Pluralités culturelles et universalité des mathématiques :
enjeux et perspectives pour leur enseignement
et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

PENSER LA QUESTION DES CONTENUS A LA TRANSITION SECONDAIRE-SUPERIEUR AU SEIN DU RESEAU DES IREM EN FRANCE

Patrick FRETIGNE[*] – Geneviève BOUVART[**] - Viviane DURAND-GUERIER[***] – Zoé MESNIL[****] - Fabrice VANDEBROUCK[*****] - Martine VERGNAC[******]

Résumé – En 2013, trois Commissions Inter IREM se sont associées pour organiser un colloque sur la transition secondaire-supérieur et plus particulièrement sur la réforme des programmes scientifiques du lycée, en mathématiques et en physique, qui venait d'entrer en vigueur en France. Nous présentons dans ce texte une réflexion issue de deux des ateliers. Le premier concerne les nombres réels qui ont disparu des programmes, tandis que le second s'intéresse aux possibilités offertes par le retour explicite de la logique. Un large consensus s'est dégagé à l'issue du colloque pour estimer que les nouveaux programmes rendent plus difficile la transition entre secondaire/supérieur.

Mots-clefs : Transition secondaire – supérieur ; réseau des IREM ; réforme des programmes ; nombres réels ; logique.

Abstract – In 2013, three Inter IREM national commissions joined to organize a conference on the transition between secondary and university mathematics, focusing on the recent reform of the secondary programs, in mathematics and in physics, in France. We present in this text a reflection stemming from two of the workshops. The first one concerns real numbers, which disappeared from French programs, whereas the second focus on the possibility opened by the explicit come back of logic. A wide consensus emerged at the end of the colloquium to consider that the new programs make more difficult the transition between secondary and university mathematics.

Keywords: Transition secondary/university mathematics; programs reform; real numbers; logic.

I. INTRODUCTION GENERALE

Les IREM (Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques) sont des structures universitaires où peuvent travailler ensemble, sur des contenus mathématiques ciblés, des

[*] Commission Inter-IREM Université, IREM de Rouen – France – pf@univ-rouen.fr
[**] Lycée Bichat à Lunéville, IREM de Lorraine – France
[***] Université de Montpellier, I3M UMR 5149, IREM de Montpellier – France – vdurandg@univ-montp2.fr
[****] Université Paris Diderot, Laboratoire de Didactique André Revuz, IREM de Paris – France – zoe.mesnil@univ-paris-diderot.fr
[*****] Université Paris Diderot, Laboratoire de Didactique André Revuz, IREM de Paris – France – vandebro@univ-paris-diderot.fr
[******] Lycée Jean Lurçat, Perpignan, IREM de Montpellier – France – martine.vergnac@wanadoo.fr

Frétigné P., Bouvart G., Durand-Guerrier V., Mesnil Z., Vandebrouck F., Vergnac M. (2015) Penser la question des contenus à la transition secondaire supérieur au sein du réseau des IREM en France. In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – Spé3, pp. 994-1004.

enseignants du primaire, du secondaire, du supérieur mais aussi des formateurs d'enseignants et parfois des inspecteurs. Ils sont en France des acteurs majeurs, pour les mathématiques, de la recherche en éducation, de la formation initiale et continue des enseignants, en partenariat avec les Ecoles Supérieures du Professorat et de l'Education (ESPE), les départements disciplinaires et les laboratoires de recherche dont ils sont proches dans les universités.

Les IREM forment un réseau d'environ un millier d'enseignants et chercheurs en mathématiques, histoire et didactique des mathématiques. Ils se répartissent dans toute la France : 28 IREM (c'est-à-dire, à deux exceptions près, un IREM par académie). Leurs travaux portent sur tous les niveaux du système éducatif, du premier degré à l'université. Ils sont constitués en réseau national, structuré autour de l'assemblée des directeurs (ADIREM) avec un comité scientifique (CS), des commissions inter IREM (C2I, treize), et avec des publications et rencontres nationales. Les IREM organisent en particulier annuellement les colloques importants en France de la COPIRELEM (Commission Permanente des IREM sur l'Enseignement Elémentaire) et de la CORFEM (Commission de Recherche sur la Formation et l'Enseignement des Mathématiques du second degré) qui sont des points de rencontres pour les formateurs en mathématiques des ESPE. Les revues éditées par le réseau des IREM (Petit *x*, Grand N, Repères IREM) sont aussi des ressources importantes pour la formation initiale et continue des enseignants.

La recherche développée dans les groupes IREM est une recherche appliquée – ou recherche action – qui suit un protocole scientifique strict : travail mathématique, épistémologique et didactique (bibliographie, élaboration de séquences…) en appui sur la recherche fondamentale en didactique des mathématiques, expérimentations en classe par les enseignants de terrain, analyse de ces expériences au sein des groupes, rédaction et publication de documents, alimentation de formations initiales, mise en œuvre de stages de formation continue, participation aux commissions inter IREM nationales. Á travers leurs publications, leurs actions de formations initiales et continues, les actions de diffusion scientifique ou les rencontres organisées au sein du réseau, ce sont au moins dix mille enseignants de mathématiques de tous statuts qui sont en contact avec les IREM chaque année.

