Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

CARACTÉRISATION DIDACTIQUE DE L'ÉVOLUTION DES CONTENUS A ENSEIGNER LORS DES TRANSITIONS – DEUX EXEMPLES D'UNE MEME NOTION ABORDEE AVANT ET APRES UNE TRANSITION (SYMETRIE ET FONCTION)

Aurélie CHESNAIS[*]–Nicolas GRENIER-BOLEY[**]–Julie HOROKS[***]–Aline ROBERT[****]

Résumé – Pour comprendre ce qui se joue en mathématiques lors de transitions institutionnelles, nous pensons qu'il est nécessaire de mettre en regard les résultats et difficultés des élèves et les pratiques des enseignants, compte tenu des contenus à enseigner et des contextes scolaires concernés. Mais nous postulons que c'est de la qualité des descriptions (analyses didactiques) de ces contenus que dépend la possibilité d'apprécier suffisamment les pratiques et leurs conséquences sur les activités des élèves. Dans ce travail nous présentons ainsi les éléments d'une caractérisation didactique de l'évolution des contenus à enseigner lors des transitions, en les développant sur deux exemples.

Mots-clefs : transition institutionnelle, analyse didactique, activités des élèves, symétrie axiale, fonction.

Abstract – To understand what is at stake in mathematics during institutional transitions, we believe that it is necessary to compare pupils' results and difficulties with teachers' practices, taking into account the teaching contents and the underlying school contexts. However we assume that the quality of description (didactical analysis) determines the possibility to acknowledge teachers' practices and their consequences on pupils's activities. To this end we present elements of a didactical characterisation of the evolution of teaching contents during transitions and we develop them on two examples.

Keywords: institutional transition, didactical analysis, pupils' activities, reflection symmetry, function

Dans ce travail nous présentons les outils que nous avons construits en vue d'une caractérisation didactique de l'évolution des contenus à enseigner lors des transitions, qui nous paraissent un préalable nécessaire à l'étude plus complète de ce qui se passe notamment dans les classes. Nous donnons en introduction une vue d'ensemble de l'étude à mener, justifiée par notre inscription théorique, puis nous développons l'analyse de l'évolution des contenus sur deux exemples, l'un à la transition école primaire/collège et l'autre à la transition collège/lycée, qui nous permettent de mettre à l'épreuve nos outils sur deux transitions différentes. Il s'agit de revenir à la nature même des notions et à la description de leurs spécificités, pour dégager et différencier ce qui est retenu dans les programmes des deux années concernées, analyser les mises en fonctionnement possibles de ces notions dans les contenus proposés aux élèves en classe, en précisant les niveaux de conceptualisation visés. L'étude des manuels enrichit ces premières analyses, et, dans la

[*] Universités Montpellier 2 et Montpellier 3 (LIRDEF EA 3749) – France – aurelie.chesnais@univ-montp2.fr
[**] Université de Rouen (LDAR EA 4434) – France – nicolas.grenier-boley@univ-rouen.fr
[***] Université Paris Est Créteil (LDAR EA4434) – France – jhoroks@gmail.com
[****] Université de Cergy-Pontoise (LDAR EA 4434) – France – aline.robert@iufm.u-cergy.fr

Chesnais A., Grenier-Boley N., Horoks J., Robert A. (2015) Caractérisation didactique de l'évolution des contenus à enseigner lors des transitions – deux exemples d'une même notion avordée avant et après une transition (symétrie et fonction). In Theis L. (Ed.) *Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage* – Actes du colloque EMF2015 – Spé3, pp. 970-981.

mesure où leurs contenus peuvent orienter les pratiques des enseignants, elles préparent l'étude de ce qui se passe en classe.

I. INTRODUCTION

De nombreuses recherches soulignent que les moments de transition inter-ordres en mathématiques sont cruciaux à plusieurs égards et qu'ils sont révélateurs de différents types de ruptures. Dans de nombreux cas, c'est la question de l'adaptation des élèves à la nouvelle structure qui est abordée, avec des augmentations ou des accélérations d'échec scolaire pour certains élèves (notamment liées à l'origine sociale mais pas seulement) ainsi que des accélérations de réussite pour certains autres élèves.

Pourquoi ou pour quoi étudier du point de vue didactique une transition inter-ordre particulière ? L'enjeu serait ici pour nous de trouver des pistes pour faciliter le passage des élèves dans les classes supérieures au moment de cette transition, et pour cela, ne pas se limiter à ce qui est attendu au niveau supérieur mais questionner des différences qui peuvent être sources de perturbations pour les élèves, en étudiant les contenus et les logiques de pratiques des enseignants des deux ordres considérés. Dans cette contribution, nous nous intéressons aux transitions école/collège (E/C) et collège/lycée (C/L) en France.

