

LA CONNAISSANCE DES FUTURS ENSEIGNANTS DE MATHÉMATIQUES : UNE ÉTUDE PAR L'APPROCHE INTERDISCIPLINAIRE. LE CAS DE LA NOTION D'INTEGRALE

LÊ^{*} Thi-Hoài-Châu – NGÔ^{**} Minh-Đức

Résumé – L'interdisciplinarité dans l'enseignement des mathématiques est considérée comme une nécessité pour donner du sens aux apprentissages des élèves. Les difficultés observées chez les enseignants de mathématiques dans la mise en œuvre de pratiques suivant cette approche sont à l'origine de nos questions sur la formation. Dans cette communication, nous essaierons de mettre en évidence des éléments à introduire dans la formation. La notion d'intégrale sera utilisée ici comme exemple.

Mots-clés : interdisciplinarité, enseignants, formation, physique, intégrale.

Abstract – Interdisciplinarity in mathematics education is considered a necessity to make sense of student learning. The difficulties observed in mathematics teachers in practice following this approach are the origin of our questions about training. In this paper, we will try to highlight elements to introduce into the training. The concept of integral will be used here as an example.

Keywords: interdisciplinary, teachers, training, physics, integral.

I. INTRODUCTION

Certains travaux de recherches (par exemple Bautier et Rochex, 1998) ont insisté sur les difficultés éprouvées par les élèves de l'enseignement secondaire pour donner du sens aux savoirs qui leur sont enseignés dans le cadre des disciplines scolaires. La distance entre les savoirs scolaires "segmentés" et le "monde réel" non disciplinaire, fait de relations, de complexité et de globalité, a souvent été soulignée. De nouveaux types d'approches, qui rompent avec les logiques disciplinaires, ont été développés dans plusieurs pays. Parmi ces approches, l'interdisciplinarité est considérée depuis quelques dizaines d'années comme l'une des solutions pour donner du sens aux apprentissages des élèves. Ceci nous semble pertinent pour l'enseignement des mathématiques, science dont plusieurs branches ont émergé de problèmes extra-mathématiques.

Comment la pratique d'enseignement répond-elle à cette volonté institutionnelle ? Nos recherches portant sur l'observation en classe au niveau secondaire au Viêt-Nam montrent que les enseignants observés ont des difficultés dans la conception des situations d'enseignement qui permettent leurs élèves de reconnaître le rôle d'outil des mathématiques dans d'autres sciences. En tant que formateurs, nous nous demandons donc comment est prise en compte l'interdisciplinarité par la formation des enseignants de mathématiques ? Dans cette communication nous choisissons la notion d'intégrale pour étudier ce problème. Le résultat obtenu dégagera pour nous des points à revoir sur le dispositif et la stratégie de formation initiale. Remarquons qu'il ne s'agit pas pour nous de proposer une formation à un enseignement interdisciplinaire. Notre objectif est d'aller vers une formation qui apporte aux enseignants de mathématiques des connaissances utiles pour concevoir des situations d'enseignement prenant en compte l'interdisciplinarité dans le but de donner du sens au savoir à enseigner.

La notion d'intégrale donne aux enseignants des mathématiques une bonne occasion pour réaliser l'interdisciplinarité dans la pratique professionnelle. Dans une approche

^{*} Université pédagogique de Hochiminh ville – Viêt-Nam – chaulth@hcmup.edu.vn

^{**} Université pédagogique de Hochiminh ville – Viêt-Nam - k22ngominhduc@gmail.com

interdisciplinaire, nos premières questions qui se posent sur la notion d'intégrale sont les suivantes : dans la discipline d'enseignement "sciences physiques" enseignée au lycée, quels sont les types de tâches dont la résolution fait, de façon explicite ou implicite, intervenir l'intégrale ? Et que doivent connaître sur le plan mathématique les étudiants pour les résoudre ?

Le choix de la physique est suggéré par notre étude épistémologique sur la genèse de la notion d'intégrale (LÊ Thi-Hoài-Châu, 2004), d'une part, et par l'analyse institutionnelle de l'enseignement de physique aux lycées vietnamiens (NGÔ Minh-Duc, 2017), d'autre part.