En 2013, trois C2I se sont associées pour organiser un colloque sur la transition lycée-post baccalauréat et plus particulièrement sur la réforme des programmes scientifiques du lycée, en mathématiques et en physique, qui venait d'entrer en vigueur en France.[1] Il s'agissait d'aider les nouveaux collègues. A la suite d'une réflexion menée à la CIIU[2], dont l'un des thèmes récurrents est celui de la transition secondaire-supérieur, nous étions conscients que ce n'était pas juste « une réforme de plus » et que celle-ci allait modifier profondément la façon d'enseigner les mathématiques et la physique au lycée et les savoirs et savoir-faire sur lesquels les enseignants du supérieur allaient pouvoir s'appuyer.

Lorsque ce colloque s'est tenu, les 24 et 25 mai 2013, nous n'avions pas encore beaucoup de recul sur l'impact de la réforme puisque c'était à la fin de la première année où nous accueillions à l'université, dans les IUT et les CPGE, les élèves l'ayant vécue au lycée, mais devant l'importance de cette réforme et de son impact prévisible, la CIIU (Commission Inter-IREM « Universités ») a décidé de ne pas attendre davantage : l'un de nos objectifs était de profiter des premières expériences et réflexions dont disposaient les enseignants du lycée pour les présenter à leurs collègues du supérieur et les aider à identifier les pertes et les nouveautés dans les programmes de terminale en mathématiques et en physique et leurs conséquences

[1] Le colloque a donné lieu à des actes publiés par l'IREM de Paris 7 (IREM de Paris 7 2013)
[2] Commission Inter IREM Université qui réuni des formateurs de plusieurs IREMs autour des questions de transition lycée – Université et d'enseignement supérieur.

probables sur les connaissances des étudiants entrant dans le supérieur. Nous souhaitions également mettre en commun les expériences s'appuyant sur ces nouveaux programmes pour aider les collègues du secondaire à y repérer les opportunités qui s'y trouvent.

Grâce à la richesse structurelle du réseau des IREM, nous avons pu former un comité organisateur parfaitement en adéquation avec le thème en associant la CIIU à deux autres Commissions Inter-IREM : la CII – Lycée et la CII probabilités-statistique, dont la participation s'imposait par l'augmentation substantielle de ces disciplines dans les programmes de Première et de terminale.

Les 3 conférences et les 12 ateliers étaient tous des exposés à « deux-têtes » : co-animés par soit un enseignant de mathématiques et de physique, soit un enseignant du secondaire et un enseignant du supérieur. Nous présentons dans ce qui suit deux exemples parmi les ateliers proposés dont les comptes rendus se trouvent dans les actes du colloque. Le premier exemple concerne les nombres qui ne sont plus objet d'étude dans les programmes actuels de lycée en France et met en évidence la fragilité des connaissances des élèves de lycée et de début d'université. Le second exemple concerne la logique qui a fait en 2009 un retour explicite dans les programmes de lycée, programme pour lequel de nombreux enseignants se sentent démunis.

II. LES REELS A LA TRANSITION SECONDAIRE - SUPERIEUR[3]

1. *Introduction*

De par les relations étroites entretenues entre la construction des nombres réels et les fondements de l'analyse, on peut faire l'hypothèse qu'une appropriation adéquate du concept de nombre réel est nécessaire pour une bonne compréhension de l'analyse enseignée dans les cursus universitaires mathématiques. En particulier, la distinction essentielle entre la propriété de densité, satisfaite par Q, D et R et la propriété de continuité non satisfaite par Q et D et qui caractérise R est au cœur de la construction des réels et de la notion de convergence. En France, au collège, les élèves sont principalement sensibilisés à la nécessité de considérer des nombres irrationnels sur quelques exemples emblématiques ($\sqrt{2}$, π), et éventuellement à l'existence d'écritures décimales illimitées pour les rationnels non décimaux. Jusqu'en 2009, en France un chapitre sur les ensembles de nombres en seconde, et un chapitre sur la convergence des suites adjacentes en terminale S permettaient d'aborder ces aspects. Suite à leur disparition des nouveaux programmes, le travail sur ces questions tend à disparaître comme le montrent les entretiens conduits en 2013 auprès d'enseignants de Lycée en France. Or la fréquentation de ces nombres tout au long du cursus secondaire ne suffit pas à elle seule à permettre aux élèves une telle appropriation : les résultats de questionnaires proposés à des élèves de lycée et à des étudiants de licence montrent que la plupart d'entre eux ne développent pas des conceptions adéquates pour une poursuite d'étude dans le domaine de l'analyse.