1. *Aspects institutionnels des transitions école/collège et collège/lycée en France*

Dans cette contribution, nous restreignons notre propos au système éducatif français même si les mêmes questions ont du sens dans de nombreux pays. En France, l'enseignement obligatoire est divisé en trois ordres distincts : l'*école élémentaire* (cinq niveaux, élèves de 6 à 11 ans), le *collège* (quatre niveaux, élèves de 12 à 15 ans) puis le *lycée* (trois niveaux, élèves de 15 à 18 ans). Nous considérons seulement la voie *générale* du lycée (et non les voies technique ou professionnelle).

Les deux transitions auxquelles nous nous intéressons sont à la fois des transitions inter-niveaux et inter-ordres, donc définies d'abord par une modification institutionnelle et structurelle : passage du CM2 à la sixième (de l'école primaire au collège), passage de la troisième à la seconde générale (du collège au lycée général). Ces deux transitions n'ont cependant pas les mêmes caractéristiques. D'une part, entre la troisième et la seconde générale, une orientation des élèves se fait après une évaluation nationale dont la préparation peut influencer les contenus travaillés ; ce ne sont pas les élèves les plus en difficulté que l'on retrouve en seconde générale, tandis qu'entre le CM2 et la sixième il y a moins de sélection. D'autre part, si les enseignants de troisième et de seconde ont généralement suivi la même formation initiale – ce sont des professeurs de collège et lycée spécialistes de mathématiques qui ont passé des concours similaires –, ce n'est pas le cas des enseignants de l'école élémentaire et du collège, ceux de l'école élémentaire ayant suivi une formation généraliste et passé des concours différents de ceux du collège. Enfin il y a généralement peu de communication entre les écoles et les collèges.

2. *Un point de vue didactique sur les transitions*

Comprendre ce qui se joue à l'intérieur des classes et penser des alternatives peut passer par une entrée didactique (même si celle-ci ne peut suffire à prendre en charge toutes les difficultés liées aux transitions). Les travaux antérieurs menés sur les questions de transition en mathématiques les abordent en général sous l'angle des difficultés des élèves, ou des comparaisons des contenus enseignés, montrant par exemple les changements conceptuels ou les ruptures (voir par exemple Salin 2003 ou Grugeon 1997). En didactique des mathématiques, le travail de Colomb et al. (1987) est un des rares à tenir compte aussi des enseignants, mais ces auteurs ne s'intéressent qu'aux représentations qu'ont les enseignants des mathématiques et de leur enseignement et mettent en évidence essentiellement des similitudes entre enseignants de CM2 et de sixième. Plus récemment, Bednarz et al. (2009), dans une perspective d'articulation entre les deux ordres d'enseignement (école et collège), pointent eux aussi la nécessité de prendre en considération le point de vue des enseignants.

Nous nous intéressons ici à des notions mathématiques dont l'apprentissage et la conceptualisation[1] sont longs, et qui mettent en jeu des enseignements qui commencent avant une transition inter-ordre (au moins une année) et se poursuivent au-delà. Nous admettons plusieurs hypothèses générales justifiant l'étude :

- cette poursuite de l'enseignement, après la transition, se fait d'une autre manière, et les différences peuvent être mises en relation avec certains échecs ;

les transitions révèlent certains échecs, davantage que les autres passages d'un niveau au suivant ; en particulier les publics défavorisés, fragiles, sont susceptibles de réagir plus négativement encore à des changements qui sont en jeu dans les transitions : changements de rythme, changements d'attentes sur les investissements des élèves, changements liés aux mathématiques à mettre en fonctionnement (implicites ou non) qui sont conséquence de la « différence » entre les enseignants concernés. Ces deux hypothèses s'appuient d'une part sur des constats tirés d'échanges avec les enseignants du niveau supérieur dans la transition, qui s'étonnent des difficultés de certains de leurs élèves et d'autre part sur le fait qu'il y a effectivement de grandes différences dans les exercices proposés entre les deux niveaux d'une transition s'agissant de ce que l'on propose aux élèves ou de ce que les enseignants attendent d'eux (Benzekry et al. 2011). Pour étudier les transitions, le travail du didacticien consiste à caractériser les notions visées à chaque niveau (nature, place dans les programmes, attentes, difficultés), en déduire les évolutions entre les deux niveaux, puis réfléchir aux scénarios possibles et analyser les déroulements en classe, en prenant en compte tout ce qui peut avoir une influence sur les activités des élèves (ce dernier point n'étant pas abordé ici faute d'avancée suffisante dans cette partie de la recherche).