Concernant la première question, l'analyse institutionnelle (cf. NGÔ Minh-Duc, 2017) portant sur l'étude du programme et des manuels de science physique enseignée aux lycées a mise en évidence les types de tâches suivants :

T1: Etant donnée la vitesse d'un point matériel en fonction du temps, trouver la distance parcourue dans un temps donné.

T2: Etant donnée l'accélération d'un point matériel en fonction du temps, trouver le changement de la vitesse.

T3: Calculer le travail effectué par une force variable.

A propos de la deuxième question, notre étude épistémologique montre l'importance de la formule Newton – Leibniz $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x) dx$ qui présente le lien entre les notions de dérivée et d'intégrale. Dans les manuels de mathématiques utilisés au niveau secondaire du Viêt-Nam, la dérivée est présentée explicitement comme l'outil nécessaire pour la résolution de plusieurs types de problèmes de physique. Mais ce n'est pas le cas de la notion d'intégrale. Dans ce contexte, un professeur de mathématiques peut exploiter ce lien pour trouver certains problèmes de physique dont l'intégrale est nécessaire. De plus, comme le graphique est souvent présent dans beaucoup de problèmes physiques, nous nous intéressons au comportement des futurs enseignants lorsqu'ils doivent trouver l'intégrale d'une fonction donnée uniquement par sa représentation graphique.

II. CONTEXTE DE RECHERCHE

Selon les programmes en vigueur dans les lycées vietnamiens, ces trois types de tâches sont tous étudiés en physique avant l'introduction de l'intégrale en mathématiques. Plus concrètement, ils apparaissent dans le programme de physique de la classe 10 (qui correspond à la seconde en France), tandis que l'intégrale est enseignée en classe 12 (qui correspond à la terminale). Avec cette contrainte, le manuel de physique ne peut pas utiliser explicitement l'intégrale.

Les trois types de tâches sont limités d'abord au cas où la vitesse pour *T1*, l'accélération pour *T2*, la force pour *T3* sont constantes. Les formules physiques sont construites en utilisant l'aire d'un rectangle. Ensuite, le manuel étudie le cas où ces quantités physiques sont uniformément variées. Pour introduire les formules correspondantes, le manuel raisonne sur la surface limitée par le graphique, de la vitesse par exemple, l'axe orienté de t , les droites $t = t_0$ et $t = t_1$. Cette surface est un trapèze. On divise l'intervalle $[t_0; t_1]$ en n petites parties pour pouvoir considérer que la vitesse est constante sur chaque partie. On dit que la distance est une approximation de la somme des distances trouvée sur chaque partie (en utilisant la formule vient d'être introduite). L'élève doit admettre enfin que la distance dans l'intervalle $[t_0; t_1]$ est l'aire du trapèze.

Le manuel ne peut pas démontrer ces formules parce que la limite et l'intégrale ne sont pas encore étudiées en mathématiques à ce niveau. Or, lors de l'introduction de l'intégrale en classe 12 (cf. Đoàn Quỳnh et Nguyễn Huy Doan, 2012), le manuel de mathématiques ne les démontrera pas, pas plus qu'il n'étudiera ces trois types de tâches dans les cas où les quantités physiques concernées (vitesse, l'accélération, force) sont non-uniformément variées. On constate donc l'existence d'une rupture entre les manuels de physique et de mathématiques utilisés au lycée.

Comment relier ces deux domaines scientifiques en formation des enseignants de mathématiques en général ? Comment faire pour que la formation aide les étudiants à reconnaître l'usage multiple de la notion d'intégrale dans l'enseignement de physique au lycée en particulier ? Cela nous semble d'autant plus important que l'absence de connaissance de ces usages est à nos yeux l'origine des difficultés relevées de la pratique professionnelle.

Les étudiants impliqués par notre étude sont en troisième année du curriculum de formation de l'université pédagogique portant sur 4 ans, qui vise à former de futurs professeurs de mathématiques qui enseigneront au niveau secondaire.

Il nous faut préciser qu'au Viêt-Nam la formation des professeurs secondaires est confiée aux universités pédagogiques. Le temps de formation universitaire est de 4 ans. Chaque étudiant est formé pour l'enseignement d'une seule discipline. Par exemple, dans notre université (Université pédagogique de Hochiminh ville), il y a autant de départements que disciplines : les professeurs de mathématiques, de physique, de biologie, de chimie, de géographie, d'histoire, etc. sont formés dans différents départements sans relations entre eux.