2. *Conceptions d'élèves de seconde à propos des nombres réels*

Nous nous sommes attachées au travers d'une étude de cas menée dans l'académie de Montpellier en 2012/2013 à tenter de cerner quelles sont les connaissances des élèves de lycée à propos des nombres réels. Dans cette étude, nous avons testé l'hypothèse selon laquelle les connaissances des élèves sur les nombres réels ne sont pas stabilisées à l'entrée à l'université.

[3] Ce paragraphe est un résumé étendu de Vergnac et Durand-Guerrier (2013)

Nous avons tout d'abord conduit sept entretiens des enseignants de lycée en France ; nous avons ensuite posé un questionnaire dans les huit classes de seconde de ceux-ci. Parmi les points abordés dans les entretiens, nous avons cherché à savoir si la disparition dans les nouveaux programmes du chapitre sur les ensembles de nombres avait modifié leurs pratiques et dans l'affirmative de quelle façon se traduisait cette modification. Pour la quasi-totalité[4] des enseignants interrogés, cela avait pour conséquence un moindre travail sur les nombres et en particulier aucun travail sur l'irrationalité des nombres. Pour tous les enseignants interrogés, à l'entrée en seconde les élèves ne distinguent que deux types de nombres : les entiers et les « autres ». L'usage de la calculatrice amène selon eux les élèves arrivant en lycée à identifier un nombre à son affichage à la calculatrice. L'analyse des questionnaires posés dans les classes de seconde montre que les réponses apportées par les élèves correspondent pour une grande part aux perceptions de leurs enseignants. Pour les élèves de seconde interrogés, la nature des nombres qu'ils rencontrent et/ou utilisent, est liée à l'écriture de ceux-ci. Par exemple, pour plus de deux tiers des élèves interrogés, 5/3 n'est pas un nombre rationnel mais un nombre décimal et seulement la moitié des élèves interrogés, considèrent explicitement que $\sqrt{7}$ est un nombre. Parmi eux, un tiers se le représente comme un décimal, et une moitié ne se le représente pas. Pour ces élèves, les nombres ont toujours une écriture décimale et il y a identification du nombre avec son écriture décimale. Une fraction est un nombre décimal car on peut l'écrire à l'aide d'un nombre « à virgule ». Les racines carrées ne sont pas des nombres pour la moitié des élèves interrogées : ce sont des fonctions ou des opérateurs. Elles ne deviennent des nombres pour une partie de ces élèves que lorsqu'ils en proposent une écriture décimale à l'aide de la calculatrice. La question : « *Comment peux-tu définir un nombre réel?* », est de manière évidente une question très difficile pour un élève de seconde, et à laquelle il ne peut apporter aucune réponse qui soit une définition formelle, mais nous attendions que conformément aux pratiques de classe décrites par les enseignants interviewés, un certain nombre d'entre eux identifient l'ensemble des nombres réels à une droite représentant l'axe réel. Or cette réponse n'a été proposée par aucun des 252 élèves interrogés ; dans un certain nombre de cas, l'ensemble des nombres réels a été défini comme étant l'intervalle$]-\infty;+\infty[$ mais cela ne signifie pas que cet intervalle soit identifié par ces élèves à l'axe réel. Aucune de ces réponses n'était accompagnée d'une figure de droite ; l'intervalle]-∞ ; +∞[est un symbole qui n'est associé à aucune représentation.

3. *Evolutions de la seconde à la terminale scientifique et en licence*

Afin d'observer s'il y a une évolution des conceptions à propos du nombre réel de la seconde à la terminale S, nous avons soumis en 2012-2013 à deux classes de terminale S un questionnaire[5], qui a également été proposé en 2012-2013 à quelques étudiants de Licence 1, 2 et 3, puis en 2013-2014 à un nombre plus important d'étudiants de Licence 1 au début du second semestre[6]. Les deux classes de terminale S étaient toutes les deux considérées comme des classes d'assez bon niveau et comportaient respectivement 24 et 32 élèves. Même si l'échantillon observé est moindre que pour les élèves de seconde, il permet de dégager un paysage des conceptions sur les nombres à l'entrée de l'université. Nous avons proposé une classification plus fine qu'en seconde afin de comparer les réponses des élèves de terminale S

[4] 6 enseignants sur 7, le septième étant un enseignant dont c'est la première année d'enseignement
[5] Repris de Bronner (1997)
[6] Nous insérons dans ce texte les résultats obtenus qui sont présentés dans Verganc et Durand-Guerrier (2014)

et des étudiants de licence[7] : nous avons identifié dix conceptions indiquées dans le tableau récapitulatif ci-dessous :