L'évolution des contenus entre deux niveaux peut être analysée suivant plusieurs axes :

- en termes d'objets de savoir à enseigner : les notions visées sont-elles définies et représentées de la même manière ou en tout cas dans une continuité des deux côtés de la transition ? qu'est-ce qui va permettre aux élèves de reconnaître les notions déjà abordées l'année précédente ?
- en termes de tâches : on peut supposer une augmentation dans la complexité des tâches proposées aux élèves (suivant les différentes adaptations demandées, et les initiatives potentiellement laissées aux élèves dans la résolution), mais on peut aussi étudier si les tâches proposées sont plus ou moins nombreuses et variées.
- en termes de niveaux de conceptualisation visés, dégagés à partir de ce qui précède et des programmes, en s'intéressant en particulier aux caractères objets et outils des notions, au travail attendu sur les cadres et registres, au niveau de rigueur attendu (par exemple dans le vocabulaire employé, le statut et la généralité de ce que l'on affirme), et en précisant sur toutes ces dimensions les liens entre ancien et nouveau, tant au niveau des notions que des tâches et des modes de raisonnement, tout ceci participant à

[1] Nous associons à la conceptualisation une certaine disponibilité des connaissances, outils et objets et leur réorganisation dans les acquis antérieurs.

la fois à la complexité des tâches proposées aux élèves, et à la richesse de ce qui leur est proposé pour apprendre.

- en termes de difficultés répertoriées d'élèves de chaque niveau scolaire.

Une analyse des programmes et des manuels des niveaux considérés est menée à cette fin, précédée d'une analyse épistémologique des notions visées dans laquelle on intègre ce qu'on sait des élèves. C'est la partie qui sera illustrée ci-dessous sur deux exemples contrastés.

II. DEUX EXEMPLES D'ETUDE DE CONTENUS

Nous avons choisi de travailler sur des notions communes aux deux niveaux de la transition pour faciliter la comparaison (mais pas communes aux deux transitions, faute de trouver des notions communes aux programmes scolaires des 4 niveaux) : pour la transition CM2/6ème, la symétrie, et pour la transition 3ème/2nde, les fonctions. Ce sont des notions donc la conceptualisation n'est pas simple, comme nous le détaillons ci-dessous, en nous appuyant sur des études de chaque notion d'un point de vue épistémologique et institutionnel.

La notion de **symétrie axiale** fait partie des programmes des deux niveaux, où se négocient les enjeux du passage à une géométrie plus « théorique ». Quant aux **fonctions,** il s'agit d'une notion complexe, nouvelle pour les élèves de 3ème, même si leur apprentissage repose sur un grand nombre de prérequis (algèbre, lecture graphique), ce qui nous amène à regarder les liens qui pourront être faits pour à la fois s'appuyer et rompre avec les connaissances anciennes. De plus les fonctions font l'objet d'un exercice au Brevet des Collèges en fin de 3ème et prennent une place importante dans le programme de 2nde et dans la suite de la scolarité au lycée dans les cursus scientifiques ou non.

1. Évolution des contenus : analyse épistémologique des notions choisies

<u>Symétrie</u>

La symétrie axiale n'est pas seulement un concept mathématique, mais aussi, pour reprendre les termes de Vygotski (1934), un concept quotidien (Chesnais 2012). Le travail scolaire sur cet objet nécessite une articulation de ces deux aspects. Par ailleurs, nous distinguons la symétrie comme propriété d'une figure (aspect statique) et comme transformation géométrique (aspect dynamique) (Chesnais 2012). Mathématiquement parlant, l'aspect dynamique précède l'aspect statique, dans la mesure où l'existence d'un axe de symétrie dans une figure est la conséquence de l'existence d'une symétrie la conservant. En revanche, dans le concept quotidien, l'aspect dynamique est presque absent, excepté dans le mouvement de pliage, mais dans ce cas, une figure symétrique est une figure telle qu'une de ses moitiés est l'image de l'autre: le caractère symétrique n'est pas associé à l'invariance globale. Par ailleurs, l'association de la symétrie au pliage et au miroir (notamment du point de vue quotidien), renforce une conception erronée de la symétrie comme transformation d'un demi-plan dans un autre. Cette conception erronée, de même que le fait de ne pas articuler les aspects statique et dynamique de la symétrie n'empêche pas de réussir la plupart des tâches proposées à l'école, comme la construction du symétrique d'une figure située d'un côté de l'axe, ou trouver les axes de symétrie de figures élémentaires, mais l'articulation des deux aspects représente une composante de l'accès au concept mathématique. Certaines tâches permettent de travailler ces éléments : par exemple, construire la symétrique d'une figure coupée par l'axe ou compléter une figure pour qu'elle admette un axe de symétrie à partir de morceaux situés de part et d'autre de l'axe nécessitent de relier les aspects statique et dynamique de la symétrie ainsi que de dépasser la conception de la symétrie comme transformation d'un demi-plan dans un autre dans un seul sens.