Le programme de formation des professeurs de mathématiques comporte 3 parties avec 125 unités au total. La première (27 unités) est consacrée à la philosophie, à l'informatique et à une langue étrangère (partie commune pour tous les départements). La deuxième (60 unités) porte sur les mathématiques pures. La dernière (38 unités) est une formation en sciences de l'éducation, psychologie et méthodologie de l'enseignement. Cette partie comprend deux stages (de 6 semaines en troisième année et puis 8 en quatrième) qui correspondent à 10 unités. Pendant les trois premières années, les étudiants sont formés en mathématiques, en psychologie et en sciences de l'éducation. Ils étudient la didactique en quatrième année, avant de suivre le deuxième stage dans un lycée.

III. METHODOLOGIE DE RECHERCHE

Nous avons proposé trois problèmes de physique à 32 étudiants de l'université pédagogique de Hochiminh ville. Chaque problème appartient à l'un des trois types de tâches précisés précédemment. Nous avons joué sur les valeurs de différentes variables didactiques lors de la conception des problèmes pour étudier le comportement des étudiants confrontés à la résolution de tâches en physique. Comment réagissent-ils lors de la nécessaire mobilisation du lien entre intégrale, surface et quantités physiques ?

IV. ANALYSE A PRIORI DES PROBLEMES

1. Problème 1

Un point matériel se déplace sur une droite. La vitesse qui varie en fonction du temps t ($0 \leq t \leq 24$, indiqué en secondes), est donnée par le graphique (figure 1).

Calculer la distance parcourue par ce point matériel dans les 24 premières secondes.

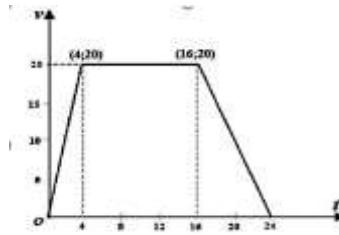


Figure 1

Stratégies possibles

Ce problème appartient au type de tâche *T1*.

En physique, la distance est calculée par la formule $S = \int_a^b v(t)dt$. Mathématiquement, il y a deux stratégies permettant de trouver $\int_a^b v(t)dt$, l'une est de nature géométrique et l'autre analytique. Pour la première, il s'agit d'utiliser des connaissances acquises en géométrie afin de chercher l'aire de la surface "en dessous" du graphique (qui est limitée par le graphique de $v(t)$, les droites $t = a$, $t = b$ et l'axe des abscisses). Pour la deuxième, on cherche l'expression exprimant $v(t)$ et on calcule l'intégrale avec la formule Newton-Leibniz. Nous les appelons respectivement "aire" et "primitive". De plus, il existe une troisième stratégie, appelée par nous la stratégie physique, pour laquelle on utilise les formules concernant des mouvements rectilignes uniformément variés.

- *Stratégie "aire" (S_A) :*

Ici, on calcule l'aire du trapèze dont les bases mesurent 24 et 12, la hauteur 20.

- *Stratégie "primitive" (S_{Pr}) :*

Trouver la fonction exprimant la vitesse en fonction du temps puis calculer l'intégrale de la vitesse.

Dans ce cas, la vitesse varie différemment suivant les trois intervalles de temps. Il faut donc trouver trois expressions. Pourtant, le fait que le graphique se compose de trois segments dont les coordonnées des deux extrémités sont données facilite la recherche des expressions. La solution est : $S = \int_0^4 5t dt + \int_4^{16} 20 dt + \int_{16}^{20} (-\frac{5}{2}t + 60) dt = \dots$

- *Stratégie "physique" (S_{Ph}) :*

Le problème concerne des mouvements rectilignes uniformément variés : l'accélération constante est donnée par la formule : $a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$. La distance se trouve par l'utilisation de l'une des deux formules suivantes :

$$S = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \quad (1)$$

$$S = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} \quad (2)$$

Dans le cas d'un mouvement uniforme la distance est : $S = vt$.

Ces trois formules sont étudiées en classe de dixième (cf, Nguyễn Thế Khôi et Phạm Quý Tu, 2012).

Dans le contexte du problème posé, la vitesse est donnée ici par le graphique et la surface "en dessous" est un trapèze dont l'aire peut être trouvée facilement. La stratégie "aire" est donc optimale. Les deux stratégies restantes ne sont pas difficiles non plus (parce que le graphique se compose des segments dont les coordonnées des extrémités sont données), mais plus compliquées par rapport à la première.