Catégorie	TS en 2012-2013	L en 2012-2013	L1 en 2013-2014
1. Conception « Ensemble de tous les nombres (sauf les nombres complexes) »	13%	12,5%	8,5% + (16%)
2. Conception « Vision géométrique – axe réel »	7%		1,5%
3. Conception « Intervalle]-∞ ; +∞[»	11%	8%	14,5%
4. Conception « Complexes non imaginaires »	14,5%	6%	4%
5. Conception « Réaliste »	7%	0%	4%
6. Conception « Ecriture décimale illimitée »	0%	14,5%	2,5%
7. Conception « Partition Q ou I »	4%	14,5%	5%
8. Conception « Partition incorrecte »	14,5%	14,5%	22%
9. Reformulation	13%	10,5%	18%
10. Autres	13%	20%	13%
11. Non réponses	16%	4%	5%

Tableau 1*- classification des réponses et pourcentages obtenus en TS et en Licence*

Dans la classification opérée en seconde, les conceptions 1 et 3 étaient regroupées. Nous avons pu observer que la conception *« intervalle »* reste solidement ancrée probablement parce qu'elle est la seule à être travaillée explicitement de la seconde à la terminale, en particulier dans la résolution d'inéquations. On peut noter des évolutions significatives par rapport à la seconde. Il y a beaucoup moins de non réponses : cela semble signifier que les élèves de terminale S expriment plus aisément leurs conceptions d'un nombre réel, en particulier les élèves ayant choisi la spécialité mathématique. Les conceptions « *Ensemble de tous les nombres* » et « *réaliste* » prévalent moins qu'en seconde même si on peut encore observer des réponses telles que : « *Un nombre pur* » ou « *Un nombre qui existe, que l'on peut toucher* ». De nouvelles conceptions émergent : « *Complexes non imaginaires* » ainsi que « *Vision géométrique* ». On peut penser que la manipulation des graphiques en analyse favorise la construction de cette conception. En outre il nous paraît important de signaler que les quelques élèves ayant exprimé des conceptions correctes des nombres réels sont tous des élèves ayant choisi la spécialité mathématiques, qui ont donc travaillé davantage que les autres sur les nombres dans la partie arithmétique du programme. Quand on compare les réponses des élèves de lycée à celles des étudiants de licence, on voit apparaître une nouvelle conception liée aux cours dispensés à l'université qui est celle liée à l'écriture décimale illimitée. Mais nous pouvons noter que beaucoup de conceptions observées au lycée restent présentes et pour les conceptions « *Ensemble de tous les nombres* » et « *Partition incorrecte* » quasiment dans les mêmes proportions. Même en ayant travaillé les limites et la continuité de manière formelle, des conceptions erronées sur les nombres réels subsistent jusqu'en troisième année de licence.

[7] Le questionnaire a été proposé à un petit nombre d'étudiant en avril 2013 (14 en L1 ; 11 en L2 ; 13 en L3) ; les résultats ne sont donc pas significatifs ; ils sont donnés à titre indicatif.

4. *Conclusion*

Les résultats de notre étude, bien que celle-ci soit limitée, montrent que les connaissances des élèves sur les nombres sont essentiellement opératoires et ne leur permettent pas d'accéder au concept de nombre réel lui-même. Nous faisons l'hypothèse que ceci est un obstacle pour l'appropriation aux concepts de l'analyse, comme peuvent l'observer les enseignants en début d'université. Dans leurs travaux de recherche Bloch et Ghedamsi (2005) ont mis en évidence des raisons liées aux différences entre le travail en analyse dans le secondaire et dans le supérieur. Au moment de la transition lycée - post bac, on passe d'un travail de type algébrique en analyse, reposant sur une approche intuitive du continu (*les nombres réels sont tous les nombres qu'on connaît*) à un point de vue théorique (*axiomatique*) sans prise en compte explicite des changements conceptuels que cela représente. On peut également supposer que la fragilité des connaissances sur les liens entre aspects pratiques et aspects théoriques en analyse aura des effets sur l'application des outils de l'analyse à d'autres domaines, et pourra mettre en difficultés les futurs enseignants.

III. UN "RETOUR" DE LA LOGIQUE DANS LES PROGRAMMES DU LYCEE : UNE OCCASION À NE PAS MANQUER ![8]

1. *Introduction*

Les nouveaux programmes pour le lycée comportent des objectifs explicites concernant certaines notions de logique. Dans le supérieur, la maîtrise des éléments du langage mathématique, notamment des quantificateurs, est un élément essentiel pour pouvoir comprendre définitions et théorèmes qui sont rédigés dans un langage plus formel qu'au lycée. Les démonstrations se complexifient, portent sur des objets plus abstraits et cela représente une réelle difficulté pour les étudiants. Plusieurs universités proposent au début de leur cursus mathématique un cours de "méthodologie" consacré à la démonstration et au langage mathématique, afin que les étudiants puissent non seulement acquérir des pratiques, mais également réfléchir sur ces pratiques en mobilisant des outils, notamment logiques, qui pourront être réinvestis. Nous gageons que malgré les imperfections des nouveaux programmes de lycée quant aux notions de logique, notamment le manque de précisions sur les connaissances en jeu, malgré d'éventuelles difficultés pour les professeurs liées au manque de formation et de ressources, dont nous trouvons trace dans les propositions des manuels, ce retour d'un accent sur les questions de logique et de raisonnement ouvre la porte à un apprentissage spécifique qui peut être bénéfique pour la transition lycée/supérieur.