Fonction

Une fonction est définie comme un processus qui à chaque nombre d'un ensemble donné associe un nombre et un seul. Elle peut être exprimée au moyen de différentes représentations au sein de différents registres (Duval 1993) :

- dans le registre algébrique, avec une expression algébrique, valable pour tout x d'un ensemble donné, dans laquelle x est une variable, et pas un nombre générique ou une inconnue comme c'est généralement le cas des équations étudiées jusque-là en algèbre;
- avec une formule qui donne le calcul à effectuer à partir de tout nombre x de l'ensemble de départ, et peut s'écrire globalement avec un formalisme nouveau par rapport à celui des expressions algébriques et des programmes de calcul : $f : x \to f(x)$;
- dans le registre numérique, sous forme d'un tableau de valeurs, qui donne un certain nombre de couples de nombres, formés d'un antécédent (nombre de départ) et de son image (le nombre que f lui associe), ce qui donne une représentation très ponctuelle et partielle de la fonction, puisqu'on ne peut pas en déduire en général d'autres couples de points;
- dans le registre graphique, à l'aide d'une courbe qui représente la correspondance entre les nombres de départ et d'arrivée, et permet en particulier d'observer les variations de la fonction (la façon dont f(x) se comporte lorsque x augmente, et réciproquement), ainsi que des propriétés de la fonction (parité, continuité, monotonie) qu'on n'impute généralement pas directement à une expression algébrique ou à un programme de calcul;
- il existe enfin aussi un registre formel, dans lequel on considère la fonction sans en donner une formule ni une représentation graphique, mais en la situant parmi des types de fonctions ayant certains attributs (affines, continues, croissantes…) ; certaines propriétés pouvant s'énoncer dans ce registre formel sans passer par les autres registres (comme la monotonie de la somme de deux fonctions croissantes, que l'on peut prouver en passant par le cadre algébrique par exemple).

La compréhension de la notion de fonction repose donc sur l'appropriation d'une articulation de cadres et registres qui, si elle se limite à une juxtaposition, ne permet peut-être pas de comprendre le sens de la notion et les potentialités de chaque cadre pour exprimer certains aspects d'une fonction et résoudre des problèmes mettant en jeux des fonctions (cf. Douady 1986). De plus les registres ne sont pas congruents, et le vocabulaire utilisé dans chaque cas n'est pas forcément le même (par exemple : « *la fonction f est positive* » et « *la courbe représentative de f est au-dessus de l'axe des x* ») ce qui peut renforcer les difficultés des élèves, surtout s'ils n'ont pas des occasions de prendre des initiatives en ce qui concerne le choix d'un registre pertinent ou le passage d'un registre à un autre, qui peut se faire de manière très automatisée (par exemple, remplir un tableau de valeurs à partir de la formule ou du graphique).

Cette acquisition de la notion repose aussi sur un certain nombre de prérequis liés au calcul numérique, à l'algèbre et à la gestion de données graphiques (dont on suppose la disponibilité pour pouvoir aborder les fonctions), mais on ne peut pas dire qu'elle prolonge ces notions, ce qui pose la question du lien de cette notion avec l'ancien. Qu'apporte ici la notion de fonction ? Que peut-on faire avec les fonctions qu'on ne peut pas faire sans ? Quel nouveau type de problème permettent-elles de résoudre (ou quel problème déjà connu permettent-elles de résoudre plus simplement ?). La notion de fonction est-elle alors Formalisatrice, Unificatrice, et/ou Généralisatrice (notion FUG) ? (cf. Robert 1998)

Pour ces deux notions, plusieurs conceptions sont possibles, reposant sur différents aspects et représentations, et l'on peut craindre que si cette variété n'est pas investie de la même façon de part et d'autre de la transition, les objets enseignés l'année passée ne soient pas facilement reconnus par les élèves au niveau supérieur.

2. *Évolution des contenus : analyse des programmes*

En France, les programmes scolaires « définissent les connaissances essentielles et les méthodes qui doivent être acquises au cours du cycle par les élèves ». C'est un cadrage national pour les manuels et les enseignants, pour organiser les enseignements.

Les contenus des programmes sont très peu différents en cycle 3 et en sixième en mathématiques. Toutefois, en géométrie, un changement du statut des objets doit être initié dès la classe de sixième pour permettre une entrée dans la géométrie déductive. La symétrie orthogonale est un des objets emblématiques de cette évolution dans le programme de sixième (Chesnais 2011).

En ce qui concerne les fonctions dans les programmes de 3ème et de 2nde, on peut noter de nombreux apports en 2nde par rapport à la 3ème :

- la définition de la notion de fonction est un objectif d'apprentissage pour la 2nde mais pas pour la 3ème, où la notion est proposée sans être rigoureusement définie dans son seul aspect « correspondance »[2] ;
- en 2nde on rajoute la notion de domaine de définition d'une fonction (donc un nouveau formalisme attaché à l'objet) ;
- on rajoute aussi de nouveaux problèmes, liés à l'étude qualitative des fonctions (variations, extremums sur un intervalle) ;
- on trouve aussi de nouveaux objets : les fonctions carrée, inverse, polynomiales de degré 2 ou homographiques (alors que le programme de 3ème ne propose que les fonctions affines) ;
- enfin, on trouve de nouveaux outils en 2nde, avec la résolution graphique d'équations et d'inéquations, pour résoudre des problèmes déjà abordés.