2. Problème 2

L'accélération en fonction du temps de deux points matériels $P1$ et $P2$ est donnée par la figure ci-dessous :

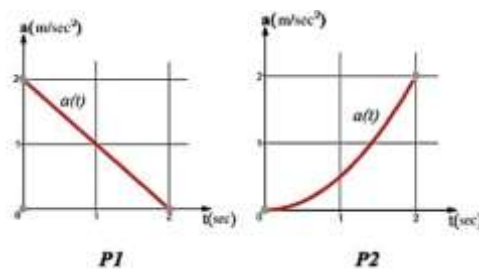


Figure 2

a) Notons que l'accélération de $P1$ varie suivant la loi : $a(t) = -t + 2$. Calculer le changement de sa vitesse du moment de $t = 0$ au moment de $t = 2$.

b) Quel point matériel a le plus grand changement de vitesse dans l'intervalle de temps $[0;2]$? Expliquer.

Stratégies possibles

La recherche de la réponse à la question a mène au type de tâche T2 (étant donnée l'accélération d'un point matériel en fonction du temps, trouver le changement de la vitesse). Dans le cas de la question 2b, comme l'accélération de $P2$ est non-uniformément variée, il est impossible d'utiliser les formules physiques introduites en classe de 10 où seulement des mouvements uniformément variés sont étudiés. Ainsi, on est obligé de calculer l'intégrale par la primitive ou par l'aire.

• Stratégie "primitive" (S_{Pr}) :

Utiliser la formule $\Delta f = f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$. Dans le contexte de ce problème, elle devient $\Delta v = \int_a^b a(t)dt$. Cette stratégie ne marche que dans le cas où l'expression de l'accélération est donnée ou peut être trouvée. Ainsi, cette stratégie permet de trouver facilement le changement de la vitesse de $P1$. Mais ce n'est pas le cas de $P2$. Plus exactement, la stratégie S_{Pr} ne donne qu'une valeur approximative du changement de la vitesse de $P2$.

• Stratégie "aire" (S_A) :

Dans le cas de la question a, le graphique de l'accélération est aussi donné. Comme la surface "en dessous" est un triangle rectangle, on peut trouver facilement la réponse par la stratégie S_A .

Pour la question b, il est difficile de trouver une expression exprimant approximativement la fonction de la vitesse, la stratégie S_A est donc optimale : il s'agit seulement de comparer deux aires qu'on peut évaluer facilement à l'œil nu et puis raisonner avec la figure.

3. Problème 3

Un objet se déplace sur une droite, de la position $s = 0 \text{ m}$ à $s = 3 \text{ m}$, avec une force F .

a) Supposons que F constante est la valeur de 5 N et a le même sens que celui du déplacement. Calculer le travail effectué par cette force pour tirer l'objet de la position $S = 0 \text{ m}$ à la position $S = 3 \text{ m}$.

b) En réalité, la force obéit à la relation $F(s) = 5 - \frac{1}{30}s^2$ (figure 3), avec F en Newton et s en seconde.

b1- Calculer approximativement le travail de la force.

b2- Proposer une autre méthode mathématique qui permet de calculer le travail de la force. Expliquer.



Figure 3

Stratégies possibles :

- Stratégie “physique” (S_{ph}) :

C’est une tâche de type T3. Dans le contexte de la question a, F est constante. Pour calculer le travail A effectué par la force F , les étudiants connaissent déjà la formule $A = F \cdot s$ introduite en physique. La stratégie S_{ph} ne marche plus dans le cas de b où F varie.

Pour la question b1, il s’agit de donner une valeur approximative, il est possible donc d’utiliser les deux stratégies suivantes.

- Stratégie “approché” (S_{App}) :

Diviser s en n partie s_i ($1 \leq i \leq n$). Sur chaque partie on peut considérer F comme constante, égal à F_i (déterminé sur le graphique) et peut donc trouver le travail A_i en utilisant la formule $A_i = F_i \cdot s_i$. Le travail à trouver est la somme des A_i .

Cette stratégie peut être mobilisée par les étudiants, parce que la méthode “division s en partie” a été présentée par le manuel de physique (classe de 10) lors de l’étude du travail d’une force non-constante. Le fait que le graphique est mis dans un gril facilite l’usage de S_{App} .

