symétrie dont ils réfèrent n'est pas comme une conception experte du concept familier, ni une conception antagoniste à une conception scientifique mais plutôt comme un concept

intermédiaire, que l'on pourrait qualifier de « naturalisé ». Ce type de concept fait écho au « concept pragmatique » défini par Pastré (2002) dans le cadre de la didactique professionnelle, qui définit un concept pragmatique par son caractère organisateur, qui se construit dans l'usage et qui présente une dimension sociale. Il nous resterait à approfondir une telle approche notamment au niveau méthodologique et à observer des situations professionnelles « réelles » et non pas « fictives », comme cela a été le cas dans nos entretiens-actions.

Notes

Ces définitions proviennent de l'ouvrage de Jean VIGAN (1994) *Dictionnaire général du bâtiment*, Le petit Dicobat, Rig-Orangis : Arcanture.

(1) **Un réglé** ou règle : « Toute baguette ou latte parfaitement rectiligne, graduée ou non, utilisée pour le tracé de traits droits. » (Une particularité du réglé est qu'il n'y a pas de bords contrairement à la règle ordinaire graduée de l'écolier).

(2) **Un perroquet** : « Règle plate incurvée, utilisée pour tracer de longues courbes ».

Références

BESSOT, A. & LABORDE C (2005) *Vers une modélisation d'une géométrie en acte dans les activités de lecture-tracé du bâtiment*. In : C. CASTELA et C. HOUEMENT (Eds.) (pp. 39-76) Paris : Editions ARDM et IREM de Paris 7.

EUCLIDE (1994) *Les éléments d'Euclide, traduction et commentaires de B. Vitrac* Paris : PUF.

HADAMARD J. (1898) *Géométrie Plane - leçons de géométrie élémentaires*, Sceaux : Editions Jacques Gabay 1988.

HOUEMENT C. ET KUZNIAK A. (2006) Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie, *Annales de didactique et de sciences cognitives*, **11**, 175-193.

KELLER O. (2004) *Aux origines de la géométrie : le paléolithique et le monde des chasseurs cueilleurs*, Paris : Vuibert.

LABORDE C. ET PASTRE P. (2005) *Activités et formation professionnelles : simulations informatiques comme aide à la conceptualisation*. Grenoble : Laboratoire Leibniz, Université Joseph Fourier.

MERRI I. (dir.) (2007) *Activité humaine et conceptualisation, questions à Gérard Vergnaud*, Toulouse : Presse Universitaire du Mirail.

NOSS R., HOYLES C. & POZZI S. (2000) *Working knowledge: Mathematics in use*, in: BESSOT A & RIDGWAY J. *Education for Mathematics in the workplace*, Mathematics Education Library Kluwer Academic Publishers, **24**, 17-35.

PASTRE P. (2002) L'analyse du travail en didactique professionnelle, *Revue française de Pédagogie*, **138**, janvier-février-mars, 9-17.

STRAESSER R. (2000) *Mathematical means and Models from vocational contexts – a german perspective*, in BESSOT A & RIDGWAY J. *Education for Mathematics in the workplace*, Mathematics Education Library Kluwer Academic Publishers, **24**, 65-80.

STRAESSER R. (2007) *À propos de la transition du secondaire vers le monde du travail*, in : ROUCHIER A. ET AL. (éd.) *Actes de la XIIIème École d'Été de Didactique des Mathématiques*, Grenoble : La Pensée Sauvage, 177-186.

VERGNAUD, G. (1990) La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, **10 (2-3)**, 133-170.

VYGOTSKI L. (1934) *Pensée et Langage*, Paris : La dispute (édition 1997).

WILLIAMS J. & WAKE G. (2007) Black boxes in workplace mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, **64**, 317-343.

Ouvrages de référence de taille de pierre et d'ébénisterie

CHANSON L. (1988) *Traité d'ébénisterie*, Dourdan : H. Vial (15ème édition).

RICAUD P. (1999) *Tracés d'Atelier et géométrie Tome 1 et Tome 2*, Dourdan : H. Vial.

CAROLINE BULF
Équipe DIDIREM, Laboratoire André Revuz
Université Paris Diderot (Paris 7)
bulf@math.jussieu.fr