En 3ème, seule la notion les calculs d'images et d'antécédents sont proposés dans les programmes, et on peut penser que les manuels proposeront donc majoritairement ce type de tâche. La variété des tâches possibles est a priori plus grande en 2nde. D'après la lecture des programmes, on enrichit l'étude des fonctions par un grand nombre de caractéristiques nouvelles qui permettent peut-être d'en faire une étude plus globale que celle possible en 3ème avec le travail ponctuel sur image et antécédent.

Donc pour chacune des deux notions étudiées ici, on retrouve à la transition concernée des changements importants, aussi bien quantitatifs (variété des tâches proposées) que qualitatifs (changement de paradigme géométrique, de statut outil/objet), qui peuvent être à l'origine de difficultés pour les élèves. On conçoit que l'accompagnement de l'enseignant peut aussi intervenir, ne serait-ce que pour éclaircir ou non les changements attendus dans le travail des élèves (même si nous n'abordons pas ici cet aspect).

---

[2] Ce n'est pas un attendu du programme de 3ème que de présenter la notion de fonction sous ses autres aspects (dépendance, variation voire covariation).

3. *Analyser les manuels : premiers éléments*

Il s’agit d'une autre entrée dans les niveaux de conceptualisation visée, qui permet aussi d’introduire les études ultérieures de pratiques.

En France, il n’existe pas de manuel national : à chaque niveau, un grand nombre d’ouvrages sont disponibles, publiés par différents éditeurs. Les auteurs ont des statuts variés : professeur des écoles ou de collège et lycée, inspecteurs, formateurs d’enseignants ou chercheurs et ils choisissent les contenus librement, tout en respectant des critères commerciaux (nombre de pages, poids du manuel, conformité aux programmes et aux habitudes des enseignants). Dans les écoles, le choix du manuel utilisé peut revenir aux enseignants, de manière individuelle ou collective, ou à l’établissement.

Bien entendu on ne peut pas analyser les manuels comme on analyserait un scénario d’enseignement, car l’histoire ne dit pas quelle utilisation en sera faite, et en particulier :

- quels choix dans la multitude d’exercices.
- quelle dynamique (liens, allers-retours) entre cours et exercices.

Mais on peut supposer que les contenus des manuels constituent l’éventail de ce qui est à la disposition des enseignants pour faire la classe, et qu’une absence (de tâche, de discours, de rigueur mathématique) dans la plupart voire la totalité des manuels entraîne cette même absence dans ce qui est proposé par les enseignants.

4. *Analyser les manuels : méthodologie*

De manière générale, on va s’intéresser non seulement aux objets présentés dans les manuels, mais aussi aux aspects de ces objets privilégiés et à la façon dont ils sont travaillés (introduits, formulés, comment et pour quoi faire), à travers ce qui participe selon nous à leur conceptualisation :

- l’introduction de la notion : comment se fait-elle, elle est motivée par quoi ? quel nouveau est introduit et pour faire quoi, quelle raison d’être dans les programmes de ce niveau ? Cela amène à se pencher sur plusieurs points :
  - le lien avec l’ancien et les apports par rapport à l’ancien ;
  - le caractère outil attendu pour résoudre des problèmes.
- les cours : quelles définitions et propriétés sont données, quel vocabulaire est utilisé, avec quelle rigueur mathématique, quels exemples sont développés, ce qui amène aussi à regarder des éléments propres à chaque notion (registre, paradigme) compte tenu de l’analyse qui en a été faite, et des points qui ont été identifiés comme potentiellement sensibles pour les apprentissages des élèves :
  - **pour la symétrie**, cela nous amène à regarder comment sont travaillés les conceptions erronées, les aspects statique et dynamique de la symétrie, la manière dont le travail sur ces notions s’inscrit dans une logique d’initiation à une géométrie plus théorique, notamment en lien avec la distinction entre dessin et figure, en questionnant aussi quelle « mathématisation » des objets est visée en sixième.
  - **pour les fonctions** cela induit de regarder les apports du nouveau par rapport à l’ancien à travers les liens ou ruptures qui sont explicitement faits entre les deux aspects (comment on peut appréhender le fait que la fonction n’est pas « juste » une expression algébrique ou un graphique ?), les différents registres et leur articulation (comment présente-t-on les propriétés des fonctions dans les différents registres, indépendamment ou non) ? comment les met-on en parallèle,

voire en concurrence ? ou bien choisit-on un registre privilégié pour présenter chaque propriété ?), le formalisme introduit et ce qu'on en fait effectivement, le caractère global/ponctuel qui donne à voir ou non la fonction dans toute sa généralité, mais aussi le statut de la variable, et en particulier sans la notion de variation en 3ème et enfin la nature des fonctions, en réalisant un « herbier » pour voir ici aussi une variété ou non.