- Stratégie “aire” S_A :

Au moment d’introduction de la méthode “division s en partie”, le manuel précise que c’est l’aire de la surface (“en dessous” du graphique exprimant la force) qui est le travail.

Ainsi, les étudiants peuvent chercher sur la figure la valeur approchée de l’aire (en comptant les carrés ou en calculant la différence des aires de deux rectangles, grande et petite – la première déterminée par $F = 5$ et $s = 3$, la deuxième par $F = 4,7$ par exemple).

- Stratégie “primitive” S_{Pr} :

Pour la question b2, les étudiants peuvent relier l’aire de la surface à l’intégrale pour proposer la méthode qui utilise la formule $A = \int_0^3 F(s)ds$.

V. ANALYSE A POSTERIORI

1. Problème 1

Seulement 15,63% (5/32) d'étudiants utilisent la stratégie S_A et 9,38% (3/32) S_{Pr} .

Le reste (21/32 étudiants, correspond à 65,63%) cherche des formules en physique. Parmi eux, seulement 15/32 (46,88%) utilisent S_{Ph} et donnent la réponse exacte. Les autres ne se souviennent pas des formules et donnent des réponses erronées.

Notons que le type de tâche $T1$ (étant donné la vitesse d'un point matériel en fonction du temps, trouver la distance parcourue dans un temps donné) a déjà été abordé par le manuel de mathématique de classe de 12, après l'introduction de l'intégrale. La technique introduite est "calculer l'intégrale", notée par S_{Pr} . De plus, le sens géométrique de l'intégrale (la relation entre l'intégrale et l'aire) est précisé dans l'enseignement. Or, seulement 15,63% d'étudiants utilisent S_A et 9,38% S_{Pr} .

Pour chercher à expliquer ce phénomène, nous trouvons deux raisons relevées à partir de l'analyse du rapport institutionnel.

Premièrement, il n'existe, dans l'ouvrage utilisé pour la formation des enseignants en analyse, aucun problème issu des sciences physiques : on introduit l'intégrale par la recherche de l'aire d'une surface. L'intégrale est définie par la limite de la somme de Riemann et à partir de là émerge la signification géométrique de la notion. Autrement dit, la formation en analyse n'aborde que des problèmes de mathématiques pures.

Deuxièmement, la recherche d'une fonction donnée uniquement par le graphique n'est pas un type de tâche familier dans l'enseignement des mathématiques aussi bien au niveau secondaire qu'au niveau universitaire.

2. Problème 2

Question a : Seulement 43,75% (14/32) utilisent l'intégrale pour chercher le changement de la vitesse. Parmi eux, 78,57% (11/14) suivent la stratégie S_{Pr} et 21,43% (3/14) S_A . Les autres essaient à réaliser des calculs en physique, mais ne réussissent pas.

Question b : Parmi 14 étudiants qui obtiennent la réponse exacte en calculant l'intégrale de l'accélération, il n'y a que 6 qui savent relier la relation vitesse - intégrale et celle intégrale - aire. Cela les amène à comparer deux aires. Les autres (8 étudiants) pensent que l'accélération est une fonction du second degré. Ils cherchent donc l'expression de cette fonction pour calculer l'intégrale par la primitive (stratégie S_{Pr}).

La contrainte de la question b est différente : l'accélération est donnée par une courbe sur laquelle il n'y a que deux points dont les coordonnées sont précisées. La stratégie S_{Pr} est donc empêchée par le choix de la variable didactique. C'est ce qui explique que 6 étudiants utilisent S_A pour la question b , alors qu'il n'y en a que 3 pour le cas de a . Or, comme nous l'avons dit, il y a quand même 8 étudiants qui essaient de chercher l'expression algébrique de l'accélération pour trouver la réponse à b .

3. Problème 3

Pour la question a , 93,75% (30/32) savent mobiliser la formule $A = F.s$ et donnent le résultat exact. Dans la question b , la force varie, cette formule n'est donc pas valide.

Pour b_2 , 18,75% (6/32) mobilisent la stratégie primitive S_{Pr} pour trouver la valeur exacte du travail. Or, ils ne répondent pas à la question a . Les autres ne donnent pas de réponse aux deux questions.