2. *Un aperçu de la réaction des enseignants du secondaire au nouveau programme*

La logique était explicitement objet d'enseignement dans les programmes de mathématiques du lycée pendant la période des mathématiques modernes (entre 1969 et 1981), puis était explicitement exclue des programmes entre 1981 et 2001, date à laquelle elle a fait un timide retour, plus prononcé dans les récents programmes. Ces allers-retours ont pour première conséquence que nous manquons aujourd'hui de recul et d'expérimentations en ce qui concerne l'enseignement de notions de logique au lycée. Par ailleurs, les professeurs actuels ont reçu des formations différentes selon l'époque à laquelle ils ont été élèves et selon leur cursus dans le supérieur (la logique mathématique ne fait pas partie de la formation initiale des enseignants du secondaire, certains n'en ont jamais entendu parler, d'autres ont suivi certains modules spécifiques).

---

[8] Ce paragraphe est un résumé étendu de Bouvart et al. (2013)

Nous pouvons alors faire l'hypothèse que les pratiques d'enseignement de notions de logique des enseignants du secondaire seront assez diversifiées. Nous avons voulu en savoir plus sur ce point en proposant un questionnaire. D'autre part, la logique étant partie intégrante de l'activité mathématique, est-ce que les enseignants n'intégraient pas déjà un travail sur l'expression et le raisonnement mathématiques dans les activités proposées aux élèves ? Nous avons donc voulu également évaluer l'impact des nouvelles préconisations institutionnelles.

Sur 45 enseignants du second degré interrogés, on constate une très légère accentuation de la pratique de l'apprentissage de la logique. On distingue trois « attitudes » d'enseignants par rapport à l'enseignement de la logique au lycée :

- Ceux qui ressentent le besoin d'un cours de logique *a priori* et qui le font contre vents et marées.
- Ceux qui respectent « l'esprit du programme » en établissant les principes au fur et à mesure des situations étudiées.
- Ceux qui trouvent que cela se fait naturellement et qui n'éprouvent pas le besoin d'expliciter davantage les notions de logique.

Pour les travaux réalisés avec les élèves, la préférence est donnée aux exercices des manuels mais les 2/3 des professeurs ayant répondu au questionnaire donnent très peu d'exercices étiquetés logique[9] et encore moins de situations de recherche permettant de travailler la logique. La logique est loin d'être une priorité.

3. *La nécessité d'une formation : l'exemple du traitement de l'implication dans les manuels de Seconde*

Une écrasante majorité de professeurs pensent que la logique doit être enseignée lors de la formation des professeurs. Ils confirment ainsi que le fait qu'ils sachent utiliser des notions de logique dans leur propre activité mathématique n'est pas suffisant pour les enseigner, même si ce qui leur est demandé dans le programme concerne uniquement l'aspect outil de ces notions. Or, dans le contexte actuel, la logique mathématique n'apparaît pas comme une théorie de référence pour l'enseignement de ces notions, rôle qu'elle pourrait pourtant pertinemment jouer en articulant ce qu'elle dit de ces notions en tant qu'objets avec leur utilisation dans l'activité mathématique. D'où la présence d'un discours imprécis dans les manuels, que nous allons illustrer à travers l'exemple de l'implication.

Dans les manuels, une implication est une phrase[10] de la forme "si… alors…". En mathématiques, ces propositions comportent presque systématiquement une quantification universelle implicite[11]. Ce ne sont donc pas des propositions de la forme $A \Rightarrow B$, mais des propositions de la forme $\forall x \quad A[x] \Rightarrow B[x]$. La présence d'une variable et d'un quantificateur universel est essentielle. On ne peut que les expliciter pour justifier qu'il suffit d'UN contre-exemple pour montrer qu'une proposition en "si … alors …" est fausse, justification qui s'appuie sur deux propriétés : la négation de $A \Rightarrow B$ est $A\ ET\ NON(B)$, et celle de $\forall x \quad P[x]$ est $\exists x \quad NON(P)[x]$. Une telle justification n'apparaît pas dans les manuels : le contre-exemple est donné comme une technique isolée, non reliée à des connaissances logiques qui pourraient être réinvesties ailleurs. Sans être une erreur, cette absence de propos

[9] On trouve dans presque tous les manuels publiés suite aux nouveaux programmes des exercices repérés par un logo "Logique".
[10] Quelques manuels parlent de *proposition*, mais ce terme n'est pas très utilisé.
[11] Qui n'est pas toujours repérée par les élèves.

sur les variables en général, et notamment par rapport à l'implication, nous parait être un manque bien dommageable.