- les tâches : quelle utilité de la notion visée et pour résoudre quoi ? quelle variété des exercices, et quelles éventuelles tâches manquantes qui nous sembleraient pertinentes *a priori* pour donner du sens à la notion (par exemple des exercices induisant le passage du registre graphique au registre algébrique pour les fonctions), quelle complexité des tâches en terme d'adaptation à faire pour les élèves, en particulier des types de tâches et adaptations spécifiques à la notion que l'on vise :
  - **pour les fonctions**, quel travail sur les registres : mise en concurrence, limite ? ou juste traduction d'un registre à l'autre ? quelles initiatives de choix ou de changements de registres pour les élèves dans les exercices ? est-ce toujours forcé par l'énoncé ?
  - **pour la symétrie**, nous avons regardé la présence et les caractéristiques des tâches de construction de symétriques de figures, les tâches de reconnaissance d'axes de symétrie de figure, ainsi que plus particulièrement les tâches qui permettent de travailler sur l'articulation des aspects statique et dynamique, à savoir les tâches qui consistent à compléter une figure pour qu'elle admette un axe de symétrie ou à reconnaître des axes de symétrie sur des « figures doubles » ou encore des tâches qui permettraient de travailler sur l'aspect statique en introduisant l'idée d'invariance globale.

5. *Différentes analyses de manuels : nos résultats en parallèle, puis en perspective*

Nous avons regardé :

- les manuels d'un même niveau pour chercher des régularités ou une grande variabilité ;
- les manuels des deux niveaux pour repérer des différences liées à la transition.

On peut noter une différence a priori entre les deux transitions, à savoir que les manuels de CM2 sont souvent organisé de manière assez linéaire, les notions n'étant pas regroupées par chapitre, mais réparties page après page sur toute l'année (pour permettre une progression éventuelle en suivant les pages du manuel) alors que ce n'est pas le cas en 6ème. Il n'y a pas de différence aussi marquée entre les manuels de de 3ème et de 2nde, même si la variabilité est plus grande en 2nde.

<u>Symétrie</u>

Dans les deux niveaux, la prise en considération des conceptions erronées (par des tâches spécifiques ou dans la construction des contenus en général) est très inégale.

Concernant l'articulation entre les aspects statique et dynamique de la symétrie, seuls cinq manuels sur les huit étudiés contiennent au moins une tâche consistant à compléter une figure par symétrie, malgré les recommandations explicites des programmes. Cinq sur huit également contiennent des tâches concernant l'identification d'axes sur des figures doubles. Seuls deux manuels sur huit contiennent ces deux types de tâches. Ces deux manuels sont également ceux qui incluent un travail permettant de mettre en cause la conception erronée de transformation d'un demi-plan dans un autre. L'un d'eux propose également une première approche des propriétés de la symétrie qui seront retravaillées dans un contexte plus théorique en sixième.

La moitié des manuels de sixième sépare ce qui correspond à chacun des aspects de la symétrie dans deux chapitres différents. Trois d'entre eux mentionnent des « figures doubles » dans le chapitre à propos des axes de symétrie : cela favorise l'établissement du lien entre les deux aspects. A propos de l'aspect statique également, trois d'entre eux limitent le travail à la reconnaissance perceptive (comme à l'école primaire). La moitié des manuels mentionne l'invariance globale, mais parfois d'une manière peu logique : l'un la mentionne avant de parler de la transformation; trois relient le pliage et l'invariance globale mais seul l'un d'entre eux la mentionne dans la leçon, tandis que cela n'est abordé qu'en exercice dans les deux autres. Tous les manuels contiennent des tâches de construction de symétriques de figures coupées par l'axe.

Des tâches permettant l'entrée dans une géométrie plus théorique, nécessitant des raisonnements sur les figures indépendamment des dessins sont présentes dans tous les manuels de sixième, à propos de la symétrie. Toutefois, seul un manuel prend en charge explicitement une clarification du changement de statut des objets et des rapports entre observation, mesurage et démonstration, tandis que cela reste implicite dans les autres.

En conclusion, nous pouvons affirmer que les approches des manuels peuvent être très différentes et qu'elles ne prennent pas en considération la transition de la même manière. Notamment, certains manuels de CM2 choisissent d'introduire des notions ou tâches qui correspondent aux attentes des programmes de 6ème, tandis que d'autres font d'autres choix : par exemple, Euromaths prépare la transition en travaillant précisément sur les difficultés, conceptions erronées et spécifiquement le sens des concepts (aspects statique et dynamique de la symétrie). Selon les manuels, les conceptions erronées sont travaillées ou non. Quant aux manuels de sixième, certains considèrent qu'un certain niveau de conceptualisation a déjà été atteint par les élèves, en contradiction avec ce qui est effectivement abordé dans les manuels de CM2.