Comment explique-t-on ce phénomène ? En réalité, dans le manuel d'analyse de classe 12, est introduit explicitement le type de tâche T_3 (calculer le travail effectué par une force variable) où la force en fonction du temps est donnée par une expression. La technique est de calculer l'intégrale (stratégie S_{Pr}). Nous pouvons dire que la signification physique de l'intégrale est présentée pour le cas de T_3 . La signification géométrique de l'intégrale (l'aire de la surface en dessous) est également présentée. Pourtant, aucune activité reliant les deux significations de l'intégrale n'est proposée dans le manuel. De plus, la recherche des valeurs approchées est toujours négligée dans l'enseignement de l'analyse, aussi bien au lycée qu'à l'université pédagogique au Viêt-Nam. L'étude des fonctions données par graphique est aussi totalement absente.

VI. CONCLUSION

Notre étude montre que la plupart de nos étudiants n'arrive pas à relier les significations physique et géométrique de la notion d'intégrale, bien que, selon le programme de formation des universités pédagogiques, l'enseignement de l'analyse ait présenté :

- la définition de la dérivée au travers du problème de recherche sur la vitesse instantanée.
- la définition de l'intégrale au travers du problème de l'étude d'aire des surfaces.
- la formule Newton – Leibniz $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)dx$ qui montre le lien des deux notions. Cette formule est appelée le théorème fondamental de l'analyse.

La compréhension de ce lien est importante pour le travail de conception des situations d'enseignement du point de vue interdisciplinaire. Les trois connaissances ci-dessus sont suffisantes pour établir ce lien. Pourtant, le fait que tous les exercices proposés aux étudiants sont des problèmes de mathématiques pures et les fonctions étudiées sont toujours données par une expression (jamais par son graphique) rendent ce lien complètement flou. Cette remarque a été constatée aussi par Bajracharya, R. R. (2014) dans sa recherche portant sur l'application du théorème fondamental de l'analyse dans les contextes de physique. De plus, les modules consacrés à l'étude de cinématique sont supprimés du curriculum de formation actuelle des professeurs de mathématiques. Les étudiants manquent donc les connaissances nécessaires pour pouvoir reconnaître les sens physiques des savoirs mathématiques en général, de la notion d'intégrale en particulier. Cependant, la suppression de ces modules n'est pas pour nous la raison unique de ce manque. Il s'agit que la formation en mathématiques ne prend en considération la différence entre les universités générales et pédagogiques. Les étudiants apprennent les mathématiques pour résoudre des problèmes mathématiques pures. Le rôle d'outil des mathématiques dans d'autres domaines n'est pas mis au centre de l'attention de l'enseignement. La manque des études épistémologiques des savoirs à enseigner est aussi l'un des éléments permettant d'expliquer le comportement des futurs professeurs.

Nos analyses montrent une rupture entre l'enseignement des sciences physiques et celui des mathématiques au lycée. Cette rupture est encore plus importante dans la formation en analyse des universités pédagogiques au Viêt-Nam. Comblar cette rupture est donc une mission de la formation en didactique des mathématiques. Pour cela nous avons mené une recherche sur la conception d'une ingénierie didactique que nous ne n'avons pas la place de présenter dans le cadre de cette communication.

REFERENCES

- Bautier E., Rochex J-Y. (1998). *L'expérience scolaire des nouveaux lycéens. Démocratisation ou massification ?* Paris. A. Colin.
- Bajracharya R. R. (2014). *Student application of the fundamental theorem of calculus with graphical representations in mathematics and physics*. The University of Maine.
- Đoàn Quỳnh et Nguyễn Huy Đoan (2012), *Analyse, classe 12*, Edition d'éducation du Viêt-Nam.
- Lê Thi-Hoài-Châu (2004), Exploiter l'histoire des mathématiques dans l'enseignement de la notion d'intégrale. *Revue scientifique*, Université pédagogique de Hochiminh ville, N°2 (2004), pp.37-45.
- Ngô Minh-Duc (2017). Recherche de la transposition didactique de la notion d'intégrale en relation à la physique dans l'enseignement en classe 12 au Viêt-Nam. In *Actes du sixième colloque international en Didactique des Mathématiques, Hochiminh ville, Viêt-Nam, Avril 2017*, pp.103 -112.
- Nguyễn Thế Khôi et Phạm Quý Tư (2012), *Physique, classe 10*, Edition d'éducation du Viêt-Nam.