Mais peut-être plus grave, il y a dans plusieurs manuels une confusion entre "si… alors…" et "donc" qui pour le coup relève d'une méconnaissance de ces objets. Une phrase de la forme "si *A* alors *B*" est une proposition mathématique, ce qui n'est pas le cas d'une phrase de la forme "*A* donc *B*". Dire "*A* donc *B*" c'est dire 3 choses : que A est vraie, que B est vraie, et que j'ai de bonnes raisons de penser qu'il y a un lien entre ces deux informations, la plupart du temps le fait que je sais que "si *A* alors *B*" est vraie. Je ne peux pas m'interroger sur la vérité d'une telle phrase, mais seulement sur la validité de l'inférence qu'elle sous entend.

4. *Dans le supérieur : exemple du cours Langage Mathématique*

Dans le supérieur, plusieurs enseignants, notamment en classe préparatoire, font en début d'année un petit topo sur les notions de logique classiques : connecteurs, quantificateurs, types de raisonnement. Il se présente la plupart du temps de manière plus formelle que ce qui est proposé dans les nouveaux manuels pour le lycée (on y trouve par exemple souvent les tables de vérité des connecteurs).

À l'Université Paris Diderot, de 2009 à 2014, un cours Langage Mathématique[12] a été proposé au premier semestre des filières math, math-info et info. Les étudiants y apprennent ce qu'est une *expression mathématique* (assemblage de signes obéissant à certaines règles et à certaines conventions ; les expressions mathématiques sont divisées en deux catégories : celle des noms d'objets mathématiques, et celle des propositions qui affirment des faits concernant ces objets). Dans ces expressions, une attention particulière est accordée au statut des variables : *muette* comme dans l'expression $\int_0^1 x\,dx$ qui "ne parle pas de *x*", ou *parlante*[13] comme dans l'expression $x^2 \geq 1$, qui "parle de *x*". Ces notions pourraient bien sûr être introduites dès le lycée[14]. Les étudiants voient ensuite définitions et premières propriétés des connecteurs et des quantificateurs. Une attention particulière est portée sur les multiples façons de dire la quantification en mathématiques, et les étudiants sont entraînés à exhiber les quantifications dans les propositions. Des liens sont faits entre structure logique d'une proposition et structure de sa preuve. Ce cours n'est pas un cours de logique mathématique : les définitions et propriétés sont données non pas pour un traitement formel, mais pour être illustrées par une utilisation dans des contextes particuliers. Par exemple, différentes formulations de la propriété "Toute fonction réelle périodique qui admet une limite en +∞ est constante" sont reliées à différentes propositions équivalentes à $(A\ ET\ B) \Rightarrow C$. Ce travail semble aider les bons étudiants à avoir une attitude réflexive sur ce qu'ils écrivent, mais semble trop loin des étudiants les plus faibles. Une difficulté pour tous les étudiants est que le contrôle qu'ils sont invités à exercer dans ce cours est bien vite oublié.

5. *Un exemple d'articulation entre travail mathématique et travail sur des notions de logique*

L'exercice qui a été présenté dans l'atelier avait été proposé dans une classe de terminale S en 2013. Dans cette classe, un théorème-élève erroné a surgi à la suite d'une analogie abusive entre « l'intégrale conserve l'ordre » et « la dérivée conserve l'ordre ». L'exercice permet

[12] http://didel.script.univ-paris-diderot.fr/claroline/course/index.php?cid=LM1

[13] On dit aussi libre/liée

[14] La notion de variable muette est présente à propos de la variable d'intégration, mais n'est pas utilisée dans d'autres cas, comme par exemple dans l'expression $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

d'infirmer cette proposition, et de travailler sur les connecteurs et les quantificateurs. Pour ne pas ajouter aux difficultés de compréhension des notions d'analyse celles de compréhension de logique, l'exercice est bâti à partir de l'herbier des fonctions usuelles de terminale S. Les fonctions à étudier ont été données pour gagner du temps, pour revisiter les fonctions incontournables de TS[15] et pour l'exhaustivité des cas à analyser.

Voici le texte de l'exercice :

Exercice 1 :

1. Dans chacun des cas comparer, sur l'intervalle donné, les fonctions f et g puis les fonctions f' et g'.

I	$f(x)$	$g(x)$	Comparer f et g sur I	Comparer f' et g' sur I
$\mathbb{R}$	e^x	e^{x+1}		
$\mathbb{R}$	x	e^x		
$]0;+\infty[$	$ln(x)$	x		
$\mathbb{R}$	x^2	x^2+2x		

2. Vrai ou faux ?
Pour chacune des propositions suivantes dire si elle est vraie ou fausse en justifiant les réponses.
Proposition 1 : "Il existe un réel a de I tel que $f(a) \leqslant g(a)$ et $f'(a) \leqslant g'(a)$."
Proposition 2 : "Il existe un réel a de I tel que $f(a) \leqslant g(a)$ et $f'(a) > g'(a)$."
Proposition 3 : "Pour tout réel x de I, $(f(x) \leqslant g(x) \Longrightarrow f'(x) \leqslant g'(x))$."
Proposition 4 : "(Pour tout réel x de I, $f(x) \leqslant g(x)) \Longrightarrow$ (Pour tout réel x de I , $f'(x) \leqslant g'(x)$)"

Résumer les réponses obtenues en complétant le tableau ci-dessous par **V** si la proposition est vraie et **F** si la proposition est fausse.