Le travail d'identification des acquis des élèves et de dépassement de certaines conceptions erronées reste donc de la responsabilité du professeur.

<u>Fonction</u>

En 3ème, on trouve un étiquetage variable et flou des définitions et propriétés (et pas de définition de fonction, conformément aux programmes). C'est moins vrai en 2nde, où les quantifications sur la variable sont malgré tout toujours assez peu présentes. On constate en 3ème un formalisme peu exploité et un caractère global de la fonction qui a peu d'occasions d'être rencontré, faute de pouvoir faire travailler sur les propriétés des fonctions telles que la monotonie ou la parité, qui ne sont pas au programme de 3ème. Il n'y a pas d'articulation ni de mise en relief des registres dans les manuels de 3ème qui présentent la notion en parallèle dans les différents registres sans évoquer les potentialités et les limites de chacun, ni même les liens (exprimer un même phénomène dans plusieurs registres, choisir un registre pertinent pour résoudre un problème). Les propriétés sont généralement exprimées dans un seul registre à la fois.

En 2nde, on trouve un nombre très important d'exercices variés (souvent plus d'une centaine par chapitre !) surtout par rapport à la 3ème où on trouve des tâches assez répétitives, en particulier sur le calcul d'image et d'antécédent (passage indiqué du registre graphique ou algébrique au registre numérique, généralement sans initiative pour les élèves) et en nombre plus limité (à relier avec la préparation au Brevet des Collèges ?). Il y a peu de variabilité d'un manuel de 3ème à l'autre sur ce point.

En 2nde on trouve une plus grande variété entre les manuels et sur la façon dont ils motivent l'introduction des fonctions ; avec quelques problèmes d'optimisation dans certains manuels. Le cours ne semble pas beaucoup plus riche sur l'articulation des registres, mais la variété des exercices permet davantage un travail de passage d'un registre à l'autre, avec plus d'initiatives (potentiellement moins répétitif, moins automatisable ?)

Finalement on peut noter une plus grande variabilité des manuels de 2nde par rapport à ceux de 3ème, peut-être à rapprocher des contraintes liées au Brevet en fin de 3ème et, a contrario, des orientations différenciées des élèves après la 2nde. Mais l'articulation des registres n'est pas explicitement faite, en 3ème comme en 2nde ; en revanche le formalisme, qui permet en particulier de voir le caractère global de la fonction, n'est pas très utilisé en 3ème alors qu'il l'est déjà plus en 2nde. Sur ce point, on ne constate donc pas d'anticipation en 3ème sur ce qui sera fait en 2nde, à relier aux préconisations des programmes, et, encore une fois, à la préparation du brevet (avec des tâches ponctuelles sur image et antécédent et des passages indiqués du registre algébrique (ou numérique) au registre graphique).

Dans les deux cas on note une absence d'articulation des aspects qui caractérisent ces notions, plus grande au niveau inférieur des deux transitions. On peut y voir aussi un manque fréquent de prise en compte de ce qui sera traité au niveau supérieur : peu de travail sur les conceptions erronées liées à la symétrie pour préparer à l'entrée en 6ème d'une part, et d'autre part un travail plutôt technique sur les fonctions en 3ème (recherche d'image / d'antécédent) qui ne donne probablement pas à voir le caractère global de l'objet fonction ni son caractère outil, et n'assure pas aux élèves d'arriver en 2nde en ayant réellement abordé le concept de fonction, contrairement à ce que pourraient penser les enseignants de lycée. Dans les deux cas, l'analyse des programmes scolaires respectés par les manuels analysés explique en partie ces écarts.

III. CONCLUSION : VERS QUELLES ETUDES DES PRATIQUES EFFECTIVES ?

1. Comparaison de « ce qu'on trouve en classe » et de «ce qui est/n'est pas dans les manuels » : le cas de la symétrie

L'analyse des manuels nous informe sur l'éventail des possibles (en ce qui concerne les cours et les tâches) à la disposition des enseignants, mais nous ne pouvons pas en déduire comment ils sont effectivement utilisés par les enseignants, qui peuvent s'appuyer sur un ou plusieurs manuels, ou sur aucun, avec des différences éventuelles sur l'usage des ressources.

Pour la symétrie, on se demande quelle prise en charge par les enseignants des enjeux identifiés comme problématiques a priori : comment les enseignants de CM2 « préparent » à la sixième et comment les enseignants de sixième tiennent compte des acquis des élèves, comment ils articulent à leurs connaissances anciennes. Notamment, nous nous intéressons au travail sur les conceptions erronées, les deux aspects de la symétrie et leur articulation.

De premiers résultats (Chesnais & Munier 2013) indiquent que les observations en classe confortent les analyses faites dans les manuels. On constate une grande diversité dans ce qui est abordé ou non en CM2 et sur la nature du travail demandé aux élèves (axé sur l'acquisition d'algorithmes relevant éventuellement plus de la sixième ou bien sur un travail plus conceptuel, notamment sur les conceptions erronées). En sixième, on retrouve une non-identification d'un certain nombre d'enjeux, considérés comme non problématiques ou déjà acquis (à tort), en particulier sur la mathématisation des objets, l'introduction de la mesure (le sens même de ce qu'est une mesure, de la notion de précision et d'incertitude), ainsi que l'entrée dans la géométrie théorique (par exemple sur la distinction entre dessin et figure).

Pour donner un exemple précis, les enseignants de sixième prennent manifestement pour acquis le lien entre symétrie et pliage, y compris en considérant que les élèves maîtrisent des techniques de construction ou de vérification de symétriques par pliage ou usage du calque alors que cela n'est pas travaillé dans toutes les classes de cycle 3.

On peut faire l'hypothèse que l'on risque de retrouver dans beaucoup de classes de 2[nde] cette même absence de prise en compte des enjeux liés aux fonctions (changements de registre ou de point de vue) et non encore acquis en fin de collège.

2. *Comment analyser les pratiques ?*

Côté enseignants, il s'agit de reconstituer les pratiques individuelles et dans une certaine mesure collectives (cf. régularités, problèmes de la profession) – dans leur complexité. C'est ici une méthodologie différente de celle utilisée pour l'analyse des manuels, car, même si elle tient compte des spécificités des notions mathématiques énoncées plus haut, elle s'attache à des études de cas, dans la mesure où nous ne savons pas encore mettre en œuvre des études qualitatives à grande échelle sur les enseignants comme nous pouvons le faire sur les manuels.

Les outils de caractérisation didactique développés ici nous permettent d'anticiper des difficultés probables pour les élèves, liées à ces notions et à leur traitement différent à chaque niveau, d'affiner nos observations en classe pour repérer la façon dont les enseignants prennent ou non en compte ces difficultés, et mesurer ainsi des écarts plus ou moins grands entre les deux années. On peut supposer que le rôle des moments d'exposition des connaissances sera décisif à cet égard d'autant que les habitudes institutionnelles diffèrent (peu développés en CM2, présents en 6ème et en 3ème, importants en 2nde).

REFERENCES

Bednarz N., Lafontaine J., Auclair M., Morelli C., Leroux C. (2009) Pour une plus grande harmonisation dans la transition du primaire au secondaire en mathématiques. *Bulletin de l'AMQ* XLIX (1), mars 2009.

Benzekry B., Fauvé C., Robert A., Rousse S., Vuong M., Zélicourt C. (2011) La transition Troisième/Seconde. Constats et questions à partir de la comparaison d'exercices variés des deux niveaux. *Repères IREM* 83, 5-37.

Chesnais A. (2011) Apprentissages mathématiques en sixième : contextes différents, pratiques différentes et inégalités. *Revue Française de Pédagogie*, 176, 57-72.

Chesnais A. (2012) L'enseignement de la symétrie orthogonale en sixième : des contraintes, des ressources et des choix. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 32(2), 229-278.

Chesnais A., Munier V. (2013) Learning and teaching geometry at the transition from primary to secondary school in France: the cases of axial symmetry and angle, *Proceedings CERME 8*, 595-604.

Colomb J., Guillaume J.-C., Charnay R. (1987) Articulation école/collège, quels contrats disciplinaires en mathématiques. *Revue Française de Pédagogie* n°80, 25-36.

Douady R. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 5-31.

Duval R. (1993) Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives* 5, 37-65.

Grugeon B. (1997) Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire, *Recherches en didactique des mathématiques* 17(2), 167-210.

Robert A. (1998) Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 18(2), 139-190.

Robert A. (2007) Stabilité des pratiques des enseignants de mathématiques (second degré) : une hypothèse, des inférences en formation. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 27/3, 271-311.

Robert A. (2008) Problématique et méthodologie communes aux analyses des activités mathématiques des élèves en classe et des pratiques des enseignants de mathématiques. In Vandebrouck F. (Ed .) *La classe de mathématiques : activités d'élèves et pratiques d'enseignants* (pp. 31-69). Octarès, Toulouse.

Salin M.-H. (2003) Comprendre les difficultés des élèves à passer de la « géométrie de l'école primaire » à la « géométrie du collège ». *Actes du colloque international « Espace Mathématique Francophone »*. CD-ROM. Tozeur, Tunisie, 19 au 23 décembre.

Vygotsky L. [1934] (1997) *Pensée et langage*. Paris : La Dispute.