I	$f(x)$	$g(x)$	$f \leqslant g$	$f' \leqslant g'$	Prop 1	Prop 2	Prop 3	Prop 4
$\mathbb{R}$	e^x	e^{x+1}	**V**	...	...	...	...	...
$\mathbb{R}$	x	e^x	...	...	...	...	...	...
$]0;+\infty[$	$ln(x)$	x	...	...	...	...	...	...
$\mathbb{R}$	x^2	x^2+2x	...	...	...	...	...	...

3. Proposer un intervalle I sur lequel la proposition 3 est vraie.

Figure 1*- Exercice proposé en TS*

Lors d'une première séquence, les élèves ont cherché individuellement à répondre à la première question, qui a ensuite été corrigée collectivement avant de passer à la suite. L'objectif de la deuxième partie du travail était d'établir d'éventuels liens logiques entre les propositions énoncées. Les élèves devaient d'abord compléter seuls le tableau de la question 2 mais la plupart ne comprenait pas la différence entre les propositions 3 et 4. En visualisant les représentations graphiques des fonctions f, g, f' et g', les réponses pour les propositions 1, 2 et 3 ont été explicitées collectivement. Pour les propositions 1 et 2, il était facile d'exhiber un bon candidat ou de montrer que l'on ne pouvait pas en trouver. Lors du débat pour justifier la valeur de vérité de la proposition 3 du deuxième exemple, les élèves ont cherché à écrire la

[15] Proposé en début de première année d'université, un tel exercice pourrait permettre un rapide retour sur ces fonctions et leurs propriétés.

négation de la proposition 3 et certains ont remarqué que la proposition 2 était la négation de la 3. A partir de là, la proposition 3 n'a plus posé de problème. La proposition 3 a été écrite sous la forme : « Pour tout $x, P[x] \Longrightarrow Q[x]$ ». Puis sa négation sous la forme : « Il existe x tel que $P[x]$ et non $Q[x]$. » La proposition 4 ne prenant pas de sens pour les élèves, ils ont écrit sa négation par analogie avec le travail réalisé précédemment. Ils ont alors complété la dernière colonne. Pour le dernier exemple une utilisation de la négation s'est révélée nécessaire. En fin de séance, les élèves ont été invités à refaire le même travail pour deux fonctions, choisies de façon à ce que les valeurs de vérité des propositions 3 et 4 soient différentes, en argumentant par écrit leurs réponses. Le taux de réponses exactes pour les trois premières propositions était proche de 80%. Il n'atteignait que 50% pour la proposition 4.

6. *Conclusion*

Les discussions lors de l'atelier ont surtout porté sur l'intégration au lycée des notions de logiques à d'autres activités : comment faire pour qu'elle ne semble pas "factice" ? Quelle proportion d'un travail "technique" ? Notre parti dans les activités que nous avons présenté est de provoquer un travail spécifique, tout en contextualisant les propositions étudiées pour que d'autres notions du programme soient abordées. Les questions portant spécifiquement sur des notions de logique peuvent alors paraître un peu artificielles, mais l'expérience montre que les élèves s'y intéressent. Les éléments du langage mathématique et les types de raisonnement sont souvent abordés au début des études mathématiques dans le supérieur de façon plus décontextualisée et avec un point de vue plus clairement assumé comme étant celui de la logique mathématique, même s'il n'est pas question de faire un cours formel. Plusieurs enseignants du supérieur présents dans l'atelier ont confirmé que le travail possible au lycée, dont nous avons donné des exemples, était un atout permettant que ce discours, bien que se situant à un niveau supérieur d'abstraction et de généralisation, soit dans la continuité de ce qui est amorcé au lycée.

IV. CONCLUSION GENERALE

Le colloque et les actes dont sont extraits ces deux comptes rendus d'atelier ont permis de réunir plus d'une centaine de personnes, de tous statuts, des professeurs de lycée, des universitaires, des formateurs d'enseignants, des inspecteurs de l'éducation nationale.

Les mathématiques sont la seule discipline à bénéficier de structures telles que les IREM. Ces structures regroupées au sein d'un réseau national permettent l'émergence de groupes de travail sur les problématiques liées à l'enseignement des mathématiques dont la transition entre le lycée et l'université en est un exemple. Le réseau des IREM permet ainsi la rencontre des différentes catégories de professeurs et favorise les relations entre tous les différents niveaux, de l'enseignement élémentaire jusqu'à l'enseignement universitaire. Les travaux de ces groupes sont coordonnés et mutualisés au niveau national par l'intermédiaire des commissions inter IREM. Cette organisation du travail conduit ainsi à des productions de qualité, bénéficiant d'une large diffusion et surtout répondant réellement aux attentes des enseignants. Ces éléments contribuent entre autres à faire des IREM un acteur essentiel dans la formation continue des professeurs. C'est donc tout naturellement que la didactique des mathématiques a largement profité du travail effectué dans les IREM depuis quarante ans si bien que sa place au sein des mathématiques appliquées est pleinement reconnue en France. Lorsque la nécessité d'organiser un colloque sur l'impact de la réforme des programmes du lycées et son implication sur la transition Lycée/Université, c'est tout aussi naturellement que les commission CI2U et CII Lycée se sont retrouvées autour de la problématique de la transition secondaire supérieur.

On voit dans cette contribution comment les analyses des contenus à la transition secondaire-supérieur sont nourries tant par les apports des enseignants de terrain – qu'ils soient en poste dans le secondaire ou le supérieur – des chercheurs dans des disciplines académiques – spécifiquement l'analyse et la logique ici – que par des didacticiens des mathématiques qui permettent d'approfondir les relations entre enseignement et apprentissage en jeu dans ces échanges.

Les thèmes des deux ateliers que nous avons choisis d'exposer dans ce texte cristallisent de nombreuses difficultés en analyse rencontrées par des étudiants au début de l'université : la structure de la droite réelle et la formalisation logique. Une construction du concept de nombre réel peut-être amorcée au lycée mais elle ne peut se faire que dans le long terme et ne peut faire l'économie de moments d'institutionnalisation. La connaissance essentiellement opératoire qu'ont les élèves à l'issue du lycée ne suffit pas à elle seule pour asseoir le processus de conceptualisation de nombre réel et ensuite des concepts fondamentaux de l'analyse, comme la notion de limite par exemple. Les nouveaux programmes laissent encore à la discrétion des enseignants les activités qui favorisent ces constructions. Il en va de même des notions de logique qui doivent provoquer un travail spécifique, tout en étant contextualisé pour que d'autres notions du programme soient abordées, ou en travaillant logique et raisonnement dans des activités spécifiquement conçues pour ça. Là encore, il est à craindre que les contraintes horaires et les hétérogénéités des parcours des enseignants ne les dissuadent de faire ce travail, d'autant plus qu'une majorité de professeurs pense que faire de la logique en acte est suffisant pour les élèves.

Ces nouveaux programmes des filières scientifiques ont finalement été pensés pour donner une culture scientifique à une majorité d'élèves, qui n'étudieront pas nécessairement les sciences après le lycée. L'approfondissement serait repoussé aux enseignements scientifiques post baccalauréat. Cependant le développement des capacités attendues à la fin de la terminale S ne permet plus, sauf aux très bons élèves, d'envisager sereinement des études scientifiques. Un large consensus s'est donc dégagé à l'issue de notre colloque pour estimer que les nouveaux programmes rendent la transition entre le lycée et le supérieur encore plus rude et complexe à intégrer dans nos activités en classes qu'elle ne l'était déjà, tant en terminale qu'en première année d'Université.

REFERENCES

Bloch I., Ghedamsi I. (2005) Comment le cursus secondaire prépare-t-il les élèves aux études universitaires ? Le cas de l'enseignement de l'analyse en Tunisie. *Petit x* 69, 7-30

Bronner A. (1997) *Etude didactique des nombres réels. Idécimalité et racine carrée*. Thèse de doctorat. Université Grenoble.

Bouvart G., Forgeoux E., Fabert C. Grenier, D., Mesnil Z. (2013) Un « retour » de la logique dans les programmes, une occasion à ne pas manquer ! In IREM Paris 7 (2013), *Actes du colloque La réforme des programmes du lycée et alors ?*, *IREM Paris 7 – Université Paris Diderot* (pp. 171-182).

Durand-Guerrier V., Vergnac M. (2013) Les réels à la transition secondaire-supérieur. Du discret au continu-Quelle élaboration ? In La Réforme des Programmes de Lycée : et alors ? In IREM Paris 7 (2013), *Actes du colloque La réforme des programmes du lycée et alors ?*, *IREM Paris 7 – Université Paris Diderot* (pp. 135-147).

IREM Paris 7 (2013) *Actes du colloque La réforme des programmes du lycée et alors ?, IREM Paris 7 – Université Paris Diderot.*

Vergnac M., Durand-Guerrier V. (2014) Le concept de nombre réel au lycée et en début d'université : un objet problématique. *Petit x* 96, 7